

відомі припущення [4]. Тоді отримаємо такі основні рівняння і співвідношення.

Геометричні співвідношення, які пов'язують на серединній поверхні компоненти деформації $\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) з компонентами узагальнених переміщень u_i, γ_i є такими:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} + k_1 u_3, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} + k_2 u_3, \quad \varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}, \\ \varepsilon_{13} &= \gamma_1 + u_{3,1}, \quad \varepsilon_{23} = \gamma_2 + u_{3,2}, \quad \varepsilon_{33} = \gamma_3, \quad \alpha_{11} = \gamma_{1,1}, \\ \alpha_{22} &= \gamma_{2,2}, \quad \alpha_{12} = \gamma_{2,1} + \gamma_{1,2}, \quad \alpha_{13} = \gamma_{3,1}, \quad \alpha_{23} = \gamma_{3,2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Рівняння пружності для сил N_{ij} і моментів M_{ij} серединній поверхні запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{aligned} N &= A E + B K - N^t, \\ M &= B^* E + D K - M^t, \quad Q = k' G \Psi, \end{aligned} \quad (2)$$

де k' — коефіцієнт зсуву.

Матриці-стовпчики сил-моментів N, M, Q , компонентів деформації E, K, Ψ серединній поверхні оболонки, а також матриці жорсткості A, B, B^*, D, G і матриці температурних членів N^t, M^t мають вигляд:

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{33} \\ N_{12} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} N_{13} \\ N_{23} \\ M_{13} \\ M_{23} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{36} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{66} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{13} & B_{23} & B_{36} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix},$$

$$B^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{36} & B_{66} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} A_{44} & A_{45} & B_{44} & B_{45} \\ A_{45} & A_{55} & B_{45} & B_{55} \\ B_{44} & B_{45} & D_{44} & D_{45} \\ B_{45} & B_{55} & D_{45} & D_{55} \end{pmatrix}, \quad N^t = \begin{pmatrix} N_{11}^t \\ N_{22}^t \\ N_{33}^t \\ N_{12}^t \end{pmatrix}, \quad M^t = \begin{pmatrix} M_{11}^t \\ M_{22}^t \\ M_{12}^t \end{pmatrix}.$$

Тут

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h}^h c_{ij} \{1, z, z^2\} dz;$$

$$N_{ij}^t = A_{ij}^t T_1 + B_{ij}^t T_2 / h; \quad M_{ij}^t = B_{ij}^t T_1 + D_{ij}^t T_2 / h,$$

$$\text{де } \{A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t\} = \int_{-h}^h \beta_{ij}^t \{1, z, z^2\} dz; \quad T_n = \frac{2n-1}{2h^n} \int_{-h}^h t z^{n-1} dz$$

($n = 1, 2$); $c_{ij}(z)$ — коефіцієнти пружності анізотропного матеріалу; $\beta_{ij}^t(z) = c_{ij}(z) \alpha_{ij}^t(z)$ — коефіцієнти термопружності; $\alpha_{ij}^t(z)$ — коефіцієнти лінійного теплового розширення; $t(x_1, x_2, z, \tau)$ — приріст температури.

Рівняння руху:

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} + q_1 &= I_1 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_1 + I_2 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2, \\ N_{12,1} + N_{22,2} + q_2 &= I_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1 + I_2 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_2, \\ N_{13,1} + N_{23,2} - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} + q_3 &= I_1 \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_1 + I_2 \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_2, \\ M_{11,1} + M_{12,2} - N_{13} + m_1 &= I_2 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_1 + I_3 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2, \\ M_{12,1} + M_{22,2} - N_{23} + m_2 &= I_2 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1 + I_3 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_2, \\ M_{13,1} + M_{23,2} - N_{33} + m_3 &= I_2 \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_1 + I_3 \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $\{I_1, I_2, I_3\} = \int_{-h}^h \rho(z) \{1, z, z^2\} dz$ — моменти інерції;

$\rho(z)$ — густина матеріалу; q_i, m_i — компоненти зовнішнього поверхневого навантаження.

Інтегральні характеристики температури T_1, T_2 , що входять у рівняння стану (2), визначаються з відповідних рівнянь теплопровідності для розглянутих оболонок. При лінійному розподілі температури за товщиною стінки ці рівняння запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} P_{(1)}^2 T_1 + P_{(2)}^2 T_2 + 2k_0 \lambda_{33}^{(1)} T_2 / h - C^{(1)} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_1 - C^{(2)} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_2 + W_1^t &= F_{(1)}, \\ P_{(2)}^2 T_1 + P_{(3)}^2 T_2 - \lambda_{33}^{(1)} T_2 / h^2 + 2k_0 \lambda_{33}^{(2)} T_2 / h - C^{(2)} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_1 - \\ - C^{(3)} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_2 + W_2^t &= F_{(2)}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $P_{(k)}^2 = \lambda_{11}^{(k)} ()_{,11} + \lambda_{22}^{(k)} ()_{,22} + 2\lambda_{12}^{(k)} ()_{,12}$ — диференціальні оператори;

$$\{W_k^t, \lambda_{ij}^{(k)}, C^{(k)}\} = \int_{-h}^h \left\{ w^t, \lambda_{ij}, c_{\varepsilon} \left(\frac{z}{h} \right) \right\}^{k-1} dz \quad (k = 1, 2, 3) —$$

інтегральні характеристики відповідно джерел тепла $w^t(x_1, x_2, z, \tau)$, тензора теплопровідності $\lambda_{ij}(z)$ і теплоємності $c_{\varepsilon}(z)$; $k_0 = (k_1 + k_2) / 2$ — середня кривина; $F_{(n)}$ ($n = 1, 2$) — функції, що залежать від граничних умов на поверхнях $z = \pm h$.

Так, у випадку притоку тепла вони мають вигляд

$$F_{(n)} = - \left[\lambda_{33} \frac{\partial t}{\partial z}(h) + (-1)^n \lambda_{33} \frac{\partial t}{\partial z}(-h) \right] \quad (n = 1, 2).$$

У випадку конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою t_c^{\pm} і з коефіцієнтами тепловіддачі α_{\pm}^{\pm} на поверхнях $z = \pm h$, маємо

$$F_{(n)} = (T_1 - t_1^c) \varepsilon_n^t + (T_2 - t_2^c) \varepsilon_{3-n}^t \quad (n = 1, 2),$$

$$\text{де } \varepsilon_n^t = (\alpha_z^+ - (-1)^n \alpha_z^-), \quad t_n^c = \frac{1}{2} (t_c^+ - (-1)^n t_c^-).$$

Рівняння теплопровідності (4) разом з рівняннями руху (3), фізичними (2) і геометричними (1) співвідношеннями складають повну систему рівнянь теорії температурних напружень неоднорідних анізотропних пологих оболонок. Для однозначності розв'язку цієї системи на краях оболонки потрібно задати відповідні механічні і температурні граничні умови. Для механічних умов задається по одній величині з кожної пари (N_{11}, u_1) , (N_{12}, u_2) , (N_{13}, u_3) , (M_{11}, γ_1) , (M_{12}, γ_2) , (M_{13}, γ_3) при $x_1 = 0$, $x_1 = a_1$, і по одній величині з кожної пари (N_{22}, u_2) , (N_{23}, u_3) , (M_{22}, γ_2) , (M_{23}, γ_3) при $x_2 = 0$, $x_2 = a_2$. Для температурних умов на кожному краю потрібно задати по дві комбінації величин виду

$$c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + c_4 \frac{\partial T_2}{\partial x_1} + c_5 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + c_6 \frac{\partial T_2}{\partial x_2}, \quad \text{де } c_i —$$

сталі, значення яких залежать від роду граничних умов і краю, на якому вони задані. Також слід задати такі початкові умови: $u_k(x_1, x_2, 0)$, $\gamma_k(x_1, x_2, 0)$, $T_1(x_1, x_2, 0)$, $T_2(x_1, x_2, 0)$ ($k = 1, 2, 3$).

Підставляючи рівняння пружності (2) у рівняння руху (3) і враховуючи кінематичні співвідношення (1), отримуємо систему рівнянь руху в переміщеннях, яку запишемо в операторній формі

$$\sum_s^6 L_{js} y_s = b_j \quad (s, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (5)$$

де $y_k = u_k$; $y_{3+k} = \gamma_k$ ($k = 1, 2, 3$); L_{js} — симетричні диференціальні оператори, які легко можуть бути визначені але з метою скорочення запису тут не наведені.

Вільні члени b_j виражаються через температурні характеристики і поверхневе навантаження такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} b_1 &= A_{11}^t T_{1,1} + A_{12}^t T_{1,2} + (B_{11}^t T_{2,1} + B_{12}^t T_{2,2})/h - q_1, \\ b_2 &= A_{12}^t T_{1,1} + A_{22}^t T_{1,2} + (B_{12}^t T_{2,1} + B_{22}^t T_{2,2})/h - q_2, \\ b_3 &= A_{11}^t k_1 T_1 + A_{22}^t k_2 T_2 + (B_{11}^t k_1 T_2 + B_{22}^t k_2 T_2)/h + q_3, \\ b_4 &= B_{11}^t T_{1,1} + B_{12}^t T_{1,2} + (D_{11}^t T_{2,1} + D_{12}^t T_{2,2})/h - m_1, \\ b_5 &= B_{12}^t T_{1,1} + B_{22}^t T_{1,2} + (D_{12}^t T_{2,1} + D_{22}^t T_{2,2})/h - m_2, \\ b_6 &= A_{33}^t T_1 + B_{33}^t T_2/h + m_3. \end{aligned}$$

Система рівнянь (5) разом з граничними умовами складає крайову задачу динамічної теорії температурних напружень для неоднорідних анізотропних пологих оболонок у переміщеннях. За відомими переміщеннями визначаємо деформації серединної поверхні зі співвідношень (1), а сили й моменти — за рівняннями пружності (2). Температурні напруження в оболонці знаходимо за формулами Дюамеля-Неймана.

Шарувата, ортогонально армована полога оболонка. Метод розв'язування. Розглянемо багатошарову оболонку, складену зі скінченної кількості ідеально

скріплених між собою тонких армованих волокнами ортотропних шарів з однаковою товщиною і властивостями, матеріальні осі яких орієнтовані під кутом 0° або 90° до осей оболонки. У цьому випадку деякі коефіцієнти, що входять у рівняння термопружності і теплопровідності, будуть рівні нулю, а саме:

$$A_{i6} = B_{i6} = D_{i6} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad A_{45} = B_{45} = D_{45} = 0;$$

$$A_{12}^t = B_{12}^t = B_{12}^t = \alpha_{12}^t = \lambda_{12} = \lambda_{33}^{(2)} = C^{(2)} = 0.$$

Нехай краї оболонки шарнірно оперті і підтримуються при нульовій температурі. Тоді граничні умови мають такий вигляд:

— при $x_1 = 0$ і $x_1 = a_1$

$$u_2 = u_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = N_{11} = M_{11} = 0, \quad (6)$$

$$T_1 = T_2 = 0; \quad (7)$$

— при $x_2 = 0$ і $x_2 = a_2$

$$u_1 = u_3 = \gamma_1 = \gamma_3 = N_{22} = M_{22} = 0, \quad (8)$$

$$T_1 = T_2 = 0. \quad (9)$$

У початковий момент оболонка знаходиться у спокої і її температура дорівнює нулю. Починаючи з часу $\tau = 0$, поверхня $z = h$ нагрівається зовнішнім середовищем з температурою $t_c^+(x_1, x_2, \tau) = t_c(x_1, x_2) t^+(\tau)$; Поверхня $z = -h$ оболонки омивається середовищем з нульовою температурою $t_c^- = 0$. Коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь оболонки приймаємо однаковими: $\alpha_z^+ = \alpha_z^-$. Поверхневі сили й джерела тепла відсутні.

Розв'язок системи диференціальних рівнянь теплопровідності (4) відповідно до температурних граничних умов (7), (9) і нульових початкових умов знаходимо методом скінченних перетворень Фур'є за координатами x_1, x_2 та інтегрального перетворення Лапласа за часом τ . В результаті для трансформант T_{1mn} , T_{2mn} знаходимо:

$$T_{1mn} = \frac{Bi}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{G_j Q_{mn}}{p_j - p_k} \int_0^\tau t^+(v) e^{-p_j(\tau-v)} dv, \quad (10)$$

$$T_{2mn} = \frac{Bi}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{H_j Q_{mn}}{p_j - p_k} \int_0^\tau t^+(v) e^{-p_j(\tau-v)} dv. \quad (11)$$

Тут

$$p_j = \frac{g_1 + g_4}{2} + (-1)^j \sqrt{\frac{(g_1 - g_4)^2}{4} + g_2 g_3};$$

$$G_j = p_j - g_4 + 3g_2; \quad H_j = 3(p_j - g_1) - g_3 \quad (j = 1, 2),$$

$$g_1 = \frac{\lambda_{11}^{(1)}}{\lambda_{33}^{(1)}} \mu_m^2 + \frac{\lambda_{22}^{(1)}}{\lambda_{33}^{(1)}} \beta_n^2 + Bi; \quad g_3 = 3 \left(\frac{\lambda_{11}^{(2)}}{\lambda_{33}^{(2)}} \mu_m^2 + \frac{\lambda_{22}^{(2)}}{\lambda_{33}^{(2)}} \beta_n^2 \right);$$

$$g_2 = g_3/3 - 2k_0 h; \quad g_4 = 3 \left(\frac{\lambda_{11}^{(3)}}{\lambda_{33}^{(3)}} \mu_m^2 + \frac{\lambda_{22}^{(3)}}{\lambda_{33}^{(3)}} \beta_n^2 + Bi + 1 \right);$$

$$\mu_m = \frac{\pi m h}{a_1}; \quad \beta_n = \frac{\pi n h}{a_2}; \quad Bi = \frac{2\alpha_c^+ h^2}{\lambda_{33}^{(1)}}; \quad \tau' = \frac{\lambda_{33}^{(1)} \tau}{C^{(1)} h^2}.$$

Коефіцієнти Фур'є для температури зовнішнього середовища визначаються за формулою

$$Q_{mn} = \frac{4}{a_1 a_2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} t_c(x_1, x_2) \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2} dx_1 dx_2.$$

У випадку рівномірного нагрівання зовнішнім середовищем зі сталою температурою t^* по всій поверхні маємо

$$Q_{mn} = \frac{4t^*}{m n \pi^2} (1 - \cos \pi m) (1 - \cos \pi n).$$

Якщо температура зовнішнього середовища t^* рівномірно розподілена по площадці $2a_1^0 \times 2a_2^0$ з центром у точці x_1^0, x_2^0 , то Q_{mn} має вигляд

$$Q_{mn} = \frac{16t^*}{m n \pi^2} \sin \frac{\pi m x_1^0}{a_1} \sin \frac{\pi n x_2^0}{a_2} \sin \frac{\pi m a_1^0}{a_1} \sin \frac{\pi n a_2^0}{a_2}.$$

Обчислимо тепер згортки $ZJ(\tau) = t^+(\tau) * e^{-p_j \tau}$, що входять у вирази температурних характеристик T_{1mn}, T_{2mn} , для деяких випадків залежності температури зовнішнього середовища від часу $t^+(\tau)$.

Температура зовнішнього середовища раптово піднімається до значення t^* , залишаючись надалі сталою:

$$t^+(\tau) = t^* S_+(\tau), \quad ZJ(\tau) = \frac{t^*}{p_j} (1 - e^{-p_j \tau}) S_+(\tau). \quad (12)$$

Температура зовнішнього середовища раптово піднімається до t^* , залишаючись сталою протягом відрізка часу $0 < \tau \leq \tau_*$, а потім раптово падає до нуля:

$$t^+(\tau) = t^* [S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_*)],$$

$$ZJ(\tau) = \frac{t^*}{p_j} \left\{ (1 - e^{-p_j \tau}) S_+(\tau) - [1 - e^{-p_j(\tau - \tau_*)}] S_+(\tau - \tau_*) \right\}. \quad (13)$$

Температура зовнішнього середовища раптово піднімається до t^* , а потім протягом відрізка часу $0 < \tau \leq \tau_*$ поступово зменшується до нуля:

$$t^+(\tau) = \frac{t^*}{\tau_*} (\tau_* - \tau) [S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_*)],$$

$$ZJ(\tau) = \frac{t^*}{\tau_* p_j} \left\{ \left[-\tau + (1 - e^{-p_j \tau}) \left(\tau_* + \frac{1}{p_j} \right) \right] S_+(\tau) - \left[\tau_* - \tau + \frac{1}{p_j} (1 - e^{-p_j(\tau - \tau_*)}) \right] S_+(\tau - \tau_*) \right\}. \quad (14)$$

Температура зовнішнього середовища поступово протягом відрізка часу $0 < \tau \leq \tau_*$ піднімається до t^* , а потім протягом відрізка часу $\tau_* \leq \tau \leq 2\tau_*$ поступово зменшується до нуля:

$$t^+(\tau) = \frac{2t^*}{\tau_*} [\tau S_+(\tau) - 2(\tau - \tau_*) S_+(\tau - \tau_*) + (\tau - 2\tau_*) S_+(\tau - 2\tau_*)],$$

$$ZJ(\tau) = \frac{2t^*}{\tau_* p_j} \left\{ \left[\tau - \frac{1}{p_j} (1 - e^{-p_j \tau}) \right] S_+(\tau) - 2 \left[\tau - \tau_* - \frac{1}{p_j} (1 - e^{-p_j(\tau - \tau_*)}) \right] S_+(\tau - \tau_*) + \left[\tau - 2\tau_* - \frac{1}{p_j} (1 - e^{-p_j(\tau - 2\tau_*)}) \right] S_+(\tau - 2\tau_*) \right\}. \quad (15)$$

У виразах вище $S_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ — одинична функція.

Розв'язок системи рівнянь руху (5), який задовольняє механічним граничним умовам (6), (8) і нульовим початковим умовам при відомому температурному полі (10, 11), знаходимо також методами перетворень Фур'є і Лапласа. Тоді, наприклад, для функції прогину можемо записати

$$u_3(x_1, x_2, \tau) = \sum_m \sum_n \sum_{j=1}^6 \frac{B^2 \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2}}{\omega_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^6 (\omega_k^2 - \omega_j^2)} \times$$

$$\times \int_0^{\tau'} [Q_3(\omega_j) T_{1mn}(v) + Q_3^*(\omega_j) T_{2mn}(v)] \sin B^2 \omega_j (\tau' - v) dv, \quad (16)$$

де ω_j — безрозмірні власні частоти; $Q_3(\omega_j), Q_3^*(\omega_j)$

— відомі багаточлени відносно цих частот; $B^4 = \frac{E_1 h^4 c_\epsilon^2}{\rho \lambda_{33}^2 a_2^2}$

— параметр інерції [6], роль якого полягає в тому, що, коли $B \rightarrow \infty$, інерційні сили стають дуже малими і, в результаті, розв'язок наближається до квазістатичного; коли $B \rightarrow 0$, інерційні сили стають переважальними і утримують оболонку від прогину.

Згортки $WJ(\tau) = ZJ(\tau) * \sin B^2 \omega_j \tau$, що входять у вираз (16), обчислимо, використовуючи знайдені значення $ZJ(\tau)$ для кожного з розглянутих випадків нагрівання (12) — (15). Наприклад, для випадку (12) отримаємо

$$WJ(\tau) = \frac{t^*}{p_j} \left\{ \frac{1}{B^2 \omega_j} (1 - \cos B^2 \omega_j \tau) - \frac{1}{B^4 \omega_j^2 - p_j^2} \times \right.$$

$$\times [B^2 \omega_j (e^{-p_j \tau} - \cos B^2 \omega_j \tau) + p_j \sin B^2 \omega_j \tau] \} S_+(\tau).$$

Аналіз числових результатів. Числові дослідження проводились для прямокутних у плані циліндричної і сферичної оболонок, а також пластини. При цьому розглядалися оболонки таких типів: антисиметрична двошарова ($0^\circ/90^\circ$), симетрична тришарова ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$), ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$), антисиметрична чотиришарова ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) і однорідна (нескінченна кількість шарів). За матеріал кожного шару оболонки взято графітоепоксидний композит, армований волокнами з такими фізико-механічними властивостями [14]: $\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{23} = 0.25$, $E_2 = E_3 = (1 \div 0.025)E_1$, $\alpha_{22}^t = \alpha_{33}^t = (3 \div 15)\alpha_{11}^t$, $G_{23} = 0.2E_3$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_3$, $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 0.5\lambda_{11}$. Тут індексом 1 позначено властивості матеріалу в напрямі вздовж волокон, а індексами 2, 3 — у перпендикулярному напрямі. При обчисленнях розглядалися такі значення геометричних параметрів: $a_1/a_2 = 1 \div 5$, $a_1^0/a_1 = a_2^0/a_2 = (0.125 \div 0.5)$, $x_1^0/a_1 = x_2^0/a_2 = 0.5$, $h/a_1 = 0.05$, а також значення коефіцієнта Біо $Bi = 1 \div 10$ і коефіцієнта зсуву $k' = 5/6$. Для вказаних параметрів проведено обчислення безрозмірних прогинів $w' = u_3 / (10ht^* \alpha_{11}^t)$, відношення прогинів шаруватої до однорідної оболонок w'/w_0' і коефіцієнта динамічності $K_d = w'_{max} / w'_{max}^{st}$ (відношення максимального динамічного прогину до максимального квазістатичного).

На рис. 1 показано зміну в часі динамічного і квазістатичного прогинів нижчого типу коливань для різних значень параметра B , який описує відношення характерного часу нагрівання оболонки до періоду власних коливань. Розрахунки проводились для тришарової циліндричної оболонки ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$), яка нагрівається температурним полем (12) по прямокутній області з розмірами $a_1^0/a_1 = a_2^0/a_2 = 0.25$ (суцільні лінії) і $a_1^0/a_1 = a_2^0/a_2 = 0.125$ (штрихові лінії) при $a_1/a_2 = 1$, $h/R = 0.025$, $E_2 = E_3 = 0.04E_1$, $\alpha_{22}^t = \alpha_{33}^t = 3\alpha_{11}^t$. Криві для $B = \infty$ відображають квазістатичний розв'язок задачі. При $B = 0$ прогин оболонки відсутній. Таким чином, динамічний розв'язок коливається навколо квазістатичного з періодом рівним $2\pi/(\omega, B^2)$. Зі збільшенням області нагрівання тією самою температурою прогин збільшуються.

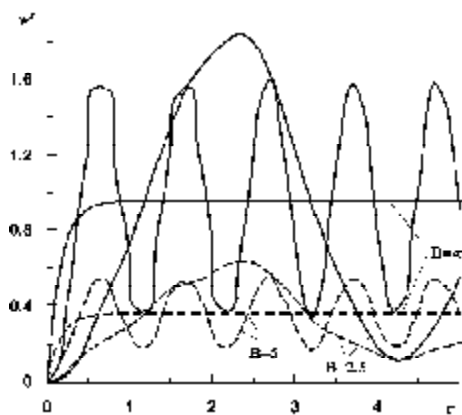


Рис. 1. Зміна прогинів з часом

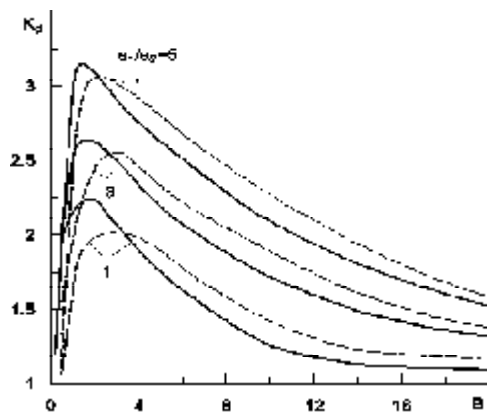


Рис. 2. Залежність коефіцієнта динамічності від параметра інерції

На рис. 2 при розглянутих вище умовах показано зміну коефіцієнта динамічності K_d в залежності від параметра B для різних значень критерію Біо ($Bi = 1$ — суцільні лінії; $Bi = 10$ — штрихові лінії) і різних розмірах оболонок $a_1/a_2 = 1, 3, 5$. Найбільший динамічний ефект спостерігається при малих значеннях параметра B , тобто для таких тонких оболонок, час прогріву товщини яких приблизно рівний періоду власних коливань. При зростанні параметра B (наприклад, за рахунок збільшення товщини) коефіцієнт динамічності K_d прямує до одиниці — динамічний розв'язок переходить у квазістатичний. Таким чином, динамічний ефект істотно залежить від того часу, в межах якого в оболонці відбувається різка зміна температури. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі максимум K_d зсувається вліво і при $Bi \rightarrow 0$ наближається до випадку дії теплового потоку. Коефіцієнт динамічності слабо залежить від структури неоднорідності й анізотропних властивостей матеріалу. Слід зазначити, що для видовжених прямокутних у плані неоднорідних оболонок динамічний прогин може більше, ніж в три рази перевищувати квазістатичний.

На рис. 3, рис. 4 проілюстровано вплив неоднорідності матеріалу (відношення максимального прогину неоднорідної оболонки w' до максимального прогину однорідної w_0') в залежності від ступеня анізотропії (відношення модулів пружності E_1/E_3 і коефіцієнтів лінійного теплового розширення $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t$) (див. рис. 3), а також від кривини оболонки (відношення стріли початкового прогину δ до лінійного розміру a_2) (див. рис. 4), при таких параметрах: $a_1^0/a_1 = a_2^0/a_2 = 0.5$, $a_1/a_2 = 1$, $Bi = 1$. Суцільні лінії відповідають циліндричній оболонці, пунктирні — сферичній, а штрих-пунктирні — пластині. Криві на рис. 3 побудовано для двошарової конструкції антисиметричної структури ($0^\circ/90^\circ$) при $h/R = 0.05$, а на рис. 4 — для двошарової ($0^\circ/90^\circ$), тришарової ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) і чотиришарової ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) конструкцій при $E_1/E_3 = 40$, $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t = 15$.

З аналізу числових результатів і рисунків видно, що неоднорідність структури оболонки збільшує прогини, тобто зменшує ефективну жорсткість. Вплив неоднорідності зростає зі збільшенням пологості ($\delta \rightarrow 0$) і досягає найбільшого значення для пластини. Для сферичної оболонки він є найменшим. Цей вплив також зростає зі

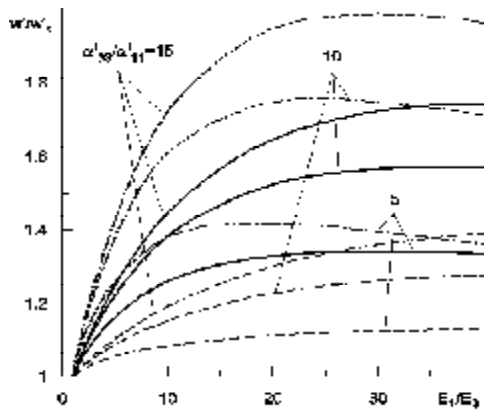


Рис. 3. Відношення максимального прогину неоднорідної оболонки до максимального прогину однорідної в залежності від відношення модулів пружності

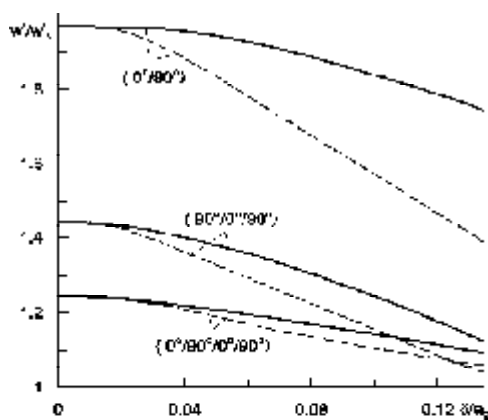


Рис. 3. Відношення максимального прогину неоднорідної оболонки до максимального прогину однорідної в залежності від пологості оболонки

збільшенням модуля пружності у напрямі волокон армування і збільшенням коефіцієнта лінійного теплового розширення у перпендикулярному напрямі. Так, при $E_1/E_3 = 10$, $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t = 5$ прогин двошарових пластини, циліндричної і сферичної оболонок у порівнянні з такими ж однорідними конструкціями збільшився відповідно на 38, 26 і 8 відсотків, а при $E_1/E_3 = 40$, $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t = 15$ ці відсотки уже становлять 96, 74 і 39. Для пластини, на відміну від оболонок, вплив неоднорідності досягає максимуму при певних значеннях E_1/E_3 .

Як можна бачити з рис. 4, найбільший ефект неоднорідності спостерігається у двошаровій конструкції. Зі збільшенням кількості шарів вплив неоднорідності слабшає. Особливо швидко він слабшає для конструкцій антисиметричної структури. Так, прогини неоднорідної конструкції порівняно з прогинами однорідної збільшуються: для двошарової пластини на 96 %, для тришарової — на 44 % і для чотиришарової — на 24 %; для циліндричної двошарової оболонки — на 92 %, для тришарової — на 34 % і для чотиришарової — на 19 %; для сферичної двошарової оболонки — на 76 %, для тришарової — на 28 % і для чотиришарової — на 16 %.

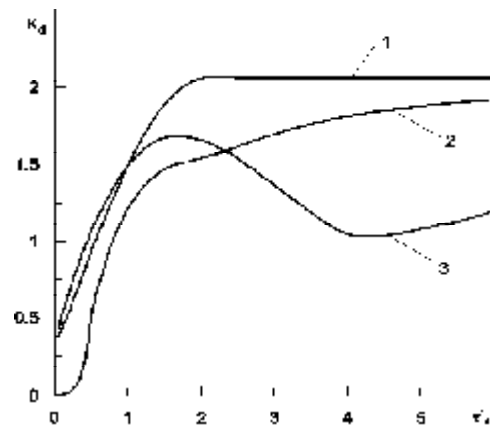


Рис. 5. Залежність коефіцієнта динамічності від часу нагрівання

Обчислення для оболонок проводились при $\delta/a_2 = 0.0635$.

З аналізу числових результатів випливає, що ефект від кривини оболонки протилежний до ефекту від неоднорідності матеріалу. Кривина збільшує ефективну жорсткість конструкції, а неоднорідність її зменшує. Таким чином, збільшенням кривини оболонки можна добитися зменшення впливу неоднорідності. При однаковій кривині вплив неоднорідності для сферичної оболонки менший, ніж для циліндричної. Отже, підбираючи кривину, структуру неоднорідності й анізотропні властивості матеріалу, можна добитися заданих параметрів напружено-деформованого стану конструкції.

Наведені вище результати стосувалися випадку (12), коли температура середовища, що нагрівала поверхню оболонки, раптово піднімалася до деякого значення t^* , залишаючись надалі сталою. Тепер розглянемо випадки (13) — (15), коли час нагрівання скінченний. На рис. 5 наведено криві залежності коефіцієнта динамічності K_d від величини безрозмірного часу нагрівання τ_* для чотиришарової оболонки ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$). Крива 1 відповідає способу нагрівання (13), крива 2 — способу (14) і крива 3 — способу (15). Обчислення проводились для циліндричної оболонки при $h/R = 0.025$, $E_2 = E_3 = 0.04E_1$, $\alpha_{22}^t = \alpha_{33}^t = 3\alpha_{11}^t$, $a_1/a_2 = 1$, $Bi = 1$, $a_1^0/a_1 = a_2^0/a_2 = 0.5$. Видно, що найбільший динамічний ефект дає “прямокутний” спосіб нагрівання (13). Для інтервалу часу $0 < \tau_* < 1$ коефіцієнти динамічності для розглянутих випадків нагрівання приблизно однакові. При $\tau_* \rightarrow \infty$ отримуємо розв’язок, який відповідає випадку нагрівання (12). Структура неоднорідності й анізотропія матеріалу слабо впливають на динамічні ефекти.

Висновки. Розвинута теорія динамічної термопружності неоднорідних анізотропних пологих оболонок, яка не накладає жодних обмежень на величини фізико-механічних характеристик матеріалу.

Методами скінченного перетворення Фур’є та інтегрального перетворення Лапласа розв’язано динамічну задачу для ортогонально армованої пологої оболонки шаруватої структури, що нагрівається зовнішнім середовищем шляхом конвективного теплообміну.

Досліджено вплив динамічних ефектів, рівня анізотропії та ефектів від неоднорідності на прогини оболонки. Показано, що неоднорідність призводить до зменшення ефективної жорсткості оболонки. Величина цього впливу залежить від рівня анізотропії матеріалу, величини кривини оболонки, кількості шарів та порядку їх розміщення. Динамічні ефекти залежать від геометричних параметрів оболонки та від способу прикладання температурного навантаження.

Література

1. Мотовиловець І.А., Козлов В.П. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость. — К.: Наук. думка, 1987. — 264 с.
2. Коваленко А.Д. Избранные труды. — К.: Наук. Думка, 1976. — 762 с.
3. Подстригач Я. С., Ломакин Р. Н., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
4. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. — К.: Наук. думка, 1978. — 344 с.
5. Keene F. W., Hetnarsky R. B. Bibliography on thermal stresses in shells // J. Therm. Stresses. — 1990. — 13, №4. — P. 341—531.
6. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964. — 517 с.
7. McQuillen E. J., Brull M. A. Dynamic thermoelastic response of cylindrical shells // Trans. ASME. Ser. E. — 1970. — 37, №3. — P. 15—22
8. Shirakawa K. Dynamic response of on orthotropic cylindrical shells to rapid heating // J. Sound and Vibr. — 1982. — 83, №1. — P. 27—35.

9. Швець Р. Н., Флячок В. М. Об основных уравнениях динамической термоупругости пологих ортотропных оболочек // Прикл. механика. — 1976. — 12, № 9. — С. 15—22.

10. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Решение задач и анализ напряженного состояния анизотропных неоднородных оболочек (обзор) // Прикл. механика. 1997. — Т. 33, №11. — С. 3—37.

11. Huang N.N., Taichert T.R. Thermally induced vibration of doubly curved cross-ply laminated panells // J. Sound and Vibration. — 1992. — V. 154, №3. — P. 485—494.

12. Жидик У.В. Дослідження температурних напружень в ортогонально армованих шаруватих анізотропних циліндричних оболонках // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2006. — Вип. 4. — С. 139—145.

13. Жидик У.В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2000. — Вип. 57. — С. 72—75.

14. Композиционные материалы. Справочник. — М.: Машиностроение, 1990. — 512 с.

Отримана 19.09.07

U. Zhydyk

Dynamic problem of thermoelasticity for heterogeneous anisotropic shallow shell

National University "Lvivska Polytechnica", Lviv

For heterogeneous anisotropic double curved shallow shells differential equations of thermoelasticity in which anisotropy of physico-mechanical properties in a transverse direction are retained, is deduced. By the integral Fourier and Laplace transformations the solution to dynamic thermoelastic problem for finite freely supported cylindrical and spherical shells and also plate cross-ply laminates under local heating is obtained. Numerical results for graphite-epoxy composites are given.

21 01 01 00 33

IX Міжнародна конференція-виставка ПРОБЛЕМИ КОРОЗІЇ ТА ПРОТИКОРОЗИЙНОГО ЗАХИСТУ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ, "КОРОЗІЯ-2008"

10 — 2 червня 2008 р., Україна, м. Львів

Тематика конференції:

Фундаментальні аспекти корозії та корозійно-механічного руйнування.
Воднева та газова корозія.
Нові корозійноотривкі матеріали.
Газотермічні, гальванічні та інші покриття.
Інгібіторний та біоцидний захист.
Електрохімічний захист.
Методи досліджень і корозійний контроль.
Протикорозійний захист обладнання нафтогазової промисловості.
Протикорозійний захист енергетичного та хімічного обладнання.

Корозія та екологічні проблеми.
Проблеми підготовки спеціалістів-корозіоністів.

Поштова адреса:

Українська асоціація корозіоністів
Оргкомітет конференції-виставки
"Корозія-2008"
вул. Наукова, 5
79601, МСП, м. Львів,
Україна

Тел./факс: (0322) 63-15-77; (032) 229-62-44