

В. Острик

Доцент, д-р. фіз.-мат. наук

О. Щокотова

Аспірантка

Інститут прикладної фізики
НАН України,
м. Суми

УДК 539.3

ГЛАДКИЙ КОНТАКТ ШТАМПА З ПРУЖНИМ КЛИНОМ

Розглянуто задачу про контакт без тертя штампа з прямолінійною основою і пружного клина, одна з граней якого жорстко закріплена, в умовах плоскої деформації. З використанням методу Вінера-Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено розподіли контактних напружень та переміщення точок вільної грані клина.

гладкий контакт, штамп, пружний клин, метод Вінера-Гопфа, контактне напруження, переміщення

Задачі про контактну взаємодію штампів з пружним клином розглядалися в працях [1 — 5, 7 — 9, 12, 13]. У [12, 13] контактні задачі для пружної чвертьплощини зведені до систем інтегральних рівнянь. Наближені розв'язки знайдені методами ортогональних поліномів [8, 9] і колокацій [7]. Асимптотичним методом контактні задачі для клина з різними крайовими умовами на одній з граней розв'язані в [1 — 5].

У цій статті методом Вінера-Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі про втискання штампа з прямолінійною основою у пружний клин, одна з граней якого закріплена, в умовах плоскої деформації.

Постановка задачі. Розглядається плоска контактна задача про втискання штампа з прямолінійною основою у внутрішню частину $l_1 \leq r \leq l$ верхньої грані $J = a$ пружного клина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq J \leq a$ (рис. 1). Нижня грань $J = 0$ клина жорстко закріплена. Під дією нормальної сили P , прикладеної до середини штампа, й моменту M штамп повертається на деякий кут e і зміщується на віддаль b . Сили тертя в області контакту $l_1 \leq r \leq l$ не враховуються.

Змішані крайові умови на гранях клина запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} u_J|_{J=a} &= b - er \quad (l_1 \leq r \leq l), \\ s_J|_{J=a} &= 0 \quad (0 \leq r < l_1, l < r < \infty), \end{aligned}$$

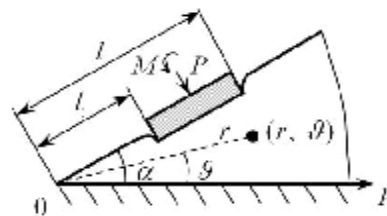


Рис. 1

$$\begin{aligned} t_{rJ}|_{J=a} &= 0 \quad (0 \leq r < \infty), \\ u_r|_{J=0} &= 0, \quad u_J|_{J=0} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Невідомі параметри задачі — кут повороту штампа e та зміщення b визначаються з умов рівноваги штампа:

$$\int_{l_1}^l s_J|_{J=a} dr = -P, \quad \int_{l_1}^l r s_J|_{J=a} dr = M - \frac{l+l_1}{2} P. \quad (2)$$

Інтегральне рівняння. Введемо невідому функцію контактних напружень

$$g(r) = \frac{1}{2G} s_J|_{J=a} \quad (l_1 < r < l), \quad (3)$$

де G — модуль зсуву.

Її перетворення Меліна, завдяки другій крайовій умові (1), має вигляд

$$a(s) = \int_{l_1}^l g(y) y^s dy. \quad (4)$$

Розв'язок основної змішаної задачі для клина, коли на грані $J = a$ задані нормальні напруження і відсутні дотичні напруження, а на грані $J = 0$ — нульові переміщення, отримуємо за допомогою інтегрального перетворення Меліна. На грані $J = a$ клина маємо:

$$u_J|_{J=a} = \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(s) a(s) r^{-s} ds,$$

$$u_r|_{J=a} = \frac{1}{pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M^*(s) a(s) r^{-s} ds,$$

$$\frac{1}{2G} S_J|_{J=a} = \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds \quad (-1 < c < 0),$$

$$M(s) = 2(m-1) \frac{I(s)}{s\Delta(s)}, \quad M^*(s) = \frac{I^*(s)}{s\Delta(s)},$$

$$\Delta(s) = (3m-4)m(\cos 2s\alpha - 1) - 2m^2 s^2 \sin^2 \alpha + 8(m-1)^2,$$

$$\lambda(s) = (3m-4) \sin 2s\alpha - ms \sin 2\alpha,$$

$$\lambda^*(s) = (3m-4)(m-2) \sin^2 s\alpha - ms(ms+2m-2) \sin^2 \alpha, \quad (5)$$

де m — число Пуасона.

Розв'язок (5) задовольняє усі крайові умови (1), крім першої. Підставимо в цю умову вираз для колових переміщень з (5) з урахуванням (3), (4). Після заміни змінних

$$r = le^{-x}, \quad y = le^{-h} \quad (6)$$

та введення нової невідомої функції

$$j(h) = g(le^{-h})e^{-h} \quad (7)$$

отримаємо інтегральне рівняння з різницеvim ядром на скінченному проміжку:

$$\int_0^a k(x-h)j(h)dh = f(x) \quad (0 \leq x \leq a), \quad a = \ln\left(\frac{l}{l_1}\right), \quad (8)$$

$$k(x-h) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-it(x-h)} dt,$$

$$K(z) = \frac{M(-iz)}{2(m-1)} = \frac{I(-iz)}{-iz\Delta(-iz)}, \quad f(x) = \frac{1}{2(m-1)} \left(\frac{b}{l} - ee^{-x} \right).$$

Розв'язання інтегрального рівняння. Знайдемо розв'язок інтегрального рівняння (8), використовуючи підхід праці [6]. Поклавши $j(h) = 0$ при $h < 0$ і $h > a$, розповсюдимо інтегральне рівняння (8) на всю числову вісь:

$$\int_0^a k(x-h)j(h)dh = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \int_0^a k(x-h)j(h)dh, & x < 0, x > a \end{cases} = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases} \quad (9)$$

і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є.

Увівши невідомі функції комплексної змінної:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^a j(x)e^{izx} dx,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-a}^0 j(x+a)e^{izx} dx,$$

$$\Psi^+(z) = -\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2p}} \int_a^{\infty} e^{izx} dx \int_0^a k(x-h)j(h)dh,$$

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^0 e^{izx} dx \int_0^a k(x-h)j(h)dh, \quad (10)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$), приходимо до системи функціональних рівнянь Вінера-Гопфа [10]:

$$K(z)\Phi^+(z) + e^{iza}\Psi^+(z) - \Psi^-(z) = F^+(z),$$

$$\Phi^+(z) = e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-), \quad (11)$$

де права частина $F^+(z)$ є аналітичною функцією у верхній півплощині й перетворюється за теорією лишків до вигляду

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a f(\xi)e^{iz\xi} d\xi =$$

$$= A \left(ie \frac{e^{a(iz-1)} - 1}{z+i} - \frac{ib}{l} \frac{e^{iza} - 1}{z} \right), \quad (12)$$

$$\text{де } A = \frac{1}{2\sqrt{2p}(m-1)}.$$

Для розв'язання системи функціональних рівнянь (11) спочатку зведемо її до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь. Коефіцієнт $K(z)$ факторизуємо у такому вигляді:

$$K(z) = K^+(z)K^-(z), \quad (13)$$

де $K^+(z)$ і $K^-(z)$ — функції, які аналітичні й не перетворюються в нуль у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ відповідно.

Факторизацію здійснюємо у вигляді нескінченних добутків [11]:

$$K^+(z) \equiv K(0)K^-(z) = K(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{is_n} \right) \left(1 + \frac{z}{id_n} \right)^{-1}, \quad (14)$$

де s_n і d_n ($n=1, 2, \dots$) — корені рівнянь $\lambda(s)=0$ і $\Delta(s)=0$ з півплощини $\text{Re } s > 0$.

Після факторизації систему функціональних рівнянь (11) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} K^+(z)\Phi^+(z) + \left\{ \frac{e^{iza}}{K^-(z)} \left[\Psi^+(z) - A \left(\frac{iee^{-a}}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) \right] - \frac{iAb}{lz} \right\} = \\ = \frac{\Psi^-(z)}{K^-(z)} - \left\{ \frac{A}{K^-(z)} \left(\frac{ie}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) + \frac{iAb}{lz} \right\}, \\ \frac{A}{K^+(z)} \left(\frac{iee^{-a}}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) + \frac{iAb}{IK(0)z} - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} = K^-(z)\Phi^-(z) - \\ - \left\{ \frac{e^{-iza}}{K^+(z)} \left[\Psi^-(z) - A \left(\frac{ie}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) \right] - \frac{iAb}{IK(0)z} \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Обидві частини кожного з рівнянь (15) аналітичні у смугі $c^+ < \text{Im } z < c^-$ за рахунок знищення полюса у точці $z=0$. Крім виразів, відокремлених фігурними дужками, ліві частини рівнянь (15) є аналітичними функціями у верхній, а праві частини — у нижній півплощинах.

Факторизуємо ці вирази у різницю функцій, аналітичних у півплощинах $\text{Im } z > c^+$, $\text{Im } z < c^-$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{iza}}{K^-(z)} \left[\Psi^+(z) - A \left(\frac{iee^{-a}}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) \right] - \frac{iAb}{lz} = c_1^+(z) - c_1^-(z), \\ - \frac{e^{-iza}}{K^+(z)} \left[\Psi^-(z) - A \left(\frac{ie}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) \right] + \frac{iAb}{IK(0)z} = \\ = c_2^+(z) - c_2^-(z), \\ - \frac{A}{K^-(z)} \left(\frac{ie}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) - \frac{iAb}{lz} = f_1^+(z) - f_1^-(z). \quad (16) \end{aligned}$$

Визначимо функції факторизації $c_{1,2}^{\pm}(z)$ та $f_1^{\pm}(z)$, подавши їх у вигляді інтегралів типу Коші вздовж дійсної осі. Розклавши інтеграли у ряди за лишками підінтегральної функції, знайдемо:

$$\begin{aligned} c_1^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(0)a_k e^{-s_k a}}{s_k + iz} \left[\Psi^+(is_k) - A \left(\frac{ee^{-a}}{1+s_k} - \frac{b}{ls_k} \right) \right], \\ c_2^+(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k e^{-s_k a}}{s_k - iz} \left[\Psi^-(is_k) - A \left(\frac{e}{1-s_k} + \frac{b}{ls_k} \right) \right] + \frac{B_1 e}{1-iz}, \\ f_1^+(z) = - \frac{Ae}{K^-(z)(1-iz)}, \quad a_k = \frac{s_k \Delta(s_k) K^-(is_k)}{I'(s_k)}, \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}(m \cos^2 a - 1) K^-(z) e^{-a}}{\sqrt{p}(m-2) \sin 2a}. \quad (17)$$

Ліва частина другого рівняння з (15) є функція, аналітична у верхній півплощині:

$$\begin{aligned} \frac{A}{K^+(z)} \left(\frac{iee^{-a}}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) + \frac{iAb}{IK(0)z} - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} = \\ = f_2^+(z) - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)}. \quad (18) \end{aligned}$$

Виконані факторизації дають змогу віднести до лівої частини функціональних рівнянь функції, аналітичні у верхній півплощині, а до правої частини — у нижній, тобто подати функціональні рівняння (15) у вигляді:

$$\begin{aligned} K^+(z)\Phi^+(z) + c_1^+(z) - f_1^+(z) = \frac{\Psi^-(z)}{K^-(z)} + c_1^-(z) - f_1^-(z), \\ f_2^+(z) - c_2^+(z) - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} = K^-(z)\Phi^-(z) - c_2^-(z). \quad (19) \end{aligned}$$

Для кожного рівняння (19) ліва і права частини аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є довільною цілою функцією, яку визначимо з умов на нескінченності. Враховуючи асимптотичні оцінки:

$$\begin{aligned} K^{\pm}(z) = O(z^{-1/2}), \quad \Phi^{\pm}(z) = o(1), \quad f_1^{\pm}(z) = O(z^{-1}), \\ c_1^+(z) = O(z^{-1}), \quad c_2^-(z) = O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (20) \end{aligned}$$

стверджуємо, що обидві частини кожного рівняння з (19) тотожно дорівнюють нулеві. Отже, знаходимо:

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) = [f_1^+(z) - c_1^+(z)] / K^+(z), \\ \Phi^-(z) = c_2^-(z) / K^-(z), \\ \Psi^+(z) = K^+(z) [f_2^+(z) - c_2^+(z)], \\ \Psi^-(z) = K^-(z) [f_1^-(z) - c_1^-(z)]. \quad (21) \end{aligned}$$

Розв'язок (21) системи функціональних рівнянь (11) містить невідомі функціонали $\Psi^+(is_k)$, $\Psi^-(is_k)$ ($k=1, 2, \dots$) з формул (17), для знаходження яких покладемо у третій рівності (21) $z=is_n$, а у четвертій — $z=-is_n$ ($n=1, 2, \dots$). З урахуванням асимптотичної поведінки коренів $s_k \sim \pi k / 2\alpha$, $k \rightarrow \infty$, введемо малий параметр $I = e^{-p\alpha/2a}$ ($0 < I < 1$). Тоді відносно невідомих

$$\begin{aligned} z_k^+ = \Psi^+(is_k) - A \left(\frac{ee^{-a}}{1+s_k} - \frac{b}{ls_k} \right), \\ z_k^- = \Psi^-(is_k) - A \left(\frac{e}{1-s_k} + \frac{b}{ls_k} \right) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (22) \end{aligned}$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь:

$$z_n^+ + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_n + s_k} z_k^- \lambda^k = f_n^+,$$

$$z_n^- + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_n + s_k} z_k^+ \lambda^k = f_n^- \quad (n=1, 2, \dots), \quad (23)$$

$$\beta_n = K^+(is_n), \quad \alpha_k = \alpha_k e^{-(s_k - \frac{mk}{2\alpha})a},$$

$$f_n^+ = \beta_n \left(\frac{Ab}{lK(0)s_n} - \frac{B_1 \varepsilon}{s_n + 1} \right),$$

$$f_n^- = -A\beta_n \left(\frac{b}{lK(0)s_n} - \frac{\varepsilon}{K^+(i)(s_n - 1)} \right).$$

Розв'язок системи рівнянь (23) подамо у вигляді

$$z_k^{\pm} = \sum_{m=0}^{\infty} x_{km}^{\pm} l^m \quad (k=1, 2, \dots). \quad (24)$$

Після підстановки розвинень (24) у рівняння (23) знаходимо

$$x_{n0}^{\pm} = f_n^{\pm} \quad (25)$$

та отримуємо рекурентні співвідношення:

$$x_{nm}^+ = -b_n \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{s_n + s_k} x_{k,m-k}^-,$$

$$x_{nm}^- = -b_n \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{s_n + s_k} x_{k,m-k}^+ \quad (26)$$

для визначення коефіцієнтів x_{nm}^{\pm} ($n, m=1, 2, \dots$).

Розв'язок системи рівнянь (23) подамо у вигляді

$$z_k^{\pm} = \varepsilon \frac{\alpha_k}{s_k} + (b/l) z_k^{\pm}. \quad (27)$$

Тоді з умов рівноваги (2) отримаємо лінійну систему рівнянь:

$$a_{11} \bar{\varepsilon} + a_{12} \bar{b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$a_{21} \bar{\varepsilon} + a_{22} \bar{b} = \frac{1}{2} K^-(i) (1 + e^{-a}) - \frac{MK^-(i)}{Pl},$$

$$\text{де } a_{11} = \frac{A}{K^+(i)} - B_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k} \left(\frac{\alpha_k}{s_k} - \frac{\alpha_k}{s_k} \right) \lambda^k,$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k} \left(\frac{\alpha_k}{s_k} - \frac{\alpha_k}{s_k} \right) \lambda^k,$$

$$a_{21} = \frac{1}{4(m-1)K^+(i)} - \frac{\sqrt{\pi} B_1 B_2}{\sqrt{2}} +$$

$$+ \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda^k \left(\frac{\alpha_k}{s_k - 1} - \frac{B_2 \alpha_k}{s_k + 1} \right),$$

$$a_{22} = \frac{B_2 - 1}{2(m-1)K(0)} + \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda^k \left(\frac{\alpha_k}{s_k - 1} - \frac{B_2 \alpha_k}{s_k + 1} \right),$$

$$B_2 = \frac{K^-(i)e^{-a}}{K^-(i)} \quad (28)$$

для визначення параметрів $\bar{\varepsilon} = (2Gl/P)\varepsilon$ і $\bar{b} = (2G/P)b$.

Розв'язок інтегрального рівняння (8) знаходимо оберненням першого зі співвідношень (10) з урахуванням рівностей (13), (16), (21):

$$j(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-ixt} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1^+(t) - c_1^+(t)}{K^+(t)} e^{-ixt} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{K(t)} \left[\Psi^-(t) - A \left(\frac{ie}{t+i} - \frac{ib}{lt} \right) \right] e^{-ixt} dt -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{K(t)} \left[\Psi^+(t) - A \left(\frac{ie e^{-a}}{t+i} - \frac{ib}{lt} \right) \right] e^{it(a-x)} dt$$

$$(0 \leq x \leq a). \quad (29)$$

Напруження й переміщення на незакріпленій грані клина. Перетворивши інтеграли з (29) за теорією лишків, використовуючи заміни (3), (7), отримуємо контактні напруження:

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=\alpha} = -\frac{2\varepsilon(m \cos^2 \alpha - 1)}{(m-2) \sin 2\alpha} + \frac{\sqrt{2\pi} Ab}{K(0)r} +$$

$$+ \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \Delta(s_k)}{\lambda'(s_k)} \left[\frac{l}{l_1} \left(\varepsilon \frac{\alpha_k}{s_k} + (b/l) z_k^+ \right) \left(\frac{r}{l_1} \right)^{-s_k-1} - \right.$$

$$\left. - \left(\varepsilon \frac{\alpha_k}{s_k} + (b/l) z_k^- \right) \left(\frac{r}{l} \right)^{s_k-1} \right] \quad (l_1 < r < l). \quad (30)$$

Поблизу країв штампa контактні напруження необмежені. Їх асимптотичну поведінку знаходимо застосовуючи лему Ватсона [14]:

$$\int_0^a x^{r-1} j_1(x) e^{izx} dx \sim \Gamma(r) j_1(0) (-iz)^{-r},$$

$$|z| \rightarrow \infty \quad (31)$$

до інтегралів (10), що представляють функції $\Phi^{\pm}(z)$. У результаті маємо:

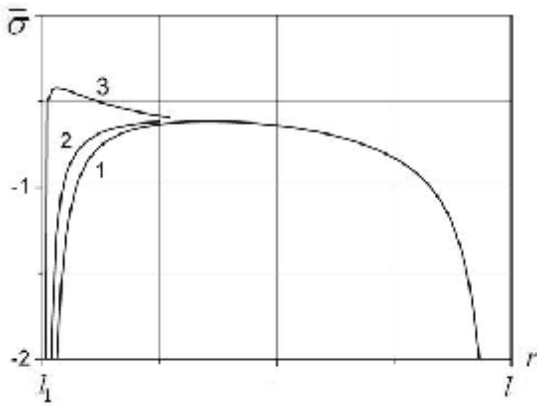


Рис. 2

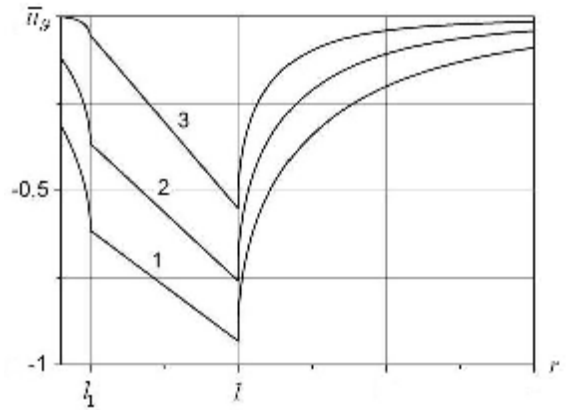


Рис. 3

$$\frac{S_J}{2G} \Big|_{J=a} = D_1 \frac{l}{l_1} \left(\frac{r}{l_1} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad r \rightarrow l_1 + 0,$$

$$D_1 = -\sqrt{2mK(0)} \left(B_1 e - \frac{Ab}{IK(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_k}{d_n - s_k} I^k \left(e^{\frac{r}{l_1}} + (b/l) z_k^+ \right) \right),$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{2m}{K(0)}} \left(-\frac{Ae}{K^-(-i)} + \frac{Ab}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} K(0) \frac{\mathcal{A}_k}{d_n - s_k} I^k \left(e^{\frac{r}{l_1}} + (b/l) z_k^+ \right) \right). \quad (32)$$

Визначимо переміщення точок верхньої грані клина з першого і другого співвідношень (5), використовуючи вираз для $a(s)$ з (4), заміни (6), (7) та першу рівність з (10):

$$u_J \Big|_{J=a} = \frac{l}{i\sqrt{2p}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi^+(is) M(s) e^{sx} ds,$$

$$u_r \Big|_{J=a} = \frac{\sqrt{2l}}{i\sqrt{p}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi^+(is) M^*(s) e^{sx} ds. \quad (33)$$

Перетворюючи ці інтеграли, аналогічно (29), і застосовуючи теорію лишків, отримуємо:

$$u_J \Big|_{J=a} = A^{-1} l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n I(-d_n)}{d_n \Delta'(-d_n) K^-(-id_n)} \left(\frac{r}{l_1} \right)^{d_n},$$

$$u_r \Big|_{J=a} = 2\sqrt{2pl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n I^*(-d_n)}{d_n \Delta'(-d_n) K^-(-id_n)} \left(\frac{r}{l_1} \right)^{d_n} \quad (0 \leq r < l_1),$$

$$u_J \Big|_{J=a} = A^{-1} l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n I(d_n)}{d_n \Delta'(d_n) K^+(id_n)} \left(\frac{r}{l} \right)^{-d_n},$$

$$u_r \Big|_{J=a} = 2\sqrt{2pl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n I^*(d_n)}{d_n \Delta'(d_n) K^+(id_n)} \left(\frac{r}{l} \right)^{-d_n} \quad (l < r < \infty),$$

$$u_r \Big|_{J=a} = e r \operatorname{tg} a + 2\sqrt{2pl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{I'(s_k)} \left[I^*(s_k) \left(e^{\frac{r}{l_1}} + (b/l) z_k^+ \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{r}{l_1} \right)^{-s_k} + I^*(-s_k) \left(e^{\frac{r}{l_1}} + (b/l) z_k^- \right) \left(\frac{r}{l} \right)^{s_k} \right] \quad (l_1 \leq r \leq l),$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_k I^k}{d_n - s_k} \left(e^{\frac{r}{l_1}} + (b/l) z_k^- \right) + \frac{B_1 e}{d_n - 1} - \frac{Ab}{IK(0) d_n},$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(0) \mathcal{A}_k I^k}{s_k - d_n} \left(e^{\frac{r}{l_1}} + (b/l) z_k^+ \right) + A \left(\frac{e}{K^-(-i)(d_n + 1)} - \frac{b}{l d_n} \right). \quad (34)$$

Результати розрахунків. На рис. 2 — рис. 4 подано результати обчислень контактних напружень та переміщень точок грані $J = a$ пружного клина за відсутності момента ($M = 0$, $m = 10/3$, $\alpha = \pi/4$). Криві 1, 2, 3 відповідають відносним розмірам області контакту $l/l_1 = 3/2, 2, 6$.

Розподіл безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma} = (l - l_1) P^{-1} S_J \Big|_{J=a}$ наведено на рис. 2. Результати обчислень показують, що при збільшенні відносного розміру області контакту l/l_1 , тобто при наближенні штампа до вершини клина, спостерігається тенденція відривання лівого краю штампа. При віддаленні штампа від вершини клина розподіл контактних напружень стає майже симетричним.

На рис. 3, рис. 4 подані безрозмірні нормальні $\bar{u}_J = (2G/P) u_J \Big|_{J=a}$ і радіальні $\bar{u}_r = (2G/P) u_r \Big|_{J=a}$ переміщення точок верхньої грані пружного клина. Як видно з рис. 4, граничні точки пружного клина зміщуються у напрямі від вершини клина. Їх рух істотно стримується в околі правого краю штампа ($r = l$). У випадках, коли штамп значно віддалений від вершини клина, у зоні, прилеглої до його правого краю ($r > l$), спостерігається зміщення точок клина під штамп, так само, як при втисканні штампа у пружну півплощину.

Висновки. З використанням методу Вінера-Гопфа знайдено аналітичний розв'язок контактної задачі для пружного клина, одна грань якого закріплена, а в іншу втискається штамп з прямолінійною основою. Інтегральне рівняння задачі зведено до нескінченної системи

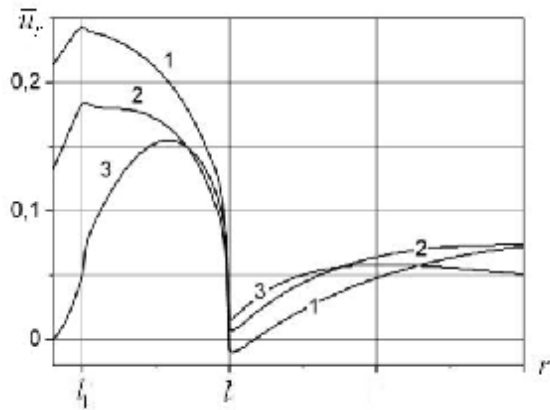


Рис. 4

алгебричних рівнянь, розв'язок якої знайдено у рядах за степенями малого параметра. Отримано розподіл контактних напружень і переміщення верхньої межі клина. Показано, що з наближенням штампа до вершини клина, розподіл контактних напружень істотно змінюється. На частині області контакту, наближеній до закріпленої грані клина, рівень напружень спадає. З'ясовано, що зі зменшенням віддалі краю штампа від закріпленої частини межі клина, напрям проковзування граничних точок вільної частини межі клина змінюється на протилежний, на відміну від задачі про втискання штампа у пружну півплощину спостерігається проковзування межі пружного клина в напрямі з-під штампа за межі області контакту.

Література

1. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1967. – 20, № 1. – С. 3-13.
2. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – № 2. – С. 120-131.
3. Александров В. М. К контактными задачам для упругого клина с одной защемленной гранью // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1968. – 21, № 2. – С. 17-27.

4. Александров В. М. Контактные задачи для упругого плоского клина // В сб.: Контактные задачи и их инженерные приложения. – М.: Изд. НИИмаш, 1969.
5. Александров В. М., Копасенко В. В. Контактная задача для упругого клина с жестко защемленной гранью // Прикл. механика. – 1968. – 4, вып. 7.
6. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. 1987. – № 7. – С. 29–33.
7. Бронштейн М. И. Решение контактной задачи для штампа на клиновидном основании // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1968. – Вып. 4. – С. 2-4.
8. Лутченко С. А. О вдавливании штампов в боковую поверхность упругого основания в виде клина // Прикл. механика. – 1966. – 2, вып. 12. – С. 61-66.
9. Лутченко С. А., Попов Г. Я. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости для клина // Прикл. механика. – 1970. – 6, вып. 3. – С. 64–71.
10. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. – М/: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
11. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
12. Тоноян В. С. Об одной плоской контактной задаче для упругой четвертьплоскости // Докл. АН АрмССР. – 1963. – 37, №3. – С. 121–130.
13. Тоноян В. С. Плоская контактная задача для упругой четвертьплоскости с неподвижной вертикальной кромкой // Докл. АН АрмССР. – 1963. – 37, № 5. – С. 249–258.
14. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М/: Наука, 1987. – 544 с.

Отримана 20.05.09

V. Ostrik, O. Schokotova
Smooth contact of punch with elastic wedge
 Інститут прикладної фізики НАН України, м. Суми

The problem of smooth contact punch with straight foundation and elastic wedge in the conditions of flat deformation is considered. One facet of the wedge is fixed. Using the method of Wiener-Hopf received the analytic solution of the problem. The distribution of contact stresses and the displacements of free boundary of the wedge was found.

²í ôî ðî àö³ÿ

BIOMECHANICS OF HUMAN MOTION. NEW FRONTIERS OF MULTIBODY TECHNIQUES FOR CLINICAL APPLICATIONS

March 2010
 Ponta Delgada, Azores, Portugal

Contact

Prof. Jorge A.C. Ambrosio
 IDMEC- Instituto Superior Tecnico
 Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisbon Portugal.
 Phone: +351 2184 17680; fax: +351 2184 17915.
 mail: Jorge@dem.ist.utl.pt