

УДК 528.235

**Король П. П., Пугач С. О.**

Східноєвропейський національний університет імені Лесі  
Українки

**Мельнійчук М. М.**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

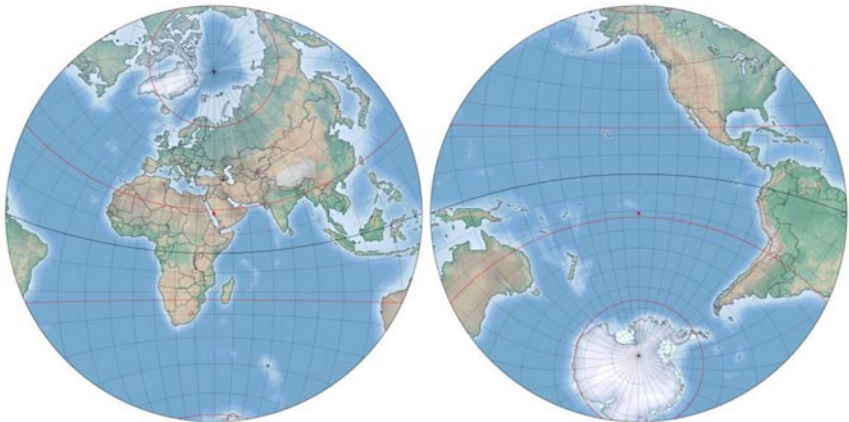
## **РЕТРОАЗИМУТАЛЬНІ КАРТОГРАФІЧНІ ПРОЕКЦІЇ: ПЕРЕДУМОВИ РОЗРОБКИ ТА НАПРЯМИ ВИКОРИСТАННЯ**

Обґрунтовано історичні передумови розробки ретроазимутальних картографічних проєкцій та визначено їх місце у загальній схемі класифікації картографічних проєкцій. Проаналізовано світовий досвід розробки ретроазимутальних картографічних проєкцій. Наведено характеристики основних ретроазимутальних проєкцій: Літрова-Лагранжа, Крейга і Гаммера. Намічено перспективні напрями використання ретроазимутальних картографічних проєкцій як математичних основ географічних карт різного територіального охоплення. Побудовано макети картографічних сіток трьох основних ретроазимутальних проєкцій з ретроазимутальним центром — м. Київ.

**Ключові слова:** ретроазимутальні картографічні проєкції, кааба, кібла, ретроазимутальний напрямок, ортодрома, Littrow-Lagrange projection, Craig Mecca projection, Hammer Retroazimuthal.

**Вступ.** Для мусульман, які проживають у різних частинах світу, завжди важливо знати напрямки на священне місто Мекку, що знаходиться у Саудівській Аравії. Оскільки Мекка розташована між тропіками, то двічі на рік Сонце знаходиться у зеніті над Каабою.

**Кааба** — будівля, кам'яна споруда прямокутної форми в центрі Священної Мечеті (аль-Масжид аль-Харам) у Мецці, головне святилище ісламу, яке мусульмани називають аль-Баїт аль-Харам, що означає «священний дім». Мусульмани всього світу під час молитви звертаються обличчям у напрямку Кааби. Навколо Кааби під час хаджу здійснюється обряд таваф. Каабу виготовлено з граніту і вкрито зверху тканиною, усередині є приміщення. Її висота становить 15 метрів, довжина і ширина, відповідно, 10 і 12 метрів.



**Рис. 1. Розміщення ретроазимутальних центрів на карті півкулі**

Кути Кааби розташовано за сторонами світу і вони мають назви «єменський» (південний), «іракський» (північний), «левантійський» (західний) і «кам'яний» (східний), де на рівні 1,5 м вбудовано чорний камінь (аль-Хаджар аль-Есвад), посланий Аллахом з неба.

Кожен мусульманин, який знаходиться у півкулі з центром у Мецці (тобто у колі радіусом близько 10 000 км від Мекки) повинен визначити напрям кібли, спостерігаючи Сонце у ці дні в потрібний момент. Компасний напрям на Сонце утворює кіблу. Мусульмани, які знаходяться у іншій півкулі (тобто на відстані понад 10 000 км від Мекки), не можуть використати цей метод, оскільки в цей час Сонце знаходиться за лінією горизонту. Однак, мусульмани, які проживають у Північній Америці, Південній Америці, Австралії або Антарктиді використовують дні, коли Сонце знаходиться під Каабою (тобто у точці протилежній Каабі). Це також відбувається двічі на рік 12 або 13 січня о 21:29 за світовим часом (00:29 за місцевим часом Саудівської Аравії) і 28 листопада о 21:09 за світовим часом (00:09 за місцевим часом Саудівської Аравії). Востанньому випадку кіблу визначають простими спостереженнями компасного напрямку своєї тіні в потрібний час.

**Кібла** — напрямок на Мекку, а точніше на Каабу, якого слід дотримуватись під час мусульманської молитви (салат) і здійснення деяких обрядів. У мечетях кібла позначається спеціальною нішею (міхраб або кібла), чи лініями на підлозі, якщо орієнтування мечеті було неправильним. Спосіб визначення кібли був одним з найважливіших

завдань, що розроблялися середньовічною мусульманською математичною географією і сферичною астрономією. Визначенням азимуту кібли займався зокрема великий арабський вчений-універсал Ібн ал-Хайсам.

**Вихідні передумови.** Напрямок кібли визначає азимут ортодромії, що з'єднує даний пункт з Меккою. З цією метою не може бути використана проекція Меркатора, оскільки в ній прямі лінії локсодромії не є лініями найкоротших відстаней, а їх азимути не відповідають напрямкам на відповідний пункт [17]. Для графічного визначення напрямків можуть бути використані перспективні азимутальні проекції, зокрема, ортографічна, гномонічна і стереографічна, оскільки лінії, що виходять з центру проекції, точно вказують напрямок дуги великого кола на дану точку, однак, у даному випадку, доцільніше використовувати так звані **ретроазимутальні проекції** (від лат. *retro* — назад, давно), що точно вказують напрямок дуги великого кола з даної точки до центру проекції.

В основу побудови цих картографічних проекцій покладено умову збереження правильності напрямків (азимутів) на дану точку з будь-якої іншої точки, що відрізняє даний клас проекцій від традиційних азимутальних проекцій. Існування єдиної визначальної умови не дозволяє виділити їх в окремий клас картографічних проекцій, оскільки для визначення класу необхідно як мінімум дві визначальні умови. Згідно схеми геометричної класифікації Л. П. Лі (1944) ретроазимутальні картографічні проекції разом з ортоапсидальними і змішаними відносяться до групи неконічних проекцій [18]. Ретроазимутальні картографічні проекції можуть бути конформними, рівнопроміжними або довільними, однак у жодному разі не рівновеликими.

У загальному випадку, для визначення ретроазимутального напрямку або кібли використовується рівність:

$$\operatorname{tg} q = \sin(\lambda - \lambda_0) / (\sin \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) - \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi_0),$$

де  $(\varphi, \lambda)$  — астрономічні координати вихідного пункту,

$(\varphi_0, \lambda_0)$  — астрономічні координати центру

(для Мекки  $\varphi_0 = 21^\circ 27'$  пн. ш.,  $\lambda_0 = 39^\circ 45'$  сх. д.).

**Огляд попередніх досліджень.** Необхідність визначення кібли призвела до появи ретроазимутальних картографічних проекцій — оригінального, однак маловідомого класу картографічних проекцій.

Найвідомішими проекціями даного класу картографічних проекцій є проекції Літрова [11], Крейга [2] і Гаммера [8], хоча останні дослідження істориків підтверджують факт існування подібних картографічних проекцій у мусульман Ірану за декілька століть до їх вишукування. Для ретроазимутальних картографічних проекцій характерною є вигнутість паралелей у бік екватора. Подальші дослідження ретроазимутальних картографічних проекцій К. Шоя [15,16] призвели до появи «неоциліндричних» азимутальних проекцій з паралелями, що мають вигин у бік від екватора.

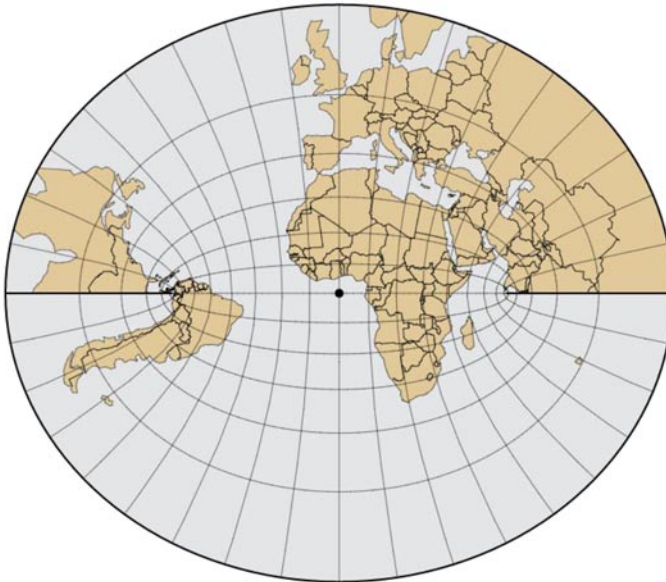
Напрямки використання ретроазимутальних картографічних проекцій є різноманітними і до кінця не вивченими. Зокрема, у 1910 році Дж. А. Крейг [3] запропонував використовувати ретроазимутальні проекції для локалізації місцеположення військових кораблів за пеленгом на радіостанцію. Пізніше, у 1929 році британський картограф А.Р.Гінкс [9] використав ретроазимутальну проекцію Крейга з центром в Регбі (Великобританія) для визначення місцеположення колоністів Британської імперії відносно опорного центру.

У 1968 році Дж. Е. Джексон [10] варіюючи відстанями між прямолінійними паралельними меридіанами отримав варіативну множину ретроазимутальних проекцій. Якщо меридіани розташовуються на відстанях, що пропорційні синусам різниць довгот, то паралелі є еліптичними кривими, якщо меридіани розташовуються на відстанях, що пропорційні тангенсу піврізниці довгот, то паралелі є параболічними кривими, а якщо меридіани розташовуються на відстанях, що пропорційні тангенсу різниці довгот, то паралелі є гіперболічними кривими. Він також обґрунтував варіанти ретроазимутальних проекцій з криволінійними меридіанами і ретроазимутальних стереографічних неконформних проекцій. У 1971 році М. де Хенселер [5] використав рівнопроміжну ретроазимутальну проекцію для зображення геофізичної обсерваторії в Аддис-Абебі (Ефіопія), а у 1973 році Е.Н.Гілберт створив сатиричну карту, що побудована із використанням ретроазимутальної проекції з центром на Уолл-Стріт (Нью-Йорк, США), підкреслюючи тим самим роль цього місця як «Мекки фінансового світу».

**Метою** статті є обґрунтування можливостей використання ретроазимутальних картографічних проекцій у практиці сучасного картографічного виробництва на основі детального аналізу

світового досвіду розробки, характеристик та властивостей проєкцій даної групи.

**Виклад основного матеріалу.** У 1833 році австрійським картографом і астрономом, директором Краківської та Віденської обсерваторій Йозефом Йоганном Елдером фон Літровим [11] було запропоновано поперечний варіант проєкції Лагранжа із заданими параметрами — рівнокутну ретроазимутальну картографічну проєкцію — *Littrow-Lagrange projection*, що використовувалась у XIX ст. британським морським флотом для виконання локації на пункт спостереження (рис. 2).



**Рис. 2. Політична карта світу в модифікованій рівнокутній ретроазимутальній проєкції Літрова – *Littrow-Lagrange projection* ( $\varphi_0 = 0^\circ, \lambda_0 = 0^\circ$ ) [4]**

Картографічна сітка проєкції симетрична відносно центрального меридіана і екватора та представлена наступним чином: центральний меридіан і меридіани, що віддалені від нього на  $90^\circ$  по обидва боки — прямі, інші меридіани — гіперболічні криві, що вигнуті в бік центрального меридіану; екватор, що співпадає з великою віссю — прямий, інші паралелі — еліпси. Полюси в проєкції не відображаються. Масштаб зображення по полю карти

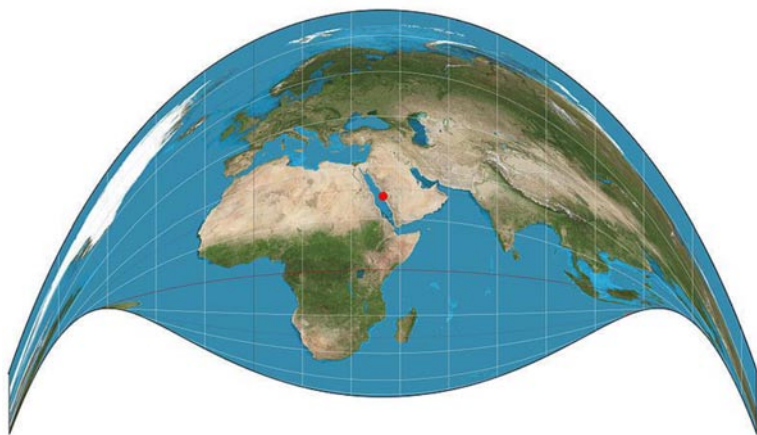
змінюється дуже швидко, особливо відчутно спотворюються площі. В проекції правильно передаються напрямки з будь-якої точки карти на будь-яку точку центрального меридіану [19].

У прямокутних координатах проекція Літрова описується наступним чином:

$$x = R \sin(\lambda - \lambda_0) / \cos \varphi, \quad y = R \operatorname{tg} \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)$$

Вісь  $x$  співпадає з екватором і напрямлена на схід, а вісь  $y$  — з центральним меридіаном і напрямлена на північ.

У 1909 році британським економістом, математиком і картографом, митним комісаром уряду Великобританії Джеймсом Айлендом Крейгом [2] для спрощення мусульманам пошуку кібли була запропонована довільна модифікована ретроазимутальна проекція — Craig Messa projection (рис. 3).



**Рис. 3. Довільна модифікована ретроазимутальна проекція Крейга – Месса projection ( $\varphi_0 = 21^\circ 27'$  пн. ш.,  $\lambda_0 = 39^\circ 45'$  сх. д.)**

Картографічна сітка проекції представлена наступним чином: меридіани — рівновіддалені прямі паралельні лінії, паралелі і полюси — криві лінії. Картографічна сітка симетрична відносно центрального меридіану. У проекції значно спотворюються форми і площі географічних об'єктів, а напрямки зберігаються з будь-якої точки карти до її центральної точки. При відображенні значних за



площею територій спостерігається накладання зображення.

У прямокутних координатах проекція визначається формулами:

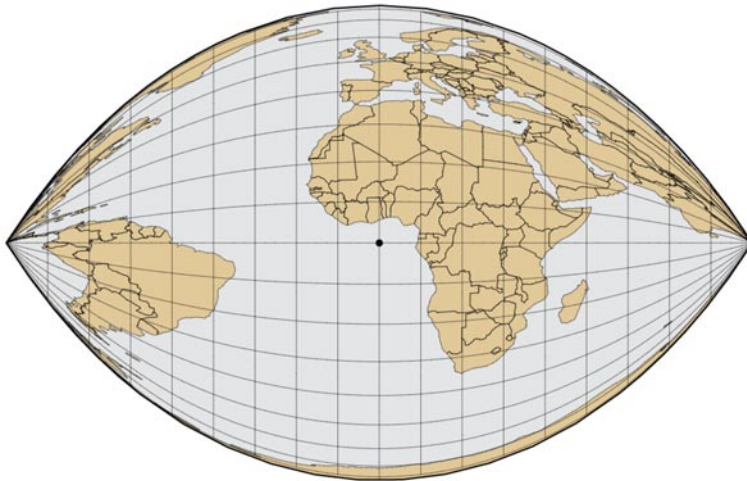
$$\lambda - \lambda_0 \neq 0, \text{ то } x = R (\lambda - \lambda_0);$$

$$y = R (\lambda - \lambda_0) [\sin \varphi \cos (\lambda - \lambda_0) - \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi_0] / \sin (\lambda - \lambda_0), \text{ якщо}$$

$$(\lambda - \lambda_0) = 0, \text{ то } x = 0; y = R (\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi_0).$$

Координатні осі проходять через точку  $(\varphi_0, \lambda_0)$ , вісь  $y$  співпадає з центральним меридіаном і напрямлена на північ. Напрямок з кожної точки в точку з координатами є дійсним.

Використовується для відображення правильних напрямків з будь-якої точки світу до центральної точки (рис. 4). Оскільки меридіани є паралельними прямими, то вимірювання дійсних азимутів напрямків не викликає жодних ускладнень.

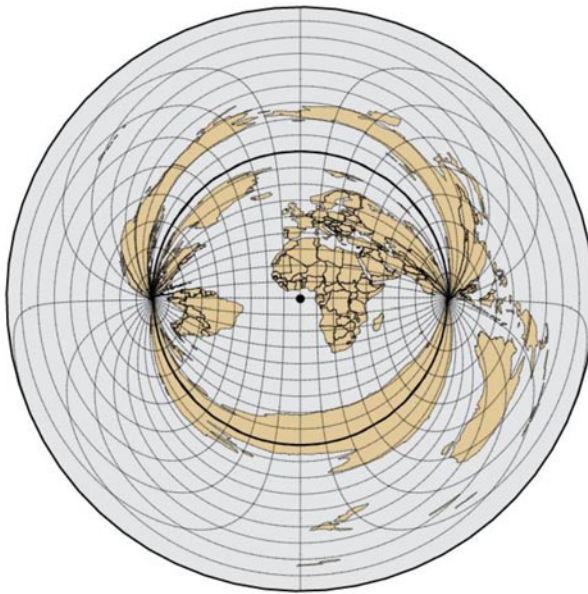


**Рис. 4. Політична карта світу в довільній модифікованій ретроазимутальній проекції Крейга – Craig projection  $(\varphi_0 = 0^\circ, \lambda_0 = 0^\circ)$  [4]**

Подібними до проекції Крейга є проекція Гаммера (1919) з кривими нерівновіддаленими меридіанами та проекція Джексона (1968) з прямими паралельними нерівновіддаленими меридіанами.

У 1913 році Карл Шой запропонував картографічну проекцію з прямолінійними рівновіддаленими паралельними меридіанами і кривими паралелями, що візуально нагадує ретроазимутальну проекцію, однак спотворення в ній зростають рівномірно радіально при віддаленні від центру проекції, тому її відносять до класу азимутальних проекцій.

У 1910 році німецьким геодезистом і картографом, ординарним професором нижчої і вищої геодезії, креслення планів та методу найменших квадратів Політехнічного університету Штутгарта Германом Гайнріхом Ернстом фон Гаммером [8] була розроблена нерівнокутна і нерівновелика модифікована ретроазимутальна картографічна проекція — Hammer Retroazimuthal (рис. 5), що була презентована лише у 1929 році Е. А. Рівзом [14] і А. Р. Гінксом [9].



**Рис. 5. Політична карта світу в довільній модифікованій ретроазимутальній проекції Гаммера – Hammer Retroazimuthal projection ( $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $\lambda_0 = 0^\circ$ ) [4]**

Картографічна сітка проекції представлена наступним чином: меридіани — крім прямолінійного центрального, криві, що симетричні відносно нього, паралелі і полюси — криві. В даній проекції максимально спотворюються форми і площі географічних



об'єктів. Особливість проєкції полягає в тому, що напрямки з будь-якої точки до центральної точки карти є дійсними і зображуються прямими лініями. При зображенні сфери в цілому спостерігається накладання зображення.

У прямокутних координатах довільна модифікована ретроазимутальна проєкція Гаммера описується наступним чином:

$$x = RK \cos \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_0) - \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi_0] / \sin (\lambda - \lambda_0),$$

$$y = -RK [\sin \varphi_1 \cos \varphi - \cos \varphi_1 \sin \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)], \text{ де } K = z / \sin z$$

Якщо  $\cos z = 1$ , то рівність є невизначеною, однак  $K = 1$ . Якщо  $\cos z = -1$ , то точка є протилежною до центральної і відображається обмежуючим колом радіусом  $nR$ , де

$$\cos z = \sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \varphi_1 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0).$$

Якщо  $\cos z \leq 0$ , то точка не існує.

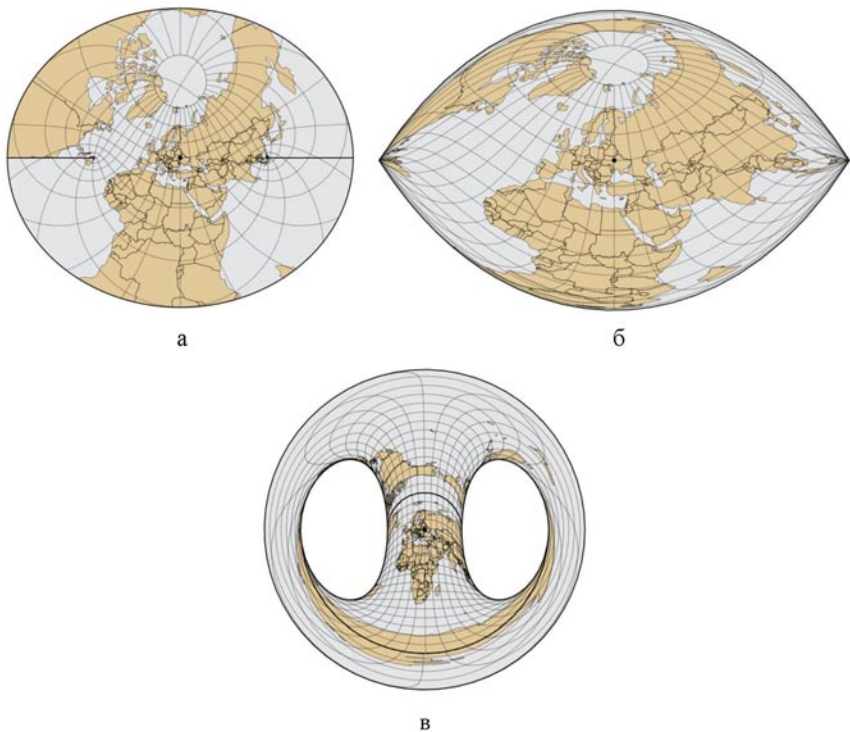
#### **Висновки та перспективи подальших досліджень.**

Незважаючи на малочисельність даної підгрупи картографічних проєкцій, їх варіативність забезпечується зміною положення ретроазимутального центру або їх кількості. Модифіковані варіанти ретроазимутальних проєкцій можуть використовуватись для картографічного забезпечення проведення міжнародних політичних і економічних форумів, культурних заходів, спортивних змагань тощо. Політичні карти світу у трьох основних ретроазимутальних проєкціях, центром яких є м. Київ, наведено на рис. 6.

**Рецензент — доктор технічних наук, професор А. В. Шостак**

#### **Література:**

1. Arden-Close C. F. A polarazimuthal retro-azimuthal projection [Text] / C. F. Arden-Close // Geographical Journal. — 1938. — Vol. 92, No. 6. — P. 536-537. — [Formerly C. F. Close, G. S. Bachan, Standard azimuthal projection: Cartography, 1973. — Vol. 8. — No. 1 — P. 40.].
2. Craig J. I. Map-projections (Technical lecture, 1909). The theory of map projections, with special reference to the projections used in the Survey Department [Map] / J. I. Craig. — Cairo (Egypt): Ministry of Finance, Survey Dept., 1910. — Paper No.13. — 25+80 p. [Presents



**Рис. 6. Політична карта світу в ретроазимутальних проєкціях: а – Літрова; б – Крейга; в – Гаммера (адаптований варіант – центр м. Київ ( $\varphi_0 = 50^\circ 27'$  пн. ш.,  $\lambda_0 = 30^\circ 30'$  сх. д.))**

his «Mecca» retroazimuthal projection].

3. Craig J. I. A class of map projections retroazimuthal [Text] / J. I. Craig // British Association for the Advancement of Science, 81st Meeting, Portsmouth, 1911. — Report. — P. 448-449.

4. Davies J. Freelance data visualization. Maps [Electronic resource]. — Mode of access: <https://www.jasondavies.com/maps/retroazimuthal>.

5. de Henseler M. A retro-azimuthal equidistant projection centered on Addis Ababa [Text] / M. de Henseler // Haile Selassie University Bulletin, Geophysical Observatory, Addis Ababa, 1971. — Vol. 13. — P. 103–105.

6. Hagiwara Y. A retro-azimuthal projection of the whole sphere [Text] / Y. Hagiwara // International Cartographic Association, 12th

Conference, Perth, 1984. — Technical Papers. — Vol. 1. — P. 840-848.

7. Hagiwara Y. A retro-azimuthal projection of the whole sphere an attempt to make a «Mecca Map» [Text] / Y. Hagiwara // Journal of the Japan Cartographers Assn. — 1985. — Vol. 23. — No. 2. — P. 1-6.

8. Hammer E. Gegenazimutale Projektionen [Map] / E. Hammer // Petermanns Mitteilungen. — 1910. — Vol. 56-1. — No. 3. — P. 153-155. — [Retroazimuthal projection.].

9. Hinks A. R. A retro-azimuthal equidistant projection of the whole sphere [Text] / A. R. Hinks // Geographical Journal. — 1929. — Vol. 73. — No. 3. — P. 245-247. — [Independent presentation of Hammer Retroazimuthal projection.].

10. Jackson J. E. On retro-azimuthal projections [Text] / J.E.Jackson // Survey Review. — 1968. — Vol. 19. — No. 149. — P.319-328.

11. Littrow J. J. Chorographie; Oder Anleitung, alle Arten von Land- See- und Himmelskarten zu verfertigen [Map] / J. J. Littrow. — Vienna: F. Beck, 1833. — 208 p. — [Presents his conformal retroazimuthal projection].

12. Maurer H. Gegenazimutale Projektionen [Map] / H. Maurer // Petermanns Mitteilungen. — 1911. — Vol. 57-1. — No. 5. — P. 255-256. — [Retroazimuthal projections].

13. Maurer H. Das winkeltreue gegenazimutale Kartennetz nach Littrow (Weirs Azimutdiagramm) / [Text] H. Maurer // Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie. — 1919. — Vol. 47. — No. 1/2. — P. 14-22.

14. Reeves E. A. A chart showing the true bearing of Rugby from all parts of the world [Map] / E. A. Reeves // Geographical Journal. — 1929. — Vol. 73. — No. 3. — P. 247-248. — [Independent use of Hammer Retroazimuthal projection, centered on Rugby].

15. Schoy C. Azimutale und gegenazimutale Karten mit gleich abständigen parallelen Meridianen [Map] / C. Schoy // Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie. — 1913. — Vol. 41. — No. 1. — P. 33-42. — [Azimuthal and retroazimuthal projections].

16. Schoy C. Die gegenazimutale mittabstandstreue Karte in konstruktiver und theoretischer Behandlung [Text] / C. Schoy // Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie. — 1913. — Vol. 41, No. 9. — P. 466-473. — [Retroazimuthal projection.].

17. Schoy C. Mittagslinie und Qibla; Notiz zur Geschichte der mathematischen Geographie [Text] / C. Schoy // Gesellschaft

fur Erdkunde zu Berlin: Zeitschrift, 1915. — P. 558—576. — [Retroazimuthal projections].

18. Sossa R. Historical aspects of development of the theory of azimuthal map projections [Text] / R. Sossa, P. Korol // Studia Geohistorica. Rocznik historyczno-geograficzny. — 2015. — Nr.03. — P. 189-205.

19. Wedemeyer A. Das winkeltreue gegenazimutale Kartennetz nach Littrow [Text] / A. Wedemeyer // Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie. — 1919. — Vol. 47. — No. 7/8. — P. 183-188.

П. Ф. Король, С. А. Пугач, М. М. Мельничук

### **РЕТРОАЗИМУТАЛЬНЫЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ: ПРЕДПОСЫЛКИ РАЗРАБОТКИ И НАПРАВЛЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ**

Обоснованы исторические предпосылки разработки ретроазимутальных картографических проекций и определено их место в общей схеме классификации картографических проекций. Проанализирован мировой опыт разработки ретроазимутальных картографических проекций. Приведены характеристики основных ретроазимутальных проекций: Литрова-Лагранжа, Крейга и Гаммера. Намечены перспективные направления использования ретроазимутальных картографических проекций как математических основ географических карт различного территориального охвата. Построены макеты картографических сеток трех основных ретроазимутальных проекций с ретроазимутальным центром — г. Киев.

**Ключевые слова:** ретроазимутальные картографические проекции, кааба, кибла, ретроазимутальное направление, ортодромия, Littrow-Lagrange projection, Craig Mecca projection, Hammer Retroazimuthal

P. P. Korol, S. O. Puhach, M. M. Melnychuk

### **RETROAZIMUTHAL MAP PROJECTIONS: PRECONDITIONS OF DEVELOPMENT AND TRENDS OF USE**

The historical preconditions for development of retroazimuthal map projections are substantiated and their place in the general classification schema of map projections is defined. The world experience developing of retroazimuthal map projections is analyzed. The characteristics of

the main retroazimuthal map projections: Littrow-Lagrange, Craig and Hammer are presented. Perspective directions of use of retroazimuthal map projections as the mathematical foundations of geographical maps of different spatial coverage are outlined. The layouts of map grids of three main retroazimuthal map projections with retroazimuthal center in Kyiv City are constructed.

**Key words:** retroazimuthal map projections, Kaaba, Qiblah, retroazimuthal direction, great-circle distance, Littrow-Lagrange projection, Craig Mecca projection, Hammer Retroazimuthal.

Надійшла до редакції 23 березня 2017 р.