

УДК 539.3

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

В. Клим

Інженер,  
Дніпропетровський національний  
університет імені Олеся Гончара,  
м. Дніпропетровськ

*Розглянута математична модель процесу дисипативного розігріву простих елементів конструкцій при циклічному деформуванні, яка базується на розв'язанні нелінійних задач нестационарної теплопровідності наближеним аналітичним методом. Наведено аналіз результатів розрахунку температурних полів стрижня з урахуванням саморозігріву, який дає можливість оцінити вплив різних чинників: частоти навантаження, амплітуди напружень, умов теплообміну, геометричної форми стрижня.*

**розсіяння енергії, дисипативний розігрів, задача нестационарної теплопровідності**

Для багатьох сучасних технологічних процесів, робочі режими циклічного навантаження яких знаходяться в області як звукового, так і ультразвукового діапазонів частот, дослідження теплоутворення й саморозігріву має важливе теоретичне і практичне значення для оцінювання міцності й довговічності конструкції в цілому. Дослідження температурних полів елементів конструкцій у цьому випадку пов'язане з явищем дисипації або розсіяння енергії.

Аналіз результатів численних експериментально-теоретичних праць [1 — 3] показав, що розсіяння енергії в конструкційних матеріалах при коливаннях може стати причиною зміни основних механічних і теплофізичних характеристик матеріалу.

Різна фізична природа розсіяння енергії при циклічній деформації обумовлена комплексом чинників на мікро- і макрорівнях: структурою кристалічної ґратки металів і наявністю в ній дефектів; механічним і термічним обробленням матеріалу до навантаження; характеристиками циклу навантаження — амплітуда і швидкість деформації,

ступінь асиметрії, вид навантаження; кількість циклів і т.д. Разом з цим, вплив на розсіяння енергії кожного чинника за різних умов циклічної деформації може істотно відрізнитися. Тому при великому обсязі теоретичних і експериментальних робіт однозначної залежності функції розсіяння енергії при непружній деформації від повного спектру всіх можливих чинників не існує. При розв'язанні задач циклічної деформації, пов'язаних з потребою врахувати розсіяння енергії, для кожного конкретного випадку з комплексу чинників вибирається тільки частина.

Для отримання вірогідних результатів розрахунку температурного поля потрібним є наявність експериментальних даних про залежність основних механічних і теплофізичних характеристик матеріалу від температури, що істотно впливає на циклічну довговічність конструкцій. На рис. 1 такі залежності наведені відповідно для сталі 45 в нормалізованому і аустенітної відпаленої сталі X18H10T.

Відомі аналітичні вирази для функції дисипації енергії дають змогу лише пояснити виявлені закономірності

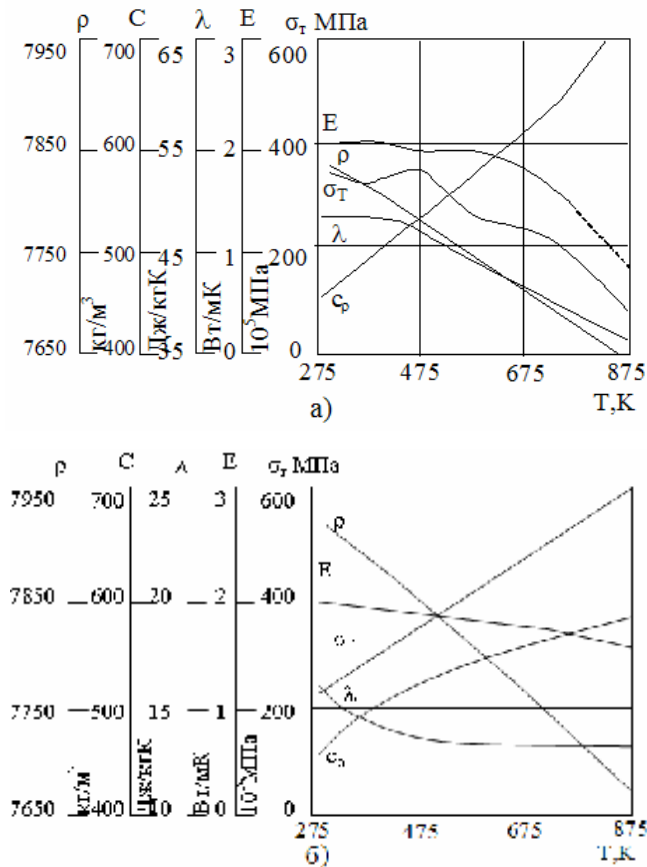


Рис. 1. Залежність основних механічних і теплофізичних характеристик сталі 45 (а) і аустенітної сталі X18H10T (б) від температури

явища теплоутворення, але не дають можливості передбачити їх із заданою точністю, особливо якщо відбувається стрибкоподібна зміна температури саморозігріву — так званий тепловий вибух [2]. Таким чином визначення реальних температурних полів елементів конструкцій внаслідок їх дисипативного розігріву при циклічній деформації є важливою і складною проблемою.

У працях [4 — 5] обґрунтована потреба в розв'язуванні нелінійних задач нестационарної теплопровідності при визначенні довговічності елементів конструкцій, що розігріваються внаслідок циклічного навантаження. Розв'язання нелінійних задач нестационарної теплопровідності, тобто врахування залежності характеристик матеріалу і внутрішніх джерел енергії від температури, дасть можливість не тільки отримати залежності розподілу температури в елементах від часу навантаження, але й оцінити вплив різних параметрів, що сприяють різкому підвищенню температури саморозігріву на високих частотах циклічної деформації. Об'єктами дослідження вибрані такі елементи конструкцій, які можна подати у вигляді гладких суцільних або складених стрижнів за різними умовами теплообміну з навколишнім середовищем.

У цій статті при дослідженні саморозігріву елемента конструкції, що знаходиться під дією циклічного навантаження з різними частотами, розв'язана нелінійна задача нестационарної теплопровідності для циліндричного стрижня обмеженої довжини. Розміри поперечного

перерізу стрижня вважаються малими порівняно з довжиною. Таке припущення дає підставу вважати, що перепад температур у процесі циклічного навантаження відбувається тільки по довжині стрижня. Нелінійна задача нестационарної теплопровідності зводиться до сукупності розв'язків лінійних задач з різними початковими й граничними умовами для кожного інтервалу часу. Для розв'язання лінійних задач теплопровідності використовується операційний метод, заснований на інтегральному перетворенні Лапласа [4 — 6]. Таким чином, послідовним розв'язком задачі про коливання і нелінійної задачі нестационарної теплопровідності можна визначити відповідно напружено-деформований стан і температурне поле в елементах конструкцій, що знаходяться під дією циклічного навантаження.

Наразі побудовано такий алгоритм визначення розігріву елементів конструкцій при циклічній деформації: повний час навантаження розбивається на інтервали, в кожному з яких існує розв'язок задачі про коливання (жорсткість елемента й інтенсивність маси визначаються з початкової температури елемента в заданому інтервалі часу); визначається розподіл інтенсивності внутрішніх джерел тепла по довжині елемента; визначається зміна температури в цьому інтервалі часу за результатами розв'язання задачі теплопровідності; для подальшого інтервалу часу повторюються попередні кроки алгоритму (жорсткість елемента й інтенсивність маси приймають значення, відповідні розподілу температури по довжині елемента в кінці попереднього інтервалу часу).

Постановка задачі про коливання включає диференціальне рівняння в часткових похідних зі змінними коефіцієнтами і граничними умовами. Для її розв'язання використовується метод відокремлення змінних, що дає змогу замінити диференціальне рівняння коливань двома рівняннями. Перше рівняння залежить від координати і є фундаментальною функцією задачі, яка визначає  $K$ -ту форму власних коливань. Друге рівняння є  $K$ -тою функцією задачі за часом, що характеризує закон зміни коливань. Елементи конструкцій складної конфігурації замінюються кусково-лінійним розподілом жорсткості і щільності матеріалу по довжині, а розв'язок для фундаментальних функцій здійснюється шляхом застосування сплайн-перетворення аргументу (координати), операційного методу, заснованого на інтегральному перетворенні Карсона-Лапласа. Такий підхід дає можливість отримати аналітичний розв'язок, що має один вираз для всієї області зміни аргументу. Розв'язок для функцій за часом отримано при використанні інтеграла Дюамеля або операційного методу.

Введення припущення про незалежність характеристик розсіяння матеріалу від частоти навантаження дало можливість, по-перше, спростити розв'язок задачі для фундаментальних функцій, по-друге, врахувати вплив розігріву на зміну цих характеристик; через відсутність у літературі таких відомостей передбачається, що характеристики розсіяння енергії в матеріалі зі зростанням температури збільшуються, а модуль зміцнення зменшується пропорційно зміні межі текучості з температурою. Оскільки при розв'язуванні задачі теплопровідності можна врахувати теплообмін між елементом і навко-

лишнім середовищем, обґрунтованим є припущення, що енергія, необоротно розсіяна в матеріалі, повністю перетворюється в теплоту.

За розрахункову модель елемента конструкції при розв'язуванні задачі нестационарної теплопровідності прийнято суцільний гладкий стрижень. Враховуючи малі розміри поперечного перерізу порівняно з довжиною стрижня, задача нестационарної теплопровідності розглянута як одновимірна. Передбачається, що теплообмін між бічною поверхнею стрижня й навколишнім середовищем відбувається за законом Ньютона. У диференціальному рівнянні теплопровідності цей теплообмін поданий у вигляді від'ємного джерела тепла. Тепловиділення в процесі деформації враховане введенням у рівняння теплопровідності розподілених джерел тепла. Наявність інтенсивності внутрішніх джерел тепла є результатом перетворення частини енергії деформації в теплоту.

Залежно від наявності експериментальних даних про характеристики розсіювання енергії інтенсивність внутрішніх джерел тепла при циклічному навантаженні в області пружних деформацій можна подати такими виразами:

$$q(x, \sigma_a, T, \tau) = \begin{cases} \sigma_a^2 q(x, \tau) \psi(\sigma_a, T) / (2E^*(T)), \\ \sigma_a^2 q(x, \tau) \delta(\sigma_a, T) / (4E^*(T)) \\ D(\sigma_a, T), \\ K_\phi \Delta \varepsilon(x, \tau) \sigma_a(x, \tau), \end{cases}$$

де  $\sigma_a(x, \tau)$  — амплітуда напружень (визначається за результатами розв'язання задачі про коливання);  $\psi(\sigma_a, T)$  — відносне розсіювання енергії, яке дорівнює відношенню площі петлі гістерезису  $D(\sigma_a, T)$  до амплітудного значення потенціальної енергії пружної системи;  $T$  — температура;  $E^*(T)$  — модуль пружності, що дорівнює модулю Юнга при пружних деформаціях;  $\delta(\sigma_a, T)$  — декремент коливань;  $\Delta \varepsilon(x, \tau)$ ,  $K_\phi$  — ширина й коефіцієнт форми петлі гістерезису.

При циклічному навантаженні в області пружно-пластичних деформацій потрібно розрахувати площу пластичного гістерезису, початковими параметрами якого є: межа текучості, модулі пружності і зміцнення матеріалу, амплітуда напружень і деформацій. У цьому випадку інтенсивність внутрішніх джерел тепла визначається виразом

$$q(x, \sigma_a, T, \tau) = \frac{\sigma_T^2}{2E^*(T)} \psi(\sigma_a) \left[ 1 + 2 \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_T} + \frac{E_1}{E} \cdot \frac{\varepsilon_{II}^2}{\varepsilon_T^2} \right],$$

де  $\varepsilon_{II}$  і  $\varepsilon_T$  — пластична деформація і деформація, що відповідає межі текучості;

$$\psi(\sigma_a) = \psi_{0max} + \left[ 1 + \frac{2(\varepsilon_T E + \varepsilon_{II} E_1)^2}{\varepsilon_{II} (E - E_1)(2\varepsilon_T E + \varepsilon_{II} E_1)} \right]^{-1};$$

$\psi_{0max}$  — відносне розсіювання енергії при пружній деформації, що визначається при  $\sigma_a = \sigma_T$  за експериментальною залежністю  $\psi$  від  $\sigma_a$ .

У цій статті отримав розвиток один з підходів до розв'язування нелінійних задач нестационарної теплопро-

відності наближеними аналітичними методами — метод послідовних інтервалів [4 — 5], що полягає в розбитті всього часу навантаження на інтервали, в кожному з яких характеристики матеріалу, внутрішні джерела тепла і коефіцієнти тепловіддачі є сталими. У такій постановці нелінійна задача нестационарної теплопровідності зводиться до сукупності розв'язків лінійних задач з різними початковими і граничними умовами для кожного інтервалу часу. Метод послідовних інтервалів був використаний у працях [4 — 6] для визначення втомної довговічності елементів конструкцій простої форми, що розігріваються внаслідок циклічного навантаження.

Математичне формулювання задачі нестационарної теплопровідності (після деяких перетворень) у безрозмірній формі для кожного інтервалу часу має такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 T_j(\bar{z}, Fo)}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial T_j(\bar{z}, Fo)}{\partial Fo} + L_j T_j(\bar{z}, Fo) + W_j(\bar{z}, T, Fo), \quad (1)$$

$$T_j(\bar{z}, Fo) \Big|_{Fo=0} = \Phi_j(\bar{z}), \quad \Phi_j(\bar{z}) = T_{j-1}(\bar{z}, \Delta Fo_{j-1}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_j(\bar{z}, Fo)}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = 0, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial T_j(\bar{z}, Fo)}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=1} = \varepsilon_2 Bi_{2,j} [f_j(Fo) - \varepsilon_3 T_j(\bar{z}, Fo)] \Big|_{\bar{z}=1}. \quad (3)$$

Тут  $T_j(\bar{z}, Fo)$  — температура стрижня в  $j$ -тому інтервалі часу;  $\bar{z}$  ( $0 \leq \bar{z} \leq 1$ ) — безрозмірна координата;  $\Delta Fo_0 = a_j \tau_j / l^2$  — критерій Фур'є,  $Fo_j \leq Fo \leq \Delta Fo_j$ ;  $\Delta Fo_j$  — інтервал часу;  $a$  — коефіцієнт температуропровідності;  $\tau$  — час;  $l$  — довжина стрижня  $L_j = Bi_{1,j} l^2 / h^2$ ,  $Bi_{1,j} = \alpha_1 h / \lambda_j(T)$ ,  $Bi_{2,j} = a_2 h / I_j(T)$  — критерії Біо;  $a_1$ ,  $a_2$  — коефіцієнти тепловіддачі з бокової поверхні і через торці стрижня в навколишнє середовище;  $h$  — відношення площі перерізу стрижня до периметру перерізу стрижня;  $I_j(T)$  — коефіцієнт теплопровідності;

$$W_j(\bar{z}, T, Fo) = -L_j \Phi_j(\bar{z}) - q_j(\bar{z}, T, Fo) \frac{l^2}{\lambda_j(T)},$$

$j_j(\bar{z})$  — початковий розподіл температури в  $j$ -тому інтервалі часу,  $j=1, 2, \dots, m$ ;  $m$  — кількість інтервалів часу;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — коефіцієнти, які набувають значень  $\pm 1, 0$ . Так, при  $\varepsilon_1=0$ ,  $\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$  взаємодія між навколишнім середовищем і торцями стрижня відповідає граничним умовам першого роду, при  $\varepsilon_1=1$ ,  $\varepsilon_2=-1$ ,  $\varepsilon_3=0$  — граничним умовам другого роду; при  $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$  — граничним умовам третього роду. Функція  $f_j(Fo)$  при цьому набуває значень температури поверхні стрижня, теплового потоку або температури навколишнього середовища.

Постановка задачі (1) — (3) для другого й подальших інтервалів часу відрізняється від постановки задачі для першого інтервалу часу тільки початковими (2) й граничними (3) умовами. Тому розв'язок задачі (1) — (3) для  $j$ -го інтервалу часу можна записати у вигляді

$$T_j(\bar{z}, Fo) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,j} [\mu_{n,i}(\bar{z}), \varphi_n] g_{i,j}^{(n)}(Fo) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{i,j}(\bar{z}, p_k) \cdot \exp(p_k \cdot Fo) \right\} + \Gamma_j^*(\bar{z}, Fo), \quad (4)$$

де

$$E_{i,j}(\bar{z}, p_k) = E_{i,j-1}(\bar{z}, p_k) \cdot \exp(p_k \cdot \Delta Fo_{j-1}) + \frac{g_{i,j}(p_k)}{\psi_j'(p_k)} \cdot Q_j(\bar{z}, p_k),$$

$$\Gamma_j^*(\bar{z}, Fo) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Fo^{(n)}}{n!} \left[ \frac{d^{2n}}{d\bar{z}^{2n}} \cdot \varphi_j(\bar{z}) + \frac{d^{2n}}{d\bar{z}^{2n}} \cdot w_j(\bar{z}, p) \right],$$

$$\varphi_j(\bar{z}) = \Gamma_{j-1}^*(\bar{z}, Fo_{j-1}) + \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,j-1} [\mu_{n,i}(\bar{z}), \varphi_n] \times \right. \\ \left. \times g_{i,j-1}^{(n)}(Fo) \Big|_{Fo=\Delta Fo_{j-1}} \right\},$$

$$g_{1,j}(Fo) = \Gamma_j^*(0, Fo),$$

$$g_{2,j}(Fo) = f_j(Fo) \varepsilon_2 Bi_{2,j} - \varepsilon_1 \Gamma_j^*(1, Fo) - \\ - \varepsilon_2 \varepsilon_3 Bi_{2,j} \Gamma_j^*(1, Fo).$$

Для визначення температурного поля стрижня при малих значеннях  $Fo$  розв'язок (4) задачі (1) — (3) набуває вигляду

$$T_j(\bar{z}, Fo) = T_{j-1}(\bar{z}, \Delta Fo_{j-1}) + \frac{q_{0,j}(\bar{z}, Fo) \cdot h}{\alpha_1} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{Bi_{2,j} ch(\sqrt{L_j} \cdot \bar{z})}{\sqrt{L_j} \cdot sh \sqrt{L_j} + Bi_{2,j} ch(\sqrt{L_j})} \right] - \\ - \frac{2q_{0,j}(\bar{z}, Fo) \cdot Bi_{2,j} \cdot l^2 \cdot \exp(-L_j \cdot Fo)}{\lambda_j} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma_k \cdot \bar{z}) \cdot \exp(-\gamma_k^2 \cdot Fo)}{\gamma_k^2 (\gamma_k^2 + L_j) \cdot \{ \cos \gamma_k + (1 + Bi_{2,j}) \cdot \sin \gamma_k / \gamma_k \}}. \quad (5)$$

Для отримання потрібної точності розв'язку (4) або (5) слід утримувати велику кількість членів ряду. Операційний метод дає можливість отримати асимптотичний розв'язок [4], зручний для малих значень критерію  $Fo$  і полегшує визначення температурного поля стрижня з достатньою точністю. Теплофізичні характеристики, параметри неідеального теплового контакту, зведений коефіцієнт теплообміну, що змінюються від інтервалу до інтервалу східчасто, вибираються за значенням деякої визначальної температури. Як показано в [4, 5], визначальну температуру слід вибирати залежно від конкретних законів зміни нелінійних параметрів і мети дослідження.

Розглянуто розігрів гладкого стрижня круглого поперечного перерізу зі сталі 45 в нормалізованому стані

(залежності фізико-механічних характеристик матеріалу стрижня від температури наведені на рис. 1), з розмірами  $2l=0,13$  м і  $h=R/2=0,00375$  м, який знаходиться під дією циклічного навантаження при різних амплітудах напружень  $\sigma_a$  і частотах навантаження  $n$  (в дужках вказано порядковий номер): 65 Гц (1), 344 Гц (2), 600 Гц (3), 1580 Гц (4), 2535 Гц (5), 3713 Гц (6), 5116 Гц (7), 10675 Гц (8), 18600 Гц (9), 21230 Гц (10).

Протягом усього часу навантаження забезпечується сталість зовнішнього згинаючого моменту. Умови теплообміну ( $a_1 = 20$  Вт·м<sup>2</sup>·К<sup>-1</sup>,  $a_2 = 200$  Вт·м<sup>2</sup>·К<sup>-1</sup>) між відповідно боковою поверхнею, торцями і навколишнім середовищем також є сталими. Тривалість навантаження характеризується безрозмірним часом  $Fo$  (критерієм Фур'є).

Отримані залежності температури від критерію Фур'є в точці стрижня  $\bar{z} = 0$  [4]. При цьому апроксимація зміни механічних і теплофізичних характеристик матеріалу кусково сталими функціями проводилася в межах температурного діапазону шириною 10 °С. Наведені результати показують, що при тепловому навантаженні з малими інтенсивностями джерел тепла існує задовільний збіг результатів розрахунку температури стрижня, отриманих при розв'язуванні лінійної і нелінійної задач нестационарної теплопровідності. При високих інтенсивностях теплового навантаження розв'язки лінійної і нелінійної задач істотно відрізняються. Разом з цим, розв'язки нелінійної задачі теплопровідності методами послідовних інтервалів і скінченних різниць розрізняються неістотно.

Результати розрахунків за формулами (4) і (5) температури стрижня в точці  $\bar{z} = 0$  при  $Fo$ , яке змінюється від 0 до 1, наведені в табл. 1, дуже близькі, що вказувалось у попередніх працях [4].

З даних табл. 1 видно, що з підвищенням інтенсивності джерел тепла розбіжність у результатах дещо збільшується. Це підтверджує доцільність використання асимптотичного розв'язку (5).

Залежно від амплітуди напружень, частоти навантаження швидкість підвищення температури деталей, що знаходяться під дією циклічного навантаження, може змінюватися по-різному. При високих амплітудах напружень і частотах відбувається швидке зростання температури деталі ( $Fo \leq 0,5$ ). Для отримання результатів розрахунку температурного поля стрижня з високою точністю потрібно вибирати оптимальне значення інтервалу часу. В процесі циклічного навантаження з високими частотами залежність температури стрижня від часу навантаження має різко виражену нестационарність. У зв'язку з цим, з деякого моменту часу виникає потреба в зменшенні інтервалу часу при розрахунках. Вплив кроку  $\Delta Fo_j$  на результати розрахунку температури стрижня в точці  $\bar{z} = 0$  показано в табл. 2.

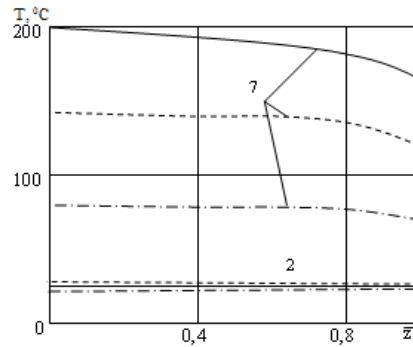
Припускається, що характеристики матеріалу сталі в інтервалах  $\Delta Fo_j = 0,1$ , а приріст  $\Delta Fo_{j,i}$  в інтервалі  $\Delta Fo_j$  варіюється від 0,0001 до 0,1. Зі збільшенням  $\Delta Fo_{j,i}$  спостерігається зростання похибки розрахунків. Таким чином, для отримання вірогідних результатів розрахунку температурного поля оптимальним є приріст  $\Delta Fo_{j,i} = 0,001$ .

При аналізі даних, зведених у табл. 1 і табл. 2, виразно простежується особливість високочастотної деформації, яка пов'язана зі швидким зростанням температури.

Таблиця 1

## Результати розрахунку

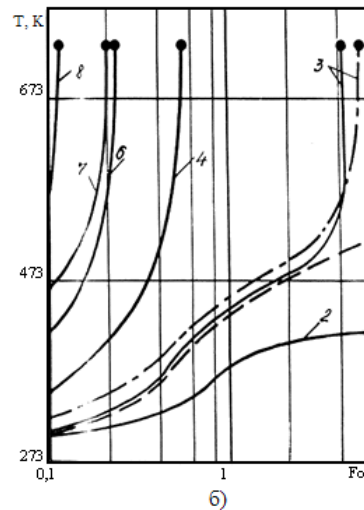
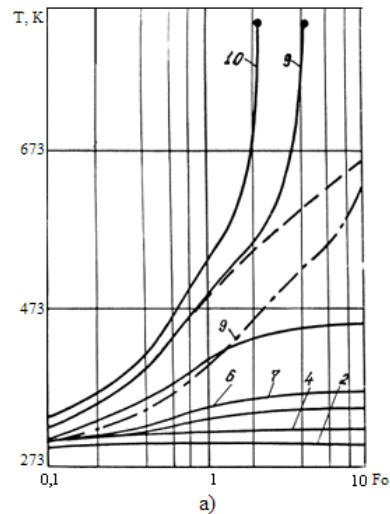
$Fo$	Частота $\nu$ навантаження, Гц					
	63		1580		5116	
	(4)	(5)	(4)	(5)	(4)	(5)
0,001	20,003	20,003	20,06	20,07	20,2	20,24
0,005	20,015	20,017	20,4	20,44	21,3	21,4
0,01	20,028	20,032	20,7	20,8	22,3	22,6
0,05	20,17	20,175	24,3	24,4	34,1	34,5
0,1	20,28	20,30	27,2	27,4	43,8	44,4
0,2	20,561	20,568	34,3	34,5	68	68,8
0,4	21,117	21,124	49,02	49,23	126,6	126,5
0,6	21,67	21,68	64,6	64,8	180	181
0,8	21,23	22,24	81,3	81,6	229	230
1	22,79	22,8	99,5	99,9	329	333

Рис. 2 Температурне поле половини стрижня при різних значеннях  $Fo$ 

Таблиця 2

## Результати розрахунку

$\Delta F_{0,i}$	$Fo$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,0001	20,02	70,69	131,35	187,6	242,26	403,8
0,0005	20,1	70,68	131,32	187,61	242,21	403,22
0,001	20,35	70,67	131,3	187,52	242,17	402,01
0,005	21,3	70,63	131,13	187,51	241,8	400,01
0,01	22,4	70,61	130,9	187,3	241,4	397,2
0,05	32,1	69,79	129	187	138	375,1
0,1	43,77	68,83	126,8	182,23	233,54	345,02

Рис. 3. Залежності температури в небезпечному місці гладкого стрижня (в центрі стрижня) від критерію Фур'є при різних частотах навантаження  $\nu$  для  $\sigma_a=200$  МПа (а) і  $\sigma_a=350$  МПа (б)

При визначенні температурного поля стрижня з погляду зменшення похибки розрахунків, значення якої особливо зростає при різко вираженому підвищенні температури стрижня, апроксимація залежностей механічних і теплофізичних характеристик матеріалу від температури кусково сталими функціями в межах температурних діапазонів  $\Delta T$  є раціональнішою, ніж їх апроксимація в межах інтервалів часу  $\Delta F_{0,j}$ . Однак вибір кроку за температурою також має істотне значення.

На рис. 2 показано температурне поле половини стрижня у фіксований момент часу, цифрами вказаний порядковий номер варіанту навантаження, наведених вище.

Суцільними лініями зображено температурне поле стрижня при  $Fo=1,5$ ; штриховими — при  $Fo=1,2$ ; штрихпунктирними — при  $Fo=0,5$ . Як видно з рис. 2 на температурне поле впливає частота навантаження. Крім цього, зі збільшенням тривалості навантаження при високих частотах збільшується градієнт температури стрижня в його центрі ( $\bar{z}=0$ ) і на торці ( $\bar{z}=1$ ).

На рис. 3,а,б зображені залежності температури в небезпечному місці гладкого стрижня (в центрі стрижня) від критерію Фур'є при різних частотах навантаження  $\nu$  (номери кривих відповідають номеру навантаження з даних, наведених вище) для значень  $\sigma_a=200$  і  $\sigma_a=350$  МПа

відповідно, крапками показані моменти часу, при яких у небезпечному перерізі стрижня досягається граничний напружений стан.

Отримані графіки показують, що температура стрижня може або встановитися в процесі навантаження, або підвищуватися з наростаючою швидкістю. Тому можна підібрати такі значення частот навантаження, при яких залежність  $T$  від  $F_0$  проходить по межі, що розділяє області швидкої і повільної зміни температури.

Графіки на рис. 3 можна застосовувати для дослідження розігріву гладких стрижнів з різними довжинами  $l$  і коефіцієнтами температуропровідності  $a$ . Це дасть можливість, підбираючи матеріал і розміри елементів, забезпечувати їхню роботу в області повільної зміни температур.

Аналіз проведених досліджень показує [4 — 5], що при циклічному навантаженні з низькими (приблизно 400 Гц) частотами існує задовільний збіг результатів розрахунку температурного поля стрижня, отриманих розв'язанням лінійної і нелінійної задач нестационарної теплопровідності. При вищих частотах навантаження відбувається різке підвищення температури, що є причиною розбіжності результатів розрахунку при розв'язуванні лінійної і нелінійної задач нестационарної теплопровідності.

Порівняння результатів розрахунків температурного поля стрижня, що знаходиться під дією циклічного навантаження, отриманих розв'язуванням нелінійної задачі теплопровідності методом послідовних інтервалів і за допомогою числового методу скінченних різниць, свідчить про їх задовільний збіг.

**Висновки.** Математична модель процесу розігріву елементів конструкцій для визначення температурних полів з врахуванням розсіяння енергії базується на наближених аналітичних розв'язках нелінійних задач нестационарної теплопровідності для стрижнів різної конфігурації і надає можливість врахувати й оцінити вплив амплітуди напружень, частоти навантаження, умов теплообміну, геометричних розмірів, форми стрижня й інших параметрів.

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник. — К.: Наук. думка, 1971. — 375 с.

2. Троценко В.Т. Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. — К.: Наук. думка, 1981. — 344 с.

3. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк Б.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. — К.: Наук. думка, 1985. — 288 с.

4. Веселовский В.Б. Сравнение методов решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности для стержня // Техническая механика. — 1999. — №1. — С. 99—111.

5. Веселовский В.Б., Клим В.Ю. Разогрев ограниченного стержня при высокочастотном нагружении // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. — 2001. — Вип.5. — Т. 2. — С. 59—60.

6. Клим В.Ю. Математическое моделирование температурных полей элементов конструкций при циклическом деформировании // Сучасні проблеми механіки та математики. — Львів, 2008. — Т. 1. — С. 84—86.

Отримана 20.10.08

V. Klym

**Mathematical design of warming-up process due to dissipation in elements of constructions at cyclic deformation**  
Oles Gonchar Dniepropetrovsk National University,  
Dniepropetrovsk

*A mathematical model of warming-up process due to dissipation in the elements of constructions at cyclic deformation based on solution of the heat transfer nonlinear nonstationary problem with near analytical method is proposed. The analyze of calculate the temperature fields of the warming-up rod assume to investigate the influence of the different parameters: frequency of cyclic loading, amplitude of the stress, heat change conditions, geometric form of the rod.*

ЗІОІДІ АОЗУ

МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ**

(до 70-річчя кафедри механіки  
ЛНУ ім. І. Франка)

7 — 9 грудня 2009 р.

**Адреса оргкомітету:**

Кафедра механіки, Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів, Україна.

Тел.: (032)-2394370

E-mail: [kafmech@franko.lviv.ua](mailto:kafmech@franko.lviv.ua)  
[sulym@franko.lviv.ua](mailto:sulym@franko.lviv.ua)