

УДК 539.3

## ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ПІВПРОСТОРИ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАГРІВАННІ

Н. Горечко

Канд. фіз.-мат. наук,  
Інститут прикладних проблем  
механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
м. Львів

*Розглянута осесиметрична квазістатична задача термопружності для півпростору, який нагрівається миттєвим лінійним джерелом тепла і шляхом конвективного теплообміну з доволишнім середовищем, на основі моделі термочутливого тіла (враховується залежність від температури термомеханічних характеристик матеріалу). Запропонована процедура розрахунку і дослідження термонапруженого стану такого півпростору, що ґрунтується на зведенні вихідної задачі до розв'язування послідовності задач для рівнянь Пуасона, розв'язки яких з використанням розвинень за кратними інтегралами ймовірностей побудовані у вигляді швидкозбіжних рядів для кожного з наближень.*

**термочутливий півпростір, термонапружений стан, конвективний теплообмін, метод збурень, рівняння Пуасона, кратні інтеграли ймовірностей**

Відомо, що неоднорідність матеріалу конструкції може зумовлюватися впливом температури і є істотною для температур високих і низьких рівнів [1, 2]. Математичні моделі, що враховують залежність фізико-механічних характеристик матеріалу від впливу температури (термочутливість), більш адекватно описують спричинений поширенням тепла напружено-деформований стан конструкції і дають можливість зробити прогнозованішими її експлуатаційні можливості, але істотно ускладнюють відповідні задачі теплопровідності й термопружності. Стан досліджень температурних полів і зумовлених ними температурних напружень у термочутливих тілах висвітлено в низці праць, серед яких [2 — 6].

У цій статті на основі використання результатів праць [7, 8] осесиметрична задача термопружності для термочутливого півпростору при його нагріванні миттєвим лінійним джерелом тепла і наявності конвективного теплообміну на обмежувальній поверхні методом збурень зведена до послідовності крайових задач для рівнянь Пуасона [8] і запропонована методика побудови розв'язку отриманої послідовності задач, права частина яких є функцією температури.

**Формулювання задачі.** Розглядається вільний від навантаження термочутливий півпростір, на лінії  $r = 0$  якого у початковий момент часу миттєво виділяється деяка кількість тепла  $Q$ . Через поверхню  $z = 0$  відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем температури  $t_c$ . Початкова температура півпростору дорівнює  $t_p$ , а механічні характеристики матеріалу є функціями температури.

Неусталене температурне поле такого термочутливого півпростору побудовано у [8] у вигляді розвинень за кратними інтегралами ймовірностей. У праці [7] осесиметрична квазістатична задача термопружності для розглянутого півпростору шляхом застосування методу збурень зведена до послідовності крайових задач для рівнянь Ляме у переміщеннях  $u, w$  зі сталими коефіцієнтами. Вони, в свою чергу, введенням термопружних потенціалів для основного та решти наближень зведені до послідовності крайових задач для рівнянь Пуасона, права частина яких є функцією температури.

Згідно з [7], розв'язок розглянутої задачі термопружності для півпростору є сумою розв'язків крайових задач для основного і  $k$ -тих наближень:

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k, \quad \bar{w} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{w}_k, \\ S_r = \sum_{k=0}^{\infty} S_r^{(k)}, \quad \dots, \quad S_{rV} = \sum_{k=0}^{\infty} S_{rV}^{(k)}, \quad (1)$$

де члени розвинень є розв'язками послідовності відпо-  
відних крайових задач. Тут  $\bar{u} = \frac{u}{l_0 a_0 t_0}$ ,  $\bar{w} = \frac{w}{l_0 a_0 t_0}$ ,  
 $r = r/l_0$ ,  $V = z/l_0$  ( $l_0$  — деякий характерний розмір,  $t_0$   
— деяка відлікова температура).

Модуль зсуву  $G$ , коефіцієнт Пуасона  $n$  і температур-  
ний коефіцієнт лінійного розширення  $a_t$  подано у вигляді  
 $c(t) = c_0 c^*(T)$ , де множники з нуликом є сталими і  
мають відповідні розмірності, а співмножники з зірочками  
— безрозмірні функції безрозмірної температури  
 $T = t/t_0$ .

Компоненти  $S_r$ ,  $S_f$ ,  $S_V$ ,  $S_{rV}$  тензора напружень у  
кожному наближенні визначаються співвідношеннями:

$$S_r = G^*(T) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{n(T)}{1-2n(T)} \bar{e} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right), \\ S_f = G^*(T) \left( \frac{\bar{u}}{r} + \frac{n(T)}{1-2n(T)} \bar{e} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right), \\ S_V = G^*(T) \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial V} + \frac{n(T)}{1-2n(T)} \bar{e} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right), \\ S_{rV} = \frac{1}{2} G^*(T) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial V} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\text{де } \bar{\Phi}(t) = \frac{2(1+\nu(T))}{1-2\nu(T)} \int_{T_p}^T \alpha_t^*(T) dT, \quad \bar{e} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{\bar{u}}{\rho} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta}.$$

Початково-крайова задача для нульового наближення  
[7] для визначення термопружного потенціалу, введеного  
як  $\bar{u}_0 = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r}$ ,  $\bar{w}_0 = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial V}$ , записана у вигляді

$$\Delta \Gamma_0 = \bar{\Phi}(T), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial V \partial r} \right|_{V=0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial V^2} + \frac{n(T)}{1-2n(T)} \bar{e}_0 - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right] \Big|_{V=0} = 0, \quad (4)$$

де  $\bar{e}_k = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \rho} + \frac{\bar{u}_k}{\rho} + \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \zeta}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial V^2}$  —  
оператор Лапласа.

Для решти наближень після введення термопружних  
потенціалів у вигляді  $\bar{u}_k = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial r}$ ,  $\bar{w}_k = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial V} + \Gamma_k^*$ ,  
отримано таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta \Gamma_k = \int \frac{1-2n(T)}{2(1-n(T))} F_{rk}(r, V) dr - \frac{1}{2(1-n(T))} \frac{\partial \Gamma_k^*}{\partial V} \\ \Delta \Gamma_k^* = F_{rk}(r, V) - \\ - \frac{1-n(T)}{1-2n(T)} \frac{\partial}{\partial V} \int \frac{1-2n(T)}{1-n(T)} F_{rk}(r, V) dr \end{cases}, \quad (5)$$

розв'язки якої повинні задовольняти граничні умови:

$$\frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial V^2} + \frac{n(T)}{1-2n(T)} \Delta \Gamma_k + \frac{1-n(T)}{1-2n(T)} \frac{\partial \Gamma_k^*}{\partial V} = 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial V \partial r} + \frac{\partial \Gamma_k^*}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

Тут

$$F_{rk}(r, V) = \frac{-1}{1-2n(T)} \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial r} d_{k1} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{n(T)}{1-2n(T)} \right) \bar{e}_{k-1} - \\ - \frac{2}{G^*(T)} \left[ \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial r} S_r^{(k-1)} + \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial V} S_{rV}^{(k-1)} \right], \\ F_{rk}(r, V) = \frac{-1}{1-2n(T)} \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial V} d_{k1} - 2 \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{n(T)}{1-2n(T)} \right) \bar{e}_{k-1} + \\ + \frac{2}{G^*(T)} \left[ \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial r} S_{rV}^{(k-1)} + \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial V} S_r^{(k-1)} \right].$$

**Побудова розв'язку послідовності крайових задач  
для рівнянь Пуасона у нульовому наближенні.**  
Розв'язок  $\bar{u}_0, \bar{w}_0$  крайової задачі (3) — (4) подамо у  
вигляді суми часткового розв'язку  $\bar{u}_{0\alpha}, \bar{w}_{0\alpha}$  неоднорідного  
рівняння (3) та розв'язку Терездзави [9]  $\bar{u}_{0T}, \bar{w}_{0T}$  для  
пружного півпростору, навантаженого нормальними й  
дотичними осесиметричними навантаженнями. Тобто,

$$\bar{u}_{0\alpha} = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r}, \quad \bar{w}_{0\alpha} = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial V} \quad \text{— частковий розв'язок рівняння}$$

(3), а  $\bar{u}_{0T}, \bar{w}_{0T}$  будуть розв'язками крайової задачі для  
однорідних рівнянь Ляме:

$$\Delta \bar{u}_{0T} - \frac{\bar{u}_{0T}}{r^2} + \frac{1}{1-2n(T)} \frac{\partial \bar{e}_{0T}}{\partial r} = 0, \\ \Delta \bar{w}_{0T} + \frac{1}{1-2n(T)} \frac{\partial \bar{e}_{0T}}{\partial V} = 0, \quad (7)$$

з неоднорідними граничними умовами:

$$\frac{\partial \bar{w}_{0T}}{\partial V} + \frac{n(T)}{1-2n(T)} \bar{e}_{0T} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) = \\ = - \left( \frac{\partial \bar{w}_{0\alpha}}{\partial V} + \frac{n(T)}{1-2n(T)} \bar{e}_{0\alpha} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right),$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_{0T}}{\partial V} + \frac{\partial \bar{w}_{0T}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_{0c}}{\partial V} + \frac{\partial \bar{w}_{0c}}{\partial r} \right), \quad (8)$$

$$\text{де } \bar{e}_{0T} = \frac{\partial \bar{u}_{0T}}{\partial r} + \frac{\bar{u}_{0T}}{r} + \frac{\partial \bar{w}_{0T}}{\partial V}.$$

Для побудови часткового розв'язку неоднорідного рівняння (3) праву частину рівняння подаємо у вигляді розвинення за кратними інтегралами ймовірностей  $i^n \operatorname{erfc}(x)$ , тобто  $\bar{\Phi}(T)$  розкладаємо в ряд Тейлора за степенями  $J = \exp(-h)/(4Fo)$ , де  $h = r^2/(4Fo)$ . Коефіцієнти  $\Phi_n(x, b)$  записуємо у вигляді розвинень за кратними інтегралами ймовірностей:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(T) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Phi_n(x, b) J^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \sum_{m=0}^M \Phi_{m,n}(b) i^m \operatorname{erfc}(x) \right] \frac{\exp(-nh)}{(4Fo)^n}, \quad (9) \end{aligned}$$

де  $x = V/2\sqrt{Fo}$ ,  $b = 2Bi(1+k)\sqrt{Fo}$ , а коефіцієнти  $\Phi_{m,n}(b)$  знаходимо з числової апроксимації функції

$$\Phi_n(x, b) = \left. \frac{\partial^n \Phi}{\partial J^n} \right|_{J=0}.$$

Таким чином, рівняння (3) запишеться у вигляді

$$\Delta \Gamma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\exp(-nr^2/4Fo)}{n! (4Fo)^n} \sum_{m=0}^M \Phi_{m,n}(b) i^m \operatorname{erfc}(x) \right]. \quad (10)$$

Його частковий розв'язок будуємо у вигляді розкладів за кратними інтегралами ймовірностей. Застосуємо до (10) інтегральне перетворення Ганкеля нульового порядку за радіальною координатою. Розв'язок рівняння у трансформантах шукаємо у вигляді суми за кратними інтегралами ймовірностей з довільними коефіцієнтами, а саме:

$$\begin{aligned} \Gamma_0^H &= \frac{d(a)}{a} \sum_{m=0}^M A_m^0 i^m \operatorname{erfc}(x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2n n!} \frac{\exp(-a^2 Fo/n)}{(4Fo)^{n-1}} \sum_{m=0}^M A_m^n i^m \operatorname{erfc}(x) \right], \end{aligned}$$

$$\text{де } A_m^n = 4Fo \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} (2a\sqrt{Fo})^{2[(m-1)/2]-j} \Phi_{2j-\text{mod}[m/2],n},$$

$$A_0^n = -\Phi_{0,n}/a^2, \quad A_1^n = A_2^n = 0.$$

Звідси оригінали побудовано у вигляді:

$$\begin{aligned} \Gamma_0(r, z, t) &= 4Fo \sum_{m=3}^M \Phi_{2[(m-1)/2]-\text{mod}[m/2],0} i^m \operatorname{erfc}(x) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n n!} \frac{1}{(4Fo)^{n-1}} \times \left\{ \Phi_{0,n} \left( \frac{1}{2} E_1 \left( \frac{nr^2}{4Fo} \right) + \ln(r) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2n \sum_{m=3}^M i^m \operatorname{erfc}(x) (4n)^{[(m-1)/2]} \sum_{j=1}^{[(m-1)/2]} (4n)^{-j} \Phi_{2j-\text{mod}[m/2],n} \times \\ &\times \left( \left[ \frac{m-1}{2} \right] - j \right) {}_1F_1 \left( \left[ \frac{m-1}{2} \right] - j + 1, 1, \frac{-nr^2}{4Fo} \right) \Bigg\}, \quad (11) \end{aligned}$$

де  $E_1(z)$  — інтегральна показникова функція [10].

Нульові компоненти тензора напружень, згідно зі співвідношеннями (2), через отриманий термодружний потенціал  $\Gamma_0$  обчислюються так:

$$\begin{aligned} s_r^0 &= G^*(T) \left( \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial r^2} - \frac{1-4n}{2(1-2n)} \Phi(T) \right), \\ s_j^0 &= G^*(T) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r} - \frac{1}{2(1-2n)} \Phi(T) \right), \\ s_V^0 &= G^*(T) \left( \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial V^2} - \frac{1}{2(1-2n)} \Phi(T) \right), \\ s_{rV}^0 &= G^*(T) \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial r \partial V}. \quad (12) \end{aligned}$$

Розв'язок Терезави [9] задачі (7) — (8) для заданих поверхневих навантажень є сумою розв'язків при заданому нормальному й дотичному навантаженні на межі  $V=0$ . Наприклад, для компоненти  $s_V^{(0)}$  тензора напружень цей розв'язок запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} s_V^1 &= - \int_0^{\infty} a \tilde{P}_0(a) e^{-aV} (1+aV) J_0(ar) da + \\ &+ V \int_0^{\infty} a^2 \tilde{S}_1(a) e^{-aV} J_0(ar) da, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\text{де } \tilde{P}_0(a) = \int_0^{\infty} P(r) r J_0(ar) dr, \quad \tilde{S}_1(a) = \int_0^{\infty} S(r) r J_1(ar) dr,$$

$$P(r) = s_V^0|_{V=0} = -2G^*(T) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r} \right),$$

$$S(r) = s_{rV}^0|_{V=0} = -2G^*(T) \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial r \partial V}.$$

У результаті співвідношення для обчислення нульового наближення напружень у розв'язку (1), який задовольняє умову відсутності навантажень на поверхні півпростору, запишеться у вигляді суми компонент напружень (12) і (13) для кожної з компонент тензора напружень.

**Побудова розв'язку послідовності крайових задач рівнянь Пуасона для наступних наближень.** Процедура побудови розв'язку для наступних членів розвинень (1) є аналогічною до нульового. Розглянемо вирази  $F_{rk}(r, V)$ ,

$F_{jk}(r, V)$  у правій частині (5), куди входить модуль зсуву  $G^*(T)$ , який вважаємо квадратичною функцією температури:

$$G(T) = G_0 G^*(T) = G_0 \left[ 1 + g_1 (T - T_p) + g_2 (T - T_p)^2 \right]. \quad (14)$$

З урахуванням виразів для температури з [8] розклад модуля зсуву за радіальною координатою має вигляд

$$G(T) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{0(n)} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{r^{2n}}{(4Fo)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n, \quad (15)$$

де  $g_{2m} = (-1)^m G^{0(2m)} / (m! (4Fo)^m)$ ,  $g_{2m+1} = 0$ ,

$$G^{0(n)} = \left( \frac{\partial^n G(T)}{\partial h^n} \right)_{h=0} \quad (n \geq 1), \quad G^{0(0)} = G(T)_{r=0}.$$

Для побудови розв'язку нелінійного рівняння (3) подамо кожен зі співмножників його правої частини у вигляді степеневому ряду за  $r$ . Для розглянутих виразів компонент тензора напружень нульового наближення  $S_V^{(0)}$ ,  $S_{rV}^{(0)}$  отримано такі розвинення у ряди Тейлора за радіальною координатою:

$$S_{rV}^{(0)} = 2G(T) \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{0rV}(r, V, Fo) r^k, \\ S_{rr}^{(0)} = 2G(T) \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{0rr}(r, V, Fo) r^k, \quad (16)$$

де  $S_k^{0rV}$ ,  $S_k^{0rr}$  — деякі аналітичні вирази від координат та часу.

Загальний вигляд розкладу функції  $\bar{\Phi}(T)$  за радіальною координатою  $r$  отримано у вигляді

$$\bar{\Phi}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n r^n, \quad (17)$$

де  $\Phi_{2n+1} = 0$ ,  $\Phi_{2n} = (-4Fo)^n / n! \times$

$$\times \sum_{m=1}^n f_m^n \frac{(2m-3)!! (k_1 - k_a) k_1^{m-2} (Q^* [1-j(x, b)])^m}{(1+2k_1 T_c^* j(x, b))^{m-1/2} (4Fo)^m},$$

$$j(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2Bi\sqrt{Fo})^n i^n \operatorname{erfc}(x), \quad Q^* = Qa_0 / pl_1 t_0,$$

$$f_m^{n+1} = m f_m^n + f_{m-1}^n, \quad f_1^n = 1, \quad f_{n+1}^n = 0, \quad f_n^n = 1.$$

Звідси, з урахуванням співвідношень (14) — (17), розвинення функцій  $F_{rk}(r, V)$ ,  $F_{jk}(r, V)$  в ряд за  $r$  за припущення  $n = const$  мають вигляд:

$$F_{V1}(r, V, Fo) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-2n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \frac{1}{2\sqrt{Fo}} - 4\Sigma_n^0 \right\} r^n,$$

$$F_{r1}(r, V, Fo) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n+1}{1-2n} \Phi_{n+1} + 4\Sigma_n^0 \right\} r^n, \quad (18)$$

$$\text{де } \Sigma_n^0 = \sum_{i=0}^n d_i S_{n-i}^{0rV} + \sum_{i=0}^n z_i S_{n-i}^{0rr},$$

$$z_n = \frac{1}{g_0} \left[ \frac{\partial G^{0(m)}}{\partial x} \frac{1}{m! (4Fo)^{m+1/2}} - \sum_{i=0}^{n-1} z_i g_{n-i} \right],$$

$$d_n = \frac{1}{g_0} \left[ (n+1) g_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} d_i g_{n-i} \right].$$

Перейдемо до розгляду системи (3) при  $k = 1$

$$\begin{cases} \Delta \Gamma_1 = \Gamma_1^0 \\ \Delta \Gamma_1^* = \Gamma_1^{*0} \end{cases} \quad (19)$$

Праві частини рівнянь системи (19), підставивши отримані розвинення їх правих частин на основі (18), запишемо у вигляді ряду

$$\Gamma_1^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{1,n}^0 r^n, \quad \Gamma_1^{*0} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{1,n}^{*0} r^n. \quad (20)$$

Частковий розв'язок цих рівнянь шукамо у вигляді розвинення за кратними інтегралами ймовірностей. Для цього одним з методів числової апроксимації, наприклад, методом найменших квадратів, наближаємо функцію до суми ряду

$$\Gamma_1^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \Gamma_{10,n}^0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{1m,n}^0 i^m \operatorname{erfc} \left( \frac{V}{2\sqrt{Fo}} \right) \right] r^n, \\ \Gamma_1^{*0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \Gamma_{10,n}^{*0} + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{1m,n}^{*0} i^m \operatorname{erfc} \left( \frac{V}{2\sqrt{Fo}} \right) \right] r^n. \quad (21)$$

Звідси, згідно з (20), (21), загальні розв'язки для  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_1^*$  записано у вигляді:

$$\Gamma_1(r, V) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_0(e n r) \exp(-e n V) + \\ + \frac{1}{4(1-n)} \sum_{n=0}^{\infty} (e n)^2 r A_n J_0(e n r) \exp(-e n V) + \\ + \frac{1}{2(1-n)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\Gamma_{m,n}^0} i^m \operatorname{erfc} \left( \frac{V}{2\sqrt{Fo}} \right) \right] r^n, \quad (22)$$

$$\Gamma_1^*(r, V) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(e n r) \exp(-e n V) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \overline{\Gamma_{0,n}^{*0}} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\Gamma_{m,n}^{*0}} i^m \operatorname{erfc} \left( \frac{V}{2\sqrt{Fo}} \right) \right] r^n, \quad (23)$$

$$\text{де } \overline{\Gamma_{m,n}^0} = (1-2n) \Gamma_{1m,n-1}^0 + (1-d_{m1}) \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \overline{\Gamma_{m+1,n}^*},$$

$$\overline{\Gamma_{m+2,n}^*} = 4Fo \left[ \overline{\Gamma_{1m,n}^{*0}} - (n+2)^2 \overline{\Gamma_{m,n+2}^*} \right] \quad (m \geq 1, n \geq 0),$$

$\overline{\Gamma_{m,1}^*} = 0 \quad (m \geq 0)$ ,  $\overline{\Gamma_{1,n}^*} = \overline{\Gamma_{2,n}^*} = 0 \quad (m \geq 0)$ ,  $\varepsilon$  — деяка додатна стала.

Розв'язки (22) і (23) записані з точністю до двох коефіцієнтів,  $A_n$  і  $B_n$ , які визначаються з лінійної системи алгебричних рівнянь, отриманої з граничних умов (6). Для наступних наближень підставляємо в праву частину рівняння (5) розвинення напружень за  $r$  з попередніх ітерацій. Залишиться обчислити лише числові апроксимації для розвинень за кратними інтегралами ймовірностей та коефіцієнти  $A_n$  і  $B_n$ .

Компоненти напружень для  $k$ -го наближення, обчислюємо за співвідношеннями, отриманими на основі (2), підстановкою отриманих термопружних потенціалів  $\Gamma_k$  та  $\Gamma_k^*$ .

**Числові результати і висновки.** Проведено дослідження термонапруженого стану сталевого півпростору та врахування термочутливості матеріалу за таких фізико-механічних характеристик:

$$I_r(t) = 41,51(1 - 0,3(T - T_p)) \text{ Вт/мК},$$

$$G(t) = 0,74 \cdot 10^5 (1 + 0,46(T - T_p) + 0,56(T - T_p)^2) \text{ МПа},$$

$$a(t) = 17,08 \cdot 10^{-6} (1 + 0,77(T - T_p)) \text{ К}^{-1}, \quad n_0 = 0,3.$$

На рис. 1 — рис. 2 наведені графіки розподілу безрозмірних радіальних  $S_r$  і колових  $S_j$  напружень у залежності від радіальної координати  $r$  для різних значень безрозмірного часу  $Fo$  при  $V=2$ ,  $Bi=1$ .

Тут і далі суцільна лінія відповідає розв'язковій задачі за залежних від температури теплових і механічних характеристик, а штрихова — за сталих характеристик.

Зі збільшенням часу спостерігається зменшення величини напружень і зменшення різниці між значеннями напружень зі сталими і залежними від температури характеристиками. При віддаленні від лінії дії джерела радіальні напруження  $S_r$  мають монотонно спадний характер. Колові напруження  $S_j$  досягають максимальних значень на лінії дії джерела, однак вздовж радіальної

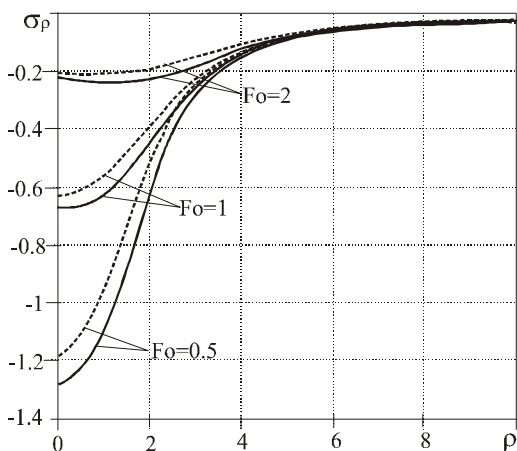


Рис. 1. Розподіл радіальних напружень за радіальною координатою при різних значеннях часу

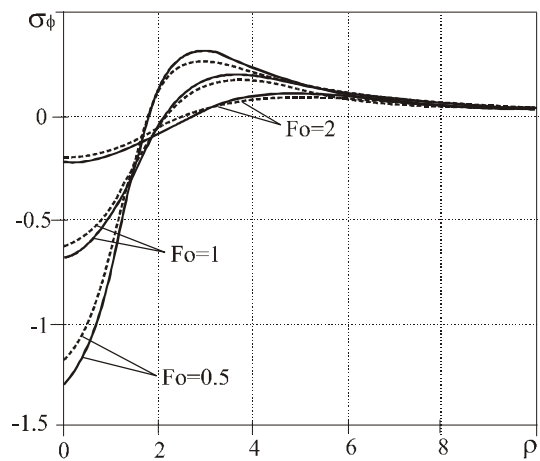


Рис. 2. Розподіл колових напружень за радіальною координатою при різних значеннях часу

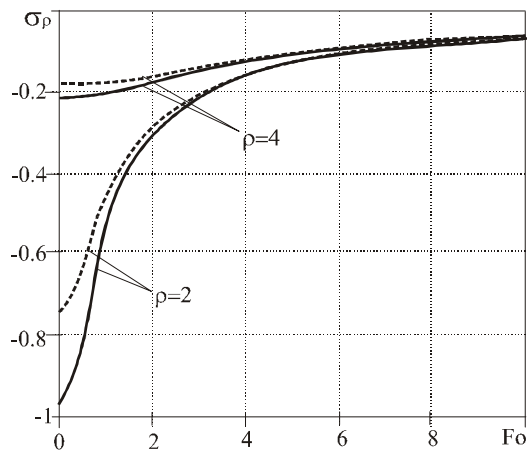


Рис. 3. Залежність радіальних напружень від часу на різних відстанях від джерела

координати змінюють свій знак і тільки після цього монотонно зникають до нуля. Розрахунок показав, що дотичні напруження  $S_{rV}$  при нульових значеннях на осі досягають своїх максимальних значень приблизно при тих значеннях  $r$ , коли колові напруження  $S_j$  змінюють знак.

На рис. 3 — рис. 4 наведено графіки залежності нормальних безрозмірних напружень від часу при  $V=5$ ,  $Bi=1$ .

Радіальні  $S_r$  і колові  $S_j$  напруження набувають максимального значення поблизу зони нагрівання на початку перехідного процесу, а далі з часом зменшуються. Для радіальних напружень розбіжність між значеннями напружень при врахуванні залежності термомеханічних характеристик від температури й без нього збільшується при наближенні до лінії дії джерела.

Як показали проведені дослідження, з наближенням до поверхні півпростору радіальні напруження  $S_r$  змінюють знак на протилежний у напрямі до лінії дії джерела, а колові напруження  $S_j$  зі стискаючих стають

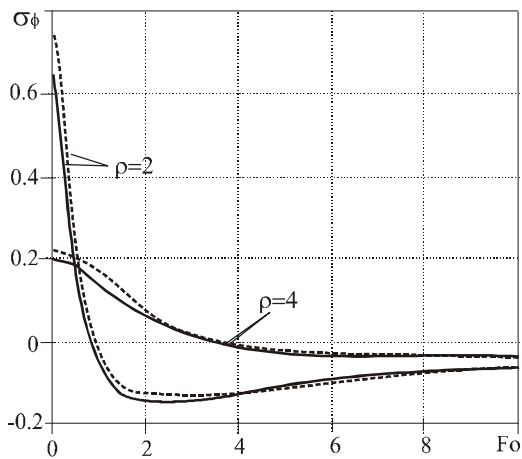


Рис. 4. Залежність колових напружень від часу на різних відстанях від джерела

розтягуючими. Зростає і розбіжність між значеннями напружень при врахуванні залежності термомеханічних характеристик від температури та без її врахування з наближенням до поверхні півпростору.

Отримані результати наведені для перших трьох наближень методу збурень у вигляді (1). Обчислення основного і перших двох наближень показали, що друге наближення складає не більше 5 % сумарних величин обчислених напружень.

Розбіжність між температурами при врахуванні термочутливості матеріалу розглянутого сталевого півпростору і без неї не перевищувала 5 %, а розбіжність між напруженнями — 40 %, що свідчить про важливість врахування залежностей від температури характеристик матеріалу тіла при визначенні його термонапруженого стану. Переважно ці розбіжності досягають максимальних значень на лінії дії джерела  $r = 0$ .

Робота виконана за НДР для молодих науковців (договір з Президією НАН України від 1.07.2009 № ВБМ/339).

### Література

1. Постольник Ю.С. Нелінійна прикладна термомеханіка / Ю.С. Постольник, А.П. Огурцов. — К.: НМЦ ВО МОНЦ, 2000. — 280 с.

2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел / В.А. Ломакин. — М.: Изд-во МГУ, 1976. — 367 с.

3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — К.: Наук. думка / Ю.М. Коляно, 1992. — 280 с.

4. Попович В.С. Центральні-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла / В.С. Попович, Г.Т. Сулим // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2004. — №3. — С. 62—68.

5. Попович В. Термопружний стан термочутливої тонкої пластини за умов нагрівання джерелом тепла та теплообміну з оточуючим середовищем / В. Попович, Г. Гарматій, О. Вовк // Машинознавство. — 2007. — №7 (121). — С. 21—25.

6. Kushnir R.M. The thermoelastic state of a thermo-sensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange / R.M. Kushnir, V.S. Popovych, O.M. Vovk // J. of Eng. Mathematics, August 2008. — Vol. 61, no. 2-4. — P. 357—369.

7. Попович В. Визначення температурних напружень у термочутливих елементах конструкцій, які моделюють тілами обертання / В. Попович, Н. Горечко // Машинознавство. — 2006. — №7 (109). — С. 18—22.

8. Попович В.С. Температурне поле термочутливого півпростору від нагрівання миттєвим лінійним джерелом тепла / В.С. Попович, Н.О. Горечко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — Т. 49, №4. — С. 183—188.

9. Новацький В. Теория упругости / В. Новацький. — М.: Мир, 1975. — 872 с.

10. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Отримана 27.08.09

N. Horechko  
temperature stresses in the thermo-sensitive half-space under combined heating

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematic, named after Ya. S. Pidstryhach, Lviv

The axisymmetrical quasi-static thermoelasticity problem for the thermosensitive half-space heating by instantaneous linear heat source and heat exchange with surroundings on the model of the thermosensitive space is presented. The procedure for half-space thermostressed state investigation which is based on the reducing of the presented problem to the sequence of Poisson's equation problems is presented. The solutions of these problems with using multiple probability integrals in fast-convergent series form for every approximation expression is constructed.

## BIOMECHANICS OF HUMAN MOTION. NEW FRONTIERS OF MULTIBODY TECHNIQUES FOR CLINICAL APPLICATIONS

March 2010

Ponta Delgada, Azores, Portugal

### Contact:

Prof. Jorge A.C. Ambrosio

IDMEC- Instituto Superior Tecnico

Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisbon Portugal.

Phone: +351 2184 17680; fax: +351 2184 17915.

mail: [Jorge@dem.ist.utl.pt](mailto:Jorge@dem.ist.utl.pt)