

УДК 539.3

М. Чернець

Професор, д-р техн. наук,
Дрогобицький державний
педагогічний університет
імені Івана Франка,
м. Дрогобич, Україна;
Люблінський політехнічний інститут,
м. Люблін, Польща

Н. Лебєдєва

Ст. наук. співр., канд. техн. наук,
Дрогобицький державний
педагогічний університет
імені Івана Франка,
м. Дрогобич, Україна

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО СПРЯЖЕННЯ ТІЛ З МАЛИМ ОГРАНЕННЯМ КОНТУРІВ ПРИ ДВООБЛАСТЕВОМУ КОНТАКТІ

І зазначено, що в процесі виготовлення деталей цих спряжень неминучими є відхилення їхніх контурів від колових. Розв'язок такого типу контактної задачі для різних видів однообластевому контакту за наявності малої еліптичності вперше було подано в [1]. У подальшому в працях [2, 3 та ін.] досліджено вплив малої некругlosti на параметри контакту при однообластевому та двообластевому контакті, зокрема, у [4, 5] за наявності овальності отвору чи диска. Нижче розглянуто метод оцінки величини початкового кута дотику елементів спряження, в якому диск є овальним, а отвір — овальним, тригранним, чотиригранним. Подано також узагальнений метод розв'язування цієї контактної задачі, за яким проведено дослідження впливу малого огранення на характеристики контакту.

циліндричне спряження близьких радіусів, огранення контурів, двообластевий контакт

З практики відомо, що у процесі виготовлення деталей цих спряжень неминучими є відхилення їхніх контурів від колових. Розв'язок такого типу контактної задачі для різних видів однообластевому контакту за наявності малої еліптичності вперше було подано в [1]. У подальшому в працях [2, 3 та ін.] досліджено вплив малої некругlosti на параметри контакту при однообластевому та двообластевому контакті, зокрема, у [4, 5] за наявності овальності отвору чи диска. Нижче розглянуто метод оцінки величини початкового кута дотику елементів спряження, в якому диск є овальним, а отвір — овальним, тригранним, чотиригранним. Подано також узагальнений метод розв'язування цієї контактної задачі, за яким проведено дослідження впливу малого огранення на характеристики контакту.

Нехай в ізотропній пружній об'ємній знаходиться отвір з малою некругlosti певного виду, в якому симетрично розташовано пружний диск, що має овальність. Взаєморозташування некруглих отвору і диска є таким, що виникатиме двообластевий контакт (рис. 1 — обидва

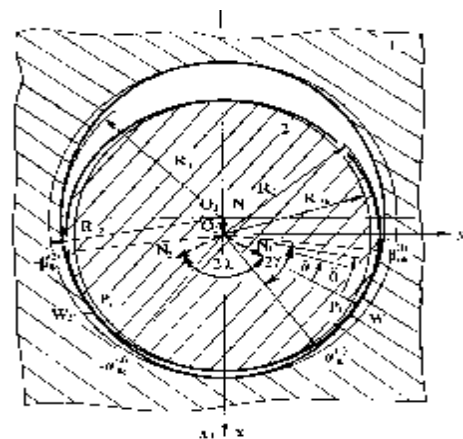


Рис. 1. Розрахункова схема спряження тіл з овальністю

елементи мають овальні контури та рис. 2 — де отвір в 1 є тригранним, а диск 2 — овальним). Приймається, що у спряженні існує радіальний зазор $\varepsilon = R_1 - R_2 > 0$.

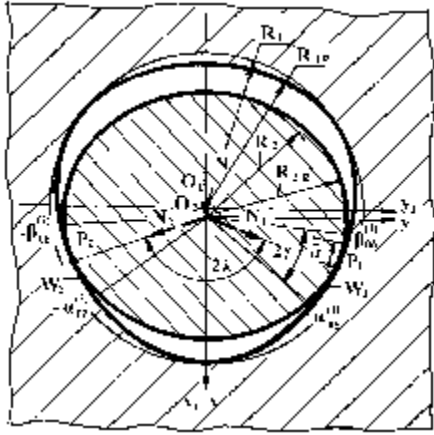


Рис. 2. Розрахункова схема спряження тіл з різним ограненням

Відхилення контурів спряжених тіл від некрутлості є набагато меншим від їхніх номінальних радіусів, тобто $\delta_k \ll R_k$ ($k=1; 2$ — нумерація тіл). Слід зазначити, що у машинобудуванні прийнято, що нециліндричність не повинна перевищувати величини половини поля допуску.

У результаті наявності огранення дотик контурів спряжених тіл відбуватиметься в двох точках P_1, P_2 що розташовані під кутом 2λ , який є невідомим. Радіальна сила N умовно прикладається в центрі O_2 диска, а в точках дотику виникають сили реакції $N_1 = N_2$, які обчислюються з трикутника сил, що знаходяться в статичній рівновазі, так:

$$N_1 = N_2 = N / 2 \cos \lambda. \quad (1)$$

При силевій взаємодії диска з отвором в областях контакту $W_1 = W_2 = 2R_2\gamma$ виникають контактні тиски $p(\theta, \delta)$, величина і розподіл яких по області контакту є невідомими.

Першим етапом розв'язання сформульованої задачі є визначення величини кута дотику λ . З цією метою слід використати умову, що в точці (точках) дотику координати контурів повинні бути однаковими.

Параметричне рівняння ограненого отвору в системі координат $x_1 O_1 y_1$ має вигляд

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,5(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t, \\ y_1 &= 0,5(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\bar{a}_1 = (a_1 + b_1)$; $\bar{b}_1 = (a_1 - b_1) = \delta_1$ — огранення (некрутлість) отвору; $2t$ — кут дотику контурів у цій системі координат; $a_1 = R_1$ — максимальний радіус отвору; $b_1 = R_1'$ — його мінімальний радіус; $\omega = 2, 3, 4, \dots$ — показник виду контуру ($\omega = 2$ — овал, $\omega = 3$ — тригранник; $\omega = 4$ — чотиригранник і т. д.).

Параметричне рівняння овального диска:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0,5(\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda + \Delta, \\ y_2 &= 0,5(\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\bar{a}_2 = (a_2 + b_2)$; $\bar{b}_2 = (a_2 - b_2) = \delta_2$ — збурення (некрутлість) диска; $a_2 = R_2'$ — максимальний радіус диска; $b_2 = R_2$ — його мінімальний радіус; $\Delta = O_1 O_2$ (див. рис. 1).

Умова контакту контурів у точці (точках) їхнього дотику:

$$\begin{aligned} (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t &= (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda + 2\Delta, \\ (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t &= (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Кутові коефіцієнти дотичної в цій точці:
— до отвору з ограненням

$$K_1 = \frac{y_1'(t)}{x_1'(t)} =$$

$$= \frac{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t}{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t}; \quad (5)$$

— до диска з овальністю

$$K_2 = \frac{y_2'(\lambda)}{x_2'(\lambda)} =$$

$$= \frac{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \sin \lambda + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda}{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \cos \lambda - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda}. \quad (6)$$

У точці дотику $K_1 = K_2$, тому умова дотику має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t}{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t} &= \\ = \frac{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \sin \lambda + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda}{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \cos \lambda - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda}. \end{aligned} \quad (7)$$

Друге рівняння з (4) та рівняння (7) утворюють систему для знаходження t і λ :

$$\begin{aligned} (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda &= (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t, \\ \frac{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t}{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t} &= \\ = \frac{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \sin \lambda + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda}{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \cos \lambda - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda}. \end{aligned} \quad (8)$$

З першого рівняння (8)

$$\bar{a}_2 \sin \lambda - \bar{b}_2 (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) \sin \lambda = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t.$$

Враховуючи, що $\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda = (1 - 2 \sin^2 \lambda)$, отримаємо

$$\sin^3 \lambda + \frac{\bar{a}_2 - \bar{b}_2}{2\bar{b}_2} \sin \lambda - \frac{1}{2\bar{b}_2} (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t = 0. \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) отримаємо за формулою Кардано

$$\sin \lambda = S(t) = X(t) - \frac{\bar{a}_2 - \bar{b}_2}{6\bar{b}_2 X(t)}. \quad (10)$$

$$\text{де } X(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{4\bar{b}_2} (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t + \frac{1}{4\bar{b}_2} \times \sqrt{\left(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t\right)^2 \sin^2 t + \frac{2}{\bar{b}_2} \left(\frac{\bar{a}_2 - \bar{b}_2}{3}\right)^3}}.$$

З першого рівняння системи (8)

$$\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t / \sin \lambda. \quad (11)$$

Після підстановки цього виразу у друге рівняння системи (8) отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \sin t + (\bar{a}_2 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t}{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t} = \\ & \frac{4\bar{b}_2 \sin^2 \lambda \cos \lambda + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \frac{\sin t}{\cos \lambda} \cos \lambda}{4\bar{b}_2 \sin \lambda \cos^2 \lambda - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t} = \\ & \frac{4\bar{b}_2 \sin^2 \lambda \sqrt{1 - \sin^2 \lambda} + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \frac{\sin t}{\sin \lambda} \sqrt{1 - \sin^2 \lambda}}{4\bar{b}_2 \sin \lambda (\sqrt{1 - \sin^2 \lambda})^2 - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t}. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляємо у (12) $\sin \lambda$ з (10), запишемо

$$\begin{aligned} & \frac{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t}{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t} = \\ & \frac{4\bar{b}_2 S^3 \sqrt{1 - S^2} + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sqrt{1 - S^2}}{4\bar{b}_2 S^2 [(1 - S^2)] - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t}. \end{aligned} \quad (13)$$

Зведенням виразу (13) до спільного знаменника, отримано рівняння для встановлення параметра t у системі координат $x_1 O_1 y_1$, що визначає точку дотику:

$$f(t) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{де } f(t) = & \sqrt{1 - S^2} \left[4\bar{b}_2 S^3 + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t \right] \times \\ & \times \left[\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \cos t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t \right] - \\ & - S \left[4\bar{b}_2 S (1 - S^2) - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \sin t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1) \cos \omega t \cos t \right].$$

Розв'язок цього рівняння для визначення $S = S(t)$ проводиться наближено. Кут λ початкового співдотику знаходиться так:

$$\lambda = \arcsin S(t). \quad (15)$$

Наступним етапом є визначення характеристик контакту. Загальне рівняння цієї контактної задачі у випадку двообластного контакту (див. рис. 1, рис. 2) подано в [1,2]:

$$\begin{aligned} & k_1 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \text{ctg} \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{2} p'(\mathcal{E}, \delta) d\mathcal{E} - \\ & - k_3 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} p(\mathcal{E}, \delta) d\mathcal{E} - k_4 \cos \mathcal{E} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} p(\mathcal{E}, \delta) \cos \mathcal{E} d\mathcal{E} = \\ & = -\frac{\varepsilon}{R^2} \left[1 - \frac{\delta_1}{2\varepsilon} D_1^{(\omega)}(\alpha) - \frac{\delta_2}{2\varepsilon} D_2^{(\omega)}(\alpha) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathcal{E} = \lambda + \alpha, \quad \mathcal{E}' = \lambda + \theta, \quad 0 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}', \quad 0 \leq \mathcal{E}' \leq \gamma, \quad \gamma_1 \leq \mathcal{E} \leq \gamma_2,$$

$\gamma_{1,2} = \lambda \pm 0,5 \left(\beta_{0\delta}^{(1)} - \alpha_{0\delta}^{(1)} \right)$; $D_1^{(\omega)}(\alpha)$, $D_2^{(\omega)}(\alpha)$ — характеристики огранення контурів; G, μ — модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалів;

$$k_1 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1 + \kappa_1}{G_1 R_1} + \frac{1 + \kappa_2}{G_2 R_2} \right), \quad k_3 = \frac{1 + \kappa_1}{8\pi G_1 R_1},$$

$$k_4 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\kappa_1}{G_1 R_1} + \frac{1}{G_2 R_2} \right), \quad \kappa = 3 - 4\mu;$$

Для овального отвору й овального диска ($\omega = 2$) $D_1^{(2)} = D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$; для тригранного отвору ($\omega = 3$) $D_1^{(3)} = 1 + 8 \cos 3\alpha$; для чотиригранного отвору ($\omega = 4$) $D_1^{(4)} = 1 + 15 \cos 4\alpha$.

Для наближеного розв'язку задачі використаємо метод колокації [1]. Відповідно функцію контактної тиску вибираємо для однієї точки колокації $\mathcal{E} = 0,5\gamma$ у вигляді

$$p(\mathcal{E}, \delta) \approx E_\delta \varepsilon_\delta \sqrt{t g^2 \frac{\gamma}{2} - t g^2 \frac{\mathcal{E} - \lambda}{2}}, \quad (17)$$

де

$$E_\delta = e_4 \cos^2(\gamma/4) / R_2, \quad (18)$$

$$\varepsilon_\delta = \varepsilon \Sigma_\delta, \quad \Sigma_\delta = 1 - \frac{\delta_1}{2\varepsilon} D_1(\alpha) - \frac{\delta_2}{2\varepsilon} D_2(\alpha), \quad (19)$$

$$e_4 = 4E_1 E_2, \quad Z = (1 + \kappa_1)(1 + \mu_1) E_2 + (1 + \kappa_2)(1 + \mu_2) E_1,$$

$E_1, E_2 = 2G(1 + \mu)$ — модулі пружності матеріалів.

Півкут контакту γ обчислюємо з умови

$$N_1 = N_2 = 4\pi R_2 E_\delta \varepsilon_\delta \sin^2 \frac{\gamma}{4}. \quad (20)$$

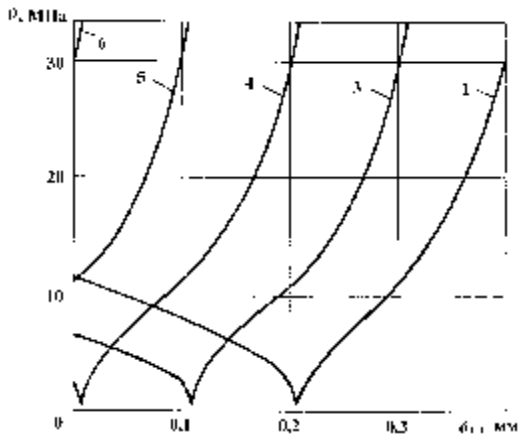


Рис. 3. Залежність максимальних контактних тисків від величин овальності отвору і диска: 1 - $d_2 = 0$; 3 - $d_2 = 0,1$ мм; 4 - $d_2 = 0,2$ мм; 5 - $d_2 = 0,3$ мм; 6 - $d_2 = 0,4$ мм

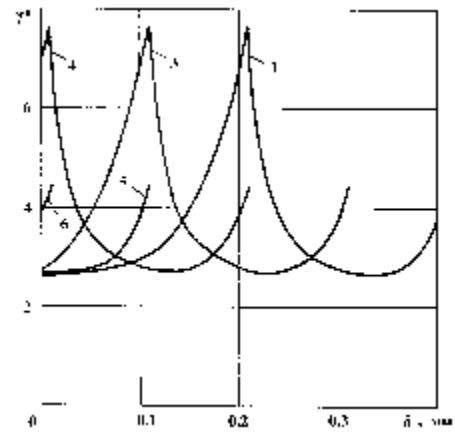


Рис. 6. Залежність півкута контакту від величин овальності отвору і диска

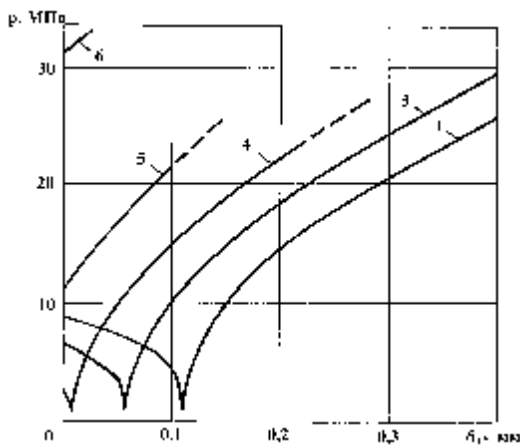


Рис. 4. Залежність максимальних контактних тисків від величин тригранності отвору і овальності диска

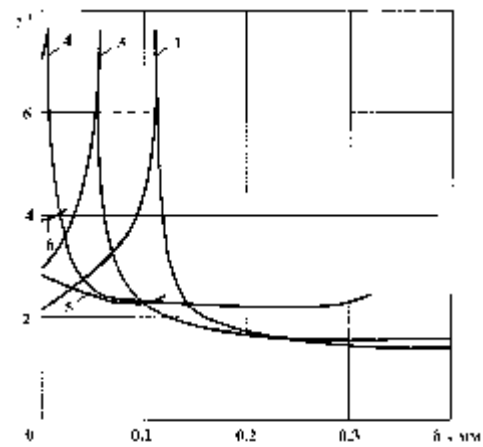


Рис. 7. Залежність півкута контакту від величин тригранності отвору і овальності диска

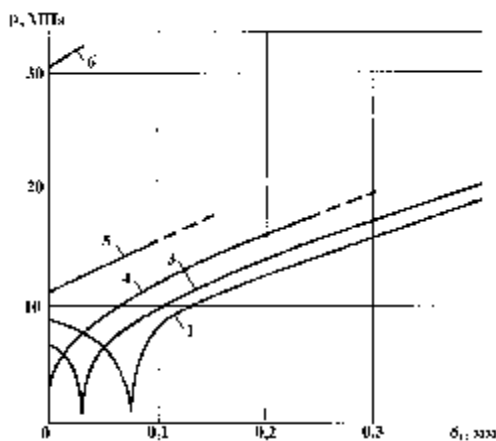


Рис. 5. Залежність максимальних контактних тисків від величин чотиригранності отвору і овальності диска

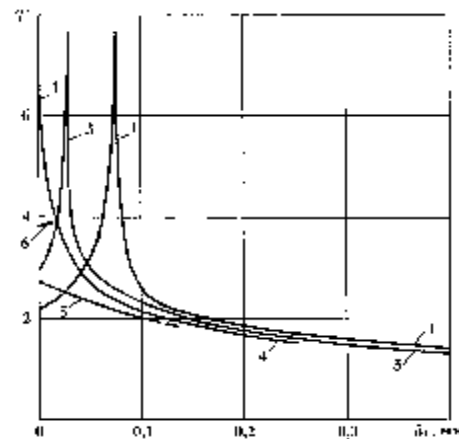


Рис. 8. Залежність півкута контакту від величини чотиригранності отвору і овальності диска

Числовий розв'язок задачі. Його проведено за таких вихідних даних: $N = 0,01; 0,1; 1,0$ МН; $R = 0,025; 0,05; 0,1$ м; $\varepsilon = (0,11; 0,21; 0,31; 0,41; 0,51) \cdot 10^{-3}$ м; $\delta_1 = (0; 0,1;$

$0,2; 0,3; 0,4; 0,5) \cdot 10^{-3}$ м, $\delta_2 = (0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5) \cdot 10^{-3}$ м, $\delta_1 + \delta_2 \leq \varepsilon$; $E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$; $R = R_2 = b_2$, $a_2 = b_2 + \delta_2$, $R_1 = R_2 + \varepsilon$, $a_1 = R_1$, $b_1 = a_1 - \delta_1$.

Результати розв'язання задачі подані графічно для $N = 0,1$ МН, $R = 0,1$ м, $\varepsilon = 0,41 \cdot 10^{-3}$ м у вигляді залежностей $p(\lambda, \delta) \square \delta_1$, $\gamma \square \delta_1$ на рис. 3 — рис. 8.

Аналіз отриманих результатів свідчить, що мала некруглість різного виду отворів у циліндричному спряженні з овальним диском істотно впливає на параметри контакту. Виявлено, що, у залежності від величини збурень δ_1 і δ_2 контурів, може існувати однообластевий (ліві вітки кривих) чи двообластевий (праві вітки кривих) контакт. Спостерігається при переході від однообластєвого до двообластєвого контакту мінімум контактних тисків та, відповідно, максимум кутів контакту 2γ . Характер зміни контактних тисків є якісно подібним за винятком значень $\delta_1 + \delta_2 \approx \varepsilon$. У цьому випадку для спряження елементів з овальністю (див. рис. 3) спостерігається значне зростання контактних тисків. Для комбінованих спряжень з тригранністю і чотиригранністю (див. рис. 4, рис. 5) цього не спостерігається.

Література

1. Андрейкив А.С., Чернец М.В. Методы оценки контактного взаимодействия трущихся деталей машин. — К.: Наук. думка, 1991. — 160 с.
2. Чернец М., Пашечко М., Невчас А. Методы прогнозирования та підвищення зносостійкості триботех-

нічних систем ковзання. — Т. 1. — Дрогобич: КОЛО, 2001. — 492 с.

3. Чернец М. Узагальнений метод дослідження контактної взаємодії циліндричних спряжень, контури елементів яких мають малу некруглість // Проблеми трибології. — №2. — 2000. — С. 97—113.

4. Чернец М., Лебедева Н. Оцінка впливу малої овальності вала на характеристики контактної взаємодії у підшипнику ковзання // Проблеми трибології. — №1. — 2005. — С. 167—170.

5. Чернец М., Лебедева Н. До питання про варіацію контактних тисків у підшипнику ковзання при наявності овальності його деталей // Проблеми трибології. — №2. — 2005. — С. 81—85.

Отримана 18.12.07

M. Chernets, N. Lyebedyeva*

Generalized method of solution of contact problem for cylindrical conjugation of solids with small contours' lobing, in biarea contact.

Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, Ukraine;
Lublin Polytechnic Institute, Lublin, Poland;

* Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, Ukraine

The generalized method of solution of contact problem for cylindrical conjugation of solids with small contours' lobing (ovality, trihedration, tetrahedration) is presented. The lobing influence on the characteristics of contact interaction is examined and the peculiarities of this influence are established.

21 01 01 2008

EUROMECH — European Mechanics Society

SIXTH EUROMECH NONLINEAR DYNAMICS CONFERENCE

June 30 — July 4, 2008, Saint Petersburg, RUSSIA

SCOPE OF THE CONFERENCE

Nonlinear dynamics of continuous, discontinuous and hybrid systems.

Qualitative and quantitative analysis of nonlinear dynamic systems.

Analysis of bifurcations and chaos.

Numerical and geometrical methods in nonlinear dynamics.

Phenomena and criteria of chaotic oscillations.

Computer aided symbolic methods in dynamics.

Control of oscillations and chaos.

Experimental methods in nonlinear dynamics. Applications in mechanical engineering, electrical engineering, physics, biology, chemistry and other sciences.

ADDRESS OF ORGANIZING COMMITTEE

Prof. Alexander Fradkov

The Institute for Problems of Mechanical Engineering
61 Bolshoy ave. V.O., 199178, St. Petersburg, RUSSIA
Phone: +7 (812) 321-4766, Fax: +7 (812) 321-4771

Email: enoc08@physcon.ru

<http://conf.physcon.ru/enoc08/>