УДК 539.3

Л. Курпа

Професор, д-р техн. наук

О. Мазур

Інженер

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ ПЛАНУ

Çardîrîrîrî taarî 1 adra arne³aæariyî rae³r⁴ered radal adde÷red ereeaaru reander neeaari_î dîdî e. Dîçdî aeare r³ad³a aaço^oduny ra aeeîdendari³ daîd³; R-ddrede da aad³ad³erede 1 adra³a. Ça arrin taîb radaaaritaî 1 adrad Tradataar³ taeand³ aerai ³÷rî; rand³eeînd³ da arredo arredo r³ dadaedadende e aey reander neeaari; dîdî e ç d³çrêi e adarê÷rei e dî raal e.

параметричні коливання, пластина, метод R-функцій

У статті запропоновано метод дослідження коливань пластин складної форми, що знаходяться під впливом періодичних зусиль у серединній площині. Особливістю розглянутих коливань є те, що при певних співвідношеннях між частотою навантаження та власною частотою коливань у системі може виникати резонанс.

Питання дослідження параметричних коливань заслуговує на особливу увагу, оскільки виникнення резонансних коливань може призвести до порушення цілісності конструкції. Розв'язання цієї задачі в областях складної форми є актуальним, бо багато складових сучасних конструкцій моделюються пластинами складної форми плану.

Дослідженню цієї проблематики присвячена достатня кількість публікацій [1, 3, 5, 10 — 12] та ін. У цих працях досліджені області динамічної нестійкості пластин, при цьому було використано принцип, сформульований у монографії Болотіна В.В. [1], виходячи з якого, для розв'язання цієї задачі досить скористатися лінійною теорією та звести задачу до розв'язання рівняння Матьє-Хіла [2, 6, 7]. У випадку нелінійних коливань були побудовані й досліджені на стійкість залежності амплітуди від частоти навантаження. Для розв'язання цих задач було використано різні методи, а саме: метод тригонометричних рядів, метод малого параметра, асимптотичний метод Крилова-Боголюбова та ін. [4].

Варто зазначити, що розглянуте питання достатньо досліджене лише для пластин канонічної форми при

деяких видах граничних умов. Що стосується пластин складної форми, то при розв'язанні розглянутої задачі виникають складності математичного характеру. Це пов'язано з проблемою побудови системи базисних функцій.

У статті запропоновано алгоритм дослідження коливань пластин складної форми плану з різними умовами закріплення країв. За допомогою запропонованого методу побудовані області динамічної нестійкості, досліджені нелінійні сталі коливання системи після втрати стійкості для пластин складної геометрії. В основу запропонованого методу покладено використання варіаційних методів [8] у поєднанні з методом R-функцій [9].

Постановка задачі. Розглянемо коливання ізотропної пластини, сталої товщини h, що знаходиться під дією навантаження $p = p_0 + p_t \cos \theta t$ в серединній площині, де p_0 — стала складова навантаження, p_t — амплітуда змінної частини навантаження, θ — частота навантаження.

Рівняння руху пластини [3] мають такий вигляд:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$
$$D\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} N_x + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} T + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} N_y\right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

де μ — коефіцієнт Пуасона; N_x , N_y , T — зусилля в площині пластини, які визначаються так:

$$N_{x} = \frac{Eh}{1-\mu^{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^{2} + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^{2} \right) \right),$$

$$N_{y} = \frac{Eh}{1-\mu^{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^{2} + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^{2} \right) \right),$$

$$T = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Надалі використовуватимемо безрозмірну форму рівнянь, яку можна отримати за допомогою таких співвідношень:

$$\overline{x} = \frac{x}{a}, \ \overline{y} = \frac{y}{a}, \ \overline{w} = \frac{w}{h}, \ \overline{u} = \frac{ua}{h^2}, \ \overline{v} = \frac{va}{h^2},$$
$$\overline{p} = \frac{a^2 p}{Eh^3}, \ \overline{t} = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}t,$$

де *Е* — модуль пружності; *р* — густина матеріалу пластини.

Риски над безрозмірними величинами у подальшому відкинуті.

Граничні умови для функцій *u*, *v*, *w* залежать від типу закріплення пластини.

Початкові умови приймемо такими:

$$w_{/t=0} = w_0, w_{/t=0} = 0$$

Для розв'язання сформульованої задачі іноді зручно скористатися рівняннями руху в змішаній формі [3]:

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)}\nabla^4 w = L(w,\Phi) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$
 (1)

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w), \qquad (2)$$

де $\Phi(x, y)$ — функція зусиль, яка визначається за допомогою напружень σ_x , σ_y , τ за формулами:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x, \ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y, \ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \tau.$$

Нелінійні оператори $L(w, \Phi)$, L(w, w) визначали так:

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$
$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Метод розв'язування. Розглянемо математичну постановку задачі в змішаній формі (1) — (2). Прогин пластини подамо у вигляді

$$w = f(t)w_1(x, y), \tag{3}$$

де $w_1(x, y)$ — власна функція, яка відповідає першій формі лінійних коливань ненавантаженої пластини та задовольняє граничні умови для функції w. Функцію зусиль шукатимемо у вигляді

$$\Phi(x, y, t) = f^{2}(t)\Phi_{1}(x, y) + \Phi_{0}, \qquad (4)$$

де Φ_0 — розв'язок рівняння

$$\nabla^4 \Phi_0 = 0 ,$$

який на межі області задовольняє умову

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tau^2} = -p \,,$$

та інші граничні умови, які задовольняє Φ ; $\Phi_1(x, y)$ — розв'язок рівняння

$$\nabla^4 \Phi_1 = -\frac{1}{2} L(w_1, w_1),$$

яке доповнюється відповідними однорідними граничними умовами.

Підставляючи вирази (3), (4) у рівняння (1) — (2), отримуємо

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)}f(t)\nabla^4 w_1 = f(t)L(w_1, \Phi_0) + f^3(t)L(w_1, \Phi_1) - w_1f''.$$
(5)

Оскільки навантаження на пластину має вигляд

$$p = p_0 + p_t \cos \theta t ,$$

то функцію Φ_0 зручно подати так:

$$\Phi_0 = F_0 + F_t \cos \theta t , \qquad (6)$$

де F₀ та F_t розв'язки рівнянь

$$\nabla^4 F_0 = 0, \ \nabla^4 F_t = 0,$$

відповідно, які на межі задовольняють умови

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \tau^2} = -p_0 , \frac{\partial^2 F_t}{\partial \tau^2} = -p_t$$

та інші, які задовольняє функція зусиль Ф. Підставивши (6) у (5), отримуємо

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)}f(t)\nabla^4 w_1 = f(t)L(w_1, F_0) + \cos\theta t \cdot f(t)L(w_1, F_t) +$$

$$+ f^{3}(t)L(w_{1}, \Phi_{1}) - w_{1}f''.$$
⁽⁷⁾

Застосовуючи до (7) метод Бубнова-Гальоркіна, отримуємо диференціальне рівняння другого порядку

$$f''(t) + \omega_L^2 (1 - \alpha - \beta \cos \theta t) f(t) + \gamma f^3(t) = 0, \qquad (8)$$

де ω_L — частота лінійних коливань пластини; коефіцієнти α , β визначаються за формулами:

$$\alpha = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, F_0) w_1 d\Omega , \qquad (9)$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, F_t) w_1 d\Omega , \qquad (10)$$

$$\gamma = -\frac{1}{\left\|w_1\right\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, \Phi_1) w_1 d\Omega .$$

Перетворимо рівняння (8) до такого вигляду:

$$f_t'(t) + \Omega^2 (1 - 2k \cdot \cos(\theta t)) f(t) + \gamma f^3(t) = 0, \quad (11)$$

де $\Omega = \omega_L \sqrt{1 - \alpha}$ — частота власних коливань пластини, яка знаходиться під дією сталої складової навантаження

$$p_0; k = \frac{\beta}{2(1-\alpha)}$$
 — коефіцієнт збудження.

Рівняння (11) має періодичні коефіцієнти.

3. Області динамічної нестійкості. Для знаходження областей нестійкості скористаємося лінійною теорією. Якщо покласти коефіцієнт $\gamma = 0$, то рівняння (11) буде описувати малі коливання пластини:

$$f''_t(t) + \Omega^2 (1 - 2k \cdot \cos(\theta t)) f(t) = 0.$$
 (12)

Рівняння (12) — це рівняння Матье, дослідженню якого присвячена велика кількість літератури, наприклад [1, 10]. Розв'язки цього рівняння можуть бути або обмеженими, або необмежено зростаючими. Області стійких і нестійких розв'язків відокремлюють періодичні розв'язки з періодами *T* та 2*T*. Два розв'язки однакового періоду обмежують області нестійкості (лежать поблизу частот $\theta = 2\Omega/r$, r = 1, 2, 3, ...), два розв'язки з різними періодами — області стійких розв'язків. Рівняння меж області, що відокремлює стійкі та нестійкі розв'язки, відомі. Отже, рівняння кривих, що обмежують першу область нестійкості

$$2\Omega\sqrt{1-k} \le \theta \le 2\Omega\sqrt{1+k} \ . \tag{13}$$

Для кожного навантаження $p = p_0 + p_t \cos \theta t$ можна обчислити критичні частоти:

$$\theta_1 = 2\Omega\sqrt{1-k}$$
, $\theta_2 = 2\Omega\sqrt{1+k}$. (14)

Зазначимо, що навіть за малих значень коефіцієнта збудження при певних співвідношеннях частот можуть виникати коливання з необмежено зростаючими амплітудами. **4. Нелінійні коливання пластини.** Розглянемо рівняння (11), яке модулює нелінійні коливання пластин. Подамо розв'язок рівняння у вигляді

$$f(t) = a\sin\frac{\theta t}{2} + b\cos\frac{\theta t}{2}.$$
 (15)

Підставляючи (15) у (8) та прирівнюючи коефіцієнти при $sin(\theta t/2)$ і $cos(\theta t/2)$, знаходимо формули для обчислення амплітуд коливань [1]:

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\beta}} \sqrt{\frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 1 \pm k} , \qquad (16)$$

де $A = a^2 + b^2$.

5. Розв'язування задачі про власні коливання пластини у випадку складної геометрії. Математична постановка задачі про власні коливання пластини має такий вигляд:

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)}\nabla^4 w_1 = \omega_L^2 w_1.$$
 (17)

Диференціальне рівняння (17) доповнено граничними умовами для прогину.

Варіаційна постановка задачі зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$J_{2}(w_{1}) = \iint_{\Omega} \left[(\Delta w_{1})^{2} - 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^{2} w_{1}}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2} w_{1}}{\partial y^{2}} - \left(\frac{\partial^{2} w_{1}}{\partial x \partial y} \right)^{2} \right] - 12(1 - \mu^{2}) \omega_{L}^{2} w_{1}^{2} \right] d\Omega .$$
(18)

Мінімізуюча послідовність для функціонала (18) побудована за допомогою методу R-функцій [9]. Цей метод дає можливість будувати структури розв'язку, точно задовольняючи всі або тільки головні граничні умови для довільної форми пластини.

6. Знаходження функції $\Phi_1(x, y)$ у випадку складної геометрії. Для визначення функції $\Phi_1(x, y)$ потрібно розв'язати рівняння

$$\nabla^4 \Phi_1 = -\frac{1}{2} L(w_1, w_1)$$

з відповідними граничними умовами.

Варіаційна постановка цієї задачі полягає в знаходженні мінімуму функціонала

$$J_{2}(\Phi_{1}) = \iint_{\Omega} \left[(\Delta \Phi_{1})^{2} - 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^{2} \Phi_{1}}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2} \Phi_{1}}{\partial y^{2}} - \left(\frac{\partial^{2} \Phi_{1}}{\partial x \partial y} \right)^{2} \right] + L(w_{1}, w_{1}) \Phi_{1} \right] d\Omega.$$
(19)

Побудова системи координатних функцій, на множині яких шукається мінімум функціонала (19), також виконується за допомогою методу R-функцій [9].

7. Порівняння результатів. Розглянемо пластину прямокутного плану навантажену вздовж осі *ОХ* (рис. 1).

Граничні умови для функції прогину розглянуто такі:

$$w = 0$$
, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$,

а для функції зусиль —

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$
, $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} = 0$

У цьому випадку функція Φ_0 відома і має вигляд

$$\Phi_0 = -p \frac{y^2}{2}.$$

Формули (9), (10) для обчислення коефіцієнтів α, β істотно спростяться:

$$\alpha = -\frac{p_0}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} w_1 d\Omega, \qquad (20)$$

$$\beta = -\frac{p_t}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} w_1 d\Omega .$$
 (21)

Відповідно для функції *w*₁ та Ф₁ граничні умови матимуть вигляд:

$$w_1 = 0, \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial n^3} = 0.$$
 (23)

Структура розв'язку для w_1 та
 Φ_1 була побудована у вигляді [9]

$$w_1 = \omega P \,, \tag{24}$$

$$\Phi_1 = P_1 - \omega \cdot D_1 P_2, \qquad (25)$$

де *P*, *P*₁, *P*₂ — невизначені компоненти, при довільному виборі яких виконуватимуться головні граничні умови



Рис. 1. Форма пластини

(22); $\omega(x, y) = 0$ — нормалізоване рівняння межі всієї області Ω , тобто функція $\omega(x, y)$ задовольняє умови:

$$\omega(x, y) = 0, \ (x, y) \in \partial\Omega, \ \omega(x, y) > 0, \ (x, y) \in \Omega,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = 1, \ (x, y) \in \partial\Omega.$$

Оператор D₁ визначений так:

. .

$$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Невизначені компоненти подамо у вигляді розвинення у ряд за деякою повною системою функцій, тобто:

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i , P_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i , P_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i ,$$

де ϕ_i , $\psi_i \phi_i$ — повні послідовності функцій.

У табл. 1 наведено значення частоти лінійних коливань пластини, що знаходиться під впливом сталої складової навантаження p_0 для різних значень геометричних параметрів пластини (a,b). При цьому зауважимо, що при навантаженні $p_0 = 0$ отримуємо власну частоту коливань ω_L . Для порівняння в табл. 1 також подані результати, отримані в [3].

Для заданого навантаження розраховані значення коефіцієнта γ , що стоїть при нелінійному члені в рівнянні (11) для розглянутих випадків: $a/b=1 - \gamma = 12.23$, $a/b=2 - \gamma = 103.40$. У статті [3] значення відповідних коефіцієнтів були такими: $\gamma = 12.18$, $\gamma = 103.50$.

Аналіз результатів підтверджує вірогідність запропонованого методу.

Таблиця 1

Значення частоти W залежно від навантаження для квадратної пластини

b/a=1		p_0				
		0	0.5	1	1.5	
Ω	RFM	5.98	5.55	5.08	4.57	
	[3]	5.97	5.54	5.08	4.57	
<i>b/a</i> = 1		p_0				
		2	2.5	3	3.5	
Ω	RFM	4.00	3.32	2.47	1.08	
	[3]	3.99	3.32	2.46	1.07	
<i>b</i> / <i>a</i> = 0.5		P_0				
		0	2	4	6	
Ω	RFM	14.93	14.26	13.55	12.80	
	[3]	14.93	14.26	13.55	12.80	
<i>b</i> / <i>a</i> = 0.5		p_0				
		8	10	12	14	
Ω	RFM	12.00	11.15	10.23	9.22	
	[3]	12.00	11.15	10.23	9.21	

8. Дослідження пластин складної геометрії. Розглянемо пластину складної форми плану (мал. 2), при b/a=1, $\mu = 0.3$, E=1, навантажену вдовж осі OX.

Для цієї пластини було розглянуто два види граничних умов:

1)
$$w = 0$$
, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} = 0$;
2) $w = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$, $\Phi = \Phi_0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$.

Функцію Φ_0 , як і у випадку квадратної пластини, подамо у вигляді

$$\Phi_0 = -p \frac{y^2}{2}.$$

Відповідно для функції w_1 та Φ_1 граничні умови матимуть вигляд:

1)
$$w_1 = 0$$
, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0$, (26)

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2} = 0 , \quad \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial n^3} = 0 ; \qquad (27)$$

2)
$$w_1 = 0$$
, $\Phi_1 = 0$, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0$, (28)

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2} = 0.$$
 (29)

Структура розв'язку, що задовольняє головні граничні умови (26), для першого виду умов має вигляд (24), (25), для другого — структура розв'язку, що задовольняє головні граничні умови (28), побудована так:

$$w_1 = \omega P$$
, $\Phi_1 = \omega^2 P_1$,

де P, P_1 — невизначені компоненти, $\omega(x, y) = 0$ нормалізоване рівняння межі всієї області Ω . Побудова функції $\omega(x, y) = 0$ виконана засобами теорії R-функцій [9]. Для цієї задачі така функція має вигляд

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4), \qquad (30)$$

де f_1, f_2, f_3, f_4 — рівняння опорних областей, а саме:



Рис. 2. Форма пластини

$$f_1 = \frac{1}{2a} (a^2 - x^2), \quad f_2 = \frac{1}{2b} (b^2 - y^2), \quad f_3 = \frac{1}{2c} (c^2 - x^2),$$
$$f_4 = c - y.$$

У формулі (30) використані *R*-операції, які визначаються так [9]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$$
, $x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Спочатку розглянемо лінійну задачу. Слід зазначити, що значення частот ω_L , Ω , а також значення критичних частот θ_1 та θ_2 не залежать від граничних умов, накладених на функцію зусиль. Це пов'язано з тим, що пластина має однорідний докритичний стан, тому коефіцієнти α та β , обчислені за формулами (20), (21), мають однакові значення для двох видів умов.

Згідно з описаним у статті алгоритмом були розраховані значення лінійної частоти ω_L та значення коефіцієнта γ для різних величин вирізів (табл. 2). У табл. 2 також подані значення частот Ω для різних значень сталої складової навантаження.

Аналіз результатів розрахунків показує, що зі зменшенням вирізів, тобто при виродженні форми пластини у квадратну, значення частот і коефіцієнта γ наближаються до відповідних значень, отриманих для квадратної пластини (табл. 1), що підтверджує справедливість розглянутого методу. Дані табл. 2 також дають змогу проаналізувати вплив сталої складової навантаження на частоту коливань пластини. Зі збільшенням p_0 значення частоти зменшується.

На рис. З подані області динамічної нестійкості розглянутих пластин під дією навантаження $p = 1 + \cos \theta t$.

Нескладно помітити, що зі зменшенням вирізів головна область динамічної нестійкості зміщується вбік менших значень частоти θ .

Таблиця 2

Значення частот ϖ_L , $\Omega\,$, коефіцієнта $\gamma\,$ залежно від форми пластини

c/a	ω,	γ		Ω			
		I вид умов	II вид умов	$p_0 = 0.5$	<i>p</i> ₀ =1		
0.3	8.22	16.92	9.80	7.90	7.57		
0.35	7.25	14.03	8.56	6.89	6.51		
0.4	6.53	12.69	7.50	6.13	5.71		
0.45	6.10	12.39	6.63	5.68	5.23		
c/a	Ω						
	$p_0 = 1.5$	$p_0 = 2$	$p_0 = 2.5$	$p_0 = 3$	$p_0 = 3.5$		
0.3	7.22	6.85	6.47	6.05	5.61		
0.35	6.10	5.67	5.20	4.68	4.10		
0.4	5.26	4.76	4.20	3.55	2.76		
0.45	4.73	4.18	3.54	2.75	1.62		



Рис. 4. АЧХ пластини за різних розмірів вирізів: а — 1-й вид умов; б — 2-й вид умов

Розглянемо поведінку пластини в зоні головного параметричного резонансу $\theta \approx 2\Omega$ у випадку нелінійних коливань. Для розглянутої пластини побудуємо амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) за формулою (16) для різних розмірів вирізу й різних навантажень. На рис. 4 подані АЧХ для різних розмірів вирізу під дією навантаження $p = 1 + \cos \theta t$. На рис. 5 зображені АЧХ при різних навантаженнях пластини (c/a = 0.3), а саме: при $p_0 = 1$, $p_t = 0.5$, 1, 1.5, 2.



Рис. 5. АЧХ пластини за різних навантажень: а — 1-й вид умов; б — 2-й вид умов

Висновки. У статті наведено метод дослідження параметричних коливань пластин, що базується на використанні варіаційних методів та методу R-функцій.

Це дає змогу застосовувати запропонований підхід до пластин складної форми плану з різними видами закріплення.

За допомогою розробленого алгоритму побудовані області динамічної нестійкості та амплітудно-частотні характеристики для пластин складної форми, досліджена поведінка пластин у залежності від форми, навантаження та граничних умов. Наведені порівняння результатів з відомими в літературі свідчать про вірогідність та ефективність запропонованого підходу.

Література

1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем — М: Гостехиздат, 1956. — 600 с.

2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.

3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. — М.: Наука, 1972. — 432 с.

4. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С.* Нелинейные задачи колебаний тонких (обзор) // Прикладная механика. — 1998. — 34. — С. 3—31.

5. *Мазур О. С.* Определение областей динамической неустойчивости для пластин сложной геометрии // Вестник национального технического университета «ХПИ». — 2006. — 32. — С. 112—118.

6. *Мак-Лахлан Н.* Теория и приложения функций Матье. — М.: Иностр. лит., 1953. — 475 с.

7. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостех. издат., 1965. — 491с.

8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

9. *Рвачев В. Л., Курпа Л. В.* R-функции в задачах теории пластин. — К.: Наук. думка, 1987. — 175 с.

10. Шмидт Г. Параметрические колебания. — М.: Мир. 1978. — 336с.

11. *Awrejcewicz J., Krys'ko A.* V. Analysis of complex parametric vibrations of plates and shells using Bubnov-Galerkin approach // Applied Mechanics. — 2003. — 73. — P. 495—504.

12. *Hutt J.M.* Dynamic stability of plates by finite elements // Journal of the Engineering mechanics division. — 1971. — P. 879—890.

Отримана 23.05.07

L. Kurpa, O. Mazur Parametric vibrations of plates with complex form National Technical University "KPI", Kharkiv

The method of parametric vibration research of plates with complex form. The proposed approach is based on application Rfunction method and variational one. The domain of dynamic instability, amplitude- frequency characteristics for plates with complex form and different boundary conditions are obtained.

²í ôî ðì àö³ÿ

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача Національна академія наук України Львівський національний університет імені Івана Франка Українське товариство з механіки руйнування матеріалів

Міжнародна наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ

присвячена 80-річчю від дня народження академіка НАН України *Ярослава Степановича Підстригача* та 30-річчю заснованого ним Інституту прикладних проблем механіки і математики 25 — 29 травня 2008 р.

Тематика конференції:

Математичне моделювання в механіці деформівних твердих тіл. Математичні методи механіки і термомеханіки. Механіка неоднорідних твердих тіл та наномеханіка. Механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями. Динамічні задачі механіки неоднорідних структур. Біомеханіка. Оптимізація і проектування тонкостінних конструкцій. Міцність та втома матеріалів. Числові методи. Теорія функцій і функціональний аналіз. Диференціальні рівняння і математична фізика. Алгебра і топологія.

Адреса оргкомітету:

ІППММ НАНУ, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, Україна, тел.: (0322) 63-53-70, 239-99-12, 239-99-87, 63-90-33 E-mail: <u>conference@iapmm.lviv.ua</u> <u>confmath@iapmm.lviv.ua</u>

Додаткова інформація в Інтернеті: <u>http://www.iapmm.lviv.ua</u>