

УДК 539.3

ТЕРМІЧНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ ЗА ЗАЛЕЖНИХ ВІД РАДІУСА КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Б. Хапко

Ст. наук. співр., канд. фіз.-мат. наук

А. Чиж

Аспірант

Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів

Досліджено термічні переміщення круглої пластини за залежних від радіуса коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь і різних значень температур зовнішнього середовища на них. Запропоновано спосіб зведення задачі теплопровідності до взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтери та Фредгольма другого роду. За допомогою методу квадратурних формул побудовано числову схему розв'язування цих інтегральних рівнянь. Наведено результати числового аналізу розподілу радіального переміщення, прогину й температурного моменту для круглої пластини.

температурна характеристика, коефіцієнт тепловіддачі, інтегральне рівняння, інтегральний оператор, переміщення

Теплові властивості тіл на їхній поверхні часто змінюються як у процесі виготовлення, так і за локального нагріву по областях різної розмірності, наплавлюванні, шліфуванні, імпульсній технології поверхневого зміцнення тощо. На окремих, але довільних областях поверхонь тонкостінних елементів конструкцій (пластини, оболонки), коефіцієнти тепловіддачі можуть відрізнятися між собою і математично описуються кусково сталими функціями координат. Відмінність коефіцієнтів тепловіддачі на окремих областях лицевих поверхонь таких елементів конструкцій приводить до перерозподілу температурного поля, а, отже, і термонапружень у них. Дослідження термонапруженого стану зазначених конструкцій з врахуванням зміни коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь є актуальним завданням і вимагає постави відповідних неklasичних крайових задач, а для їх розв'язування — розроблення відповідних математичних методів.

Плоскі задачі термопружності в пластинах при кусково сталих коефіцієнтах тепловіддачі і за вузькозональ-

ного нагріву розглянуті в [1, 2]. У [3] знайдено напружений стан нескінченної пластини, яка нагрівається зовнішнім середовищем по кільцевій області. Модифікованим методом Vodicka's досліджено напружено-деформований стан круглої пластини з різними теплофізичними характеристиками по кільцях у праці [4].

У цій статті на основі використання функції Гевісайда та отриманих інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтери і Фредгольма другого роду досліджуються термічні переміщення круглої пластини із залежними від радіуса коефіцієнтами тепловіддачі на лицевих поверхнях, які перебувають під дією температури довкілля.

Постава задачі. Розглянемо тонку круглу пластину, радіус якої віднесений до її півтовщини h , яка перебуває в умовах конвективного теплообміну з довкіллям температури t_c^\pm , відповідно на поверхнях $z = \pm h$. Коефіцієнти тепловіддачі круглої пластини різні на n її кільцевих областях ($r_{n-1} \leq r < r_n$, $r_0 = 0$, $r_n = l$), причому на

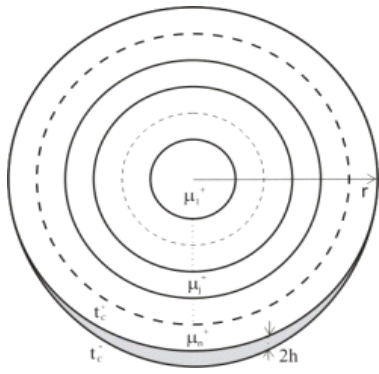


Рис. 1

кожному з цих кілець вони на верхній і нижній поверхнях неоднакові (рис. 1) і набувають значень

$$\mu^{\pm}(r) = \mu_1^{\pm} + \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_{j+1}^{\pm} - \mu_j^{\pm}) S_{-}(r - r_j),$$

де $S_{-}(r - r_j) = \begin{cases} 1, & r \geq r_j, \\ 0, & r < r_j, \end{cases}$ — асиметрична функція

Гевісайда, μ_j^{\pm} — коефіцієнти тепловіддачі відповідно на поверхнях $z = \pm h$ j -го кільця.

На торці $r = l$ пластини, яка вільна від механічного навантаження, задано температуру середовища або конвективний теплообмін і ковзне закріплення.

Температурне поле. Стационарне температурне поле в круглій пластині за лінійного розподілу температури за товщиною через температурні характеристики описується рівняннями [5]:

$$\Delta T_1(r) - \mu_1(r)[T_1(r) - t_1] - \mu_2(r)[T_2(r) - t_2] = 0, \quad (1)$$

$$\Delta T_2(r) - 3[1 + \mu_1(r)][T_2(r) - t_2] - 3\mu_2(r)[T_1(r) - t_1] = 3t_2,$$

за таких граничних умов:

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T_i|_{r=l} = T_{ic}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Тут

$$\mu_{1,2}(r) = \eta_1^{\pm} + \sum_{j=1}^{n-1} (\eta_{j+1}^{\pm} - \eta_j^{\pm}) S_{-}(r - r_j); \quad (3)$$

$$t_{1,2} = \frac{t_c^+ \pm t_c^-}{2}; \quad \eta_n^{\pm} = \frac{\mu_n^+ \pm \mu_n^-}{2} h; \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right); \quad T_{ic} —$$

температура довкільля на межі $r = l$; $T_1(r) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t dz$,

$T_2(r) = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h t z dz$ — інтегральні температурні характе-

ристики; t — температура пластини.

Методика розв'язування задачі теплопровідності.

Розв'язок звичайного лінійного диференціального рівняння n -го порядку з кусково сталими коефіцієнтами через фундаментальну систему розв'язків будували в [6 — 8], а шляхом зведення його до частково виродженого диференціального рівняння — в [9 — 10].

У нашому випадку система диференціальних рівнянь (1) є взаємозв'язаною з кусково сталими коефіцієнтами. У зв'язку з цим, задачу (1), (2) зведемо до взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь. Для цього підставимо значення $\mu_{1,2}(r)$ з (3) в систему диференціальних рівнянь (1) і перенесемо у праву частину всі доданки з розривними і відомими функціями в кожному з рівнянь. Введемо заміну функцій

$$T_i = t_i + (-1)^{2-i} \left[-\lambda_2^{2-i} F_1 + \lambda_1^{2-i} \lambda_2 F_2 \right] / (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (4)$$

Тоді з (1), (2) для визначення функцій F_i отримаємо:

$$\Delta F_i - a_i^2 F_i = V_i + p_i t_2; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad F_i|_{r=l} = e_i; \quad i = 1, 2; \quad (6)$$

де

$$V_i(r) = \sum_{j=1}^{n-1} [d_{ji} F_1(r) + d_{ji+2} F_2(r)] S_{-}(r - r_j); \quad p_i = 3\lambda_1^{2-i};$$

$$a_i^2 = \eta_1^+ + 3\eta_1^- \lambda_i; \quad \lambda_2^{i-1} e_i = (T_{ic} - t_1) + \lambda_i (T_{2c} - t_2);$$

$$\lambda_{1,2} = \left[3 + 2\eta_1^+ \sqrt{(3 + 2\eta_1^+)^2 + 12(\eta_1^-)^2} \right] (6\eta_1^-)^{-1};$$

$$d_{j1} = \frac{(\eta_{j+1}^+ - \eta_j^+) (\lambda_2 - 3\lambda_1) + (\eta_{j+1}^- - \eta_j^-) (3\lambda_1 \lambda_2 - 1)}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

$$d_{j3} = \frac{(\eta_{j+1}^+ - \eta_j^+) (-2\lambda_2) + (\eta_{j+1}^- - \eta_j^-) (3\lambda_2^2 - 1)}{(\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2};$$

$$d_{j2} = \frac{(\eta_{j+1}^+ - \eta_j^+) 2\lambda_1 \lambda_2 + (\eta_{j+1}^- - \eta_j^-) (\lambda_2 - 3\lambda_1^2 \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

$$d_{j4} = \frac{(\eta_{j+1}^+ - \eta_j^+) (3\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2) + (\eta_{j+1}^- - \eta_j^-) (\lambda_2 - 3\lambda_1 \lambda_2^2)}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Використовуючи метод варіації сталої і враховуючи граничні умови, розв'язок задачі (5), (6) зведемо до розв'язування взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтери і Фредгольма другого роду:

$$F_i(r) - \int_0^{r-1} \sum_{j=1}^{n-1} [d_{ji} F_1(s) + d_{ji+2} F_2(s)] S_{-}(s - s_j) P_i(r, s) ds + \int_0^l \sum_{j=1}^{n-1} [d_{ji} F_1(s) + d_{ji+2} F_2(s)] S_{-}(s - s_j) P_{i1}(r, s) ds = f_i(r). \quad (7)$$

Тут

$$f_i(r) = \frac{e_i I_0(a_i r)}{I_0(a_i l)} + \left(\frac{I_0(a_i r)}{I_0(a_i l)} - 1 \right) \frac{3\lambda_1^{2-i} t_2}{a_i^2};$$

$$P_i(r, s) = s [I_0(a_i r) K_0(a_i s) - I_0(a_i s) K_0(a_i r)];$$

$$P_{i1}(r, s) = \frac{I_0(a_i r)}{I_0(a_i l)} P_i(l, s).$$

Систему рівнянь (7) будемо розв'язувати числово методом квадратурних формул [12]. Подамо схему числового розв'язування на прикладі першого інтегрального рівняння ($i = 1$) системи (7). Розглянемо другий інтеграл першого інтегрального рівняння і, використавши властивості функції $S_-(r - r_j)$, запишемо його як суму $2n - 2$ інтегралів на окремих відрізках $[r_j, r_{j+1}]$:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sum_{j=1}^{n-1} [d_{ji} F_1(s) + d_{ji+2} F_2(s)] S_-(s - s_j) P_{i1}(r, s) ds = \\ = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{r_j}^{r_{j+1}} d_{ji} F_1 S_-(s - s_j) P_{i1}(r, s) ds + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{r_j}^{r_{j+1}} d_{ji+2} F_2 S_-(s - s_j) P_{i1}(r, s) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Інтеграли у правій частині рівності (8) на відрізку $[r_j, r_{j+1}]$ подамо у вигляді квадратурних формул, наприклад,

$$\begin{aligned} \int_{r_j}^{r_{j+1}} d_{ji} F_1 S_-(s - s_j) P_{i1}(r, s) ds = \\ = \sum_{k=1}^m d_{j1} A_{jk} F_1(r_{jk}) P_{i1}(r, r_{jk}), \end{aligned} \quad (9)$$

де відрізок $[r_j, r_{j+1}]$ розбивається на $m - 1$ рівних частин $\xi_j = (r_{j+1} - r_j) / (m - 1)$; число $m \geq 3$ — непарне; коефіцієнти A_{jk} визначаються за формулами $A_{j1} = A_{jm} = \xi_j / 3$, $A_{jk} = 4\xi_j / 3$ коли k парне і $A_{jk} = 2\xi_j / 3$ — коли k — непарне.

Розглянемо інтеграл зі змінною верхньою межею інтегрування в першому інтегральному рівнянні ($i = 1$) системи (7). Аналогічно, як вказано вище, запишемо його як суму інтегралів на окремих відрізках $[r_j, r_{j+1}]$, але кількість доданків у сумі буде залежати від того, на якому з відрізків $[r_j, r_{j+1}]$ знаходиться поточна точка верхньої межі інтегрування. Інтеграл на відрізку $[r_j, r_{j+1}]$, де знаходиться поточна точка верхньої межі інтегрування, подається у вигляді квадратурної формули

$$\int_{r_j}^r d_{j1} F_1 S_-(s - s_j) P_{i1}(r, s) ds = \sum_{k=1}^{\gamma} d_{j1} A_{jk} F_1(r_{jk}) P_{i1}(r, r_{jk}), \quad (10)$$

де відрізок $[r_j, r_{j+1}]$ також, як у формулі (9), розбивається на $m - 1$ рівних частин.

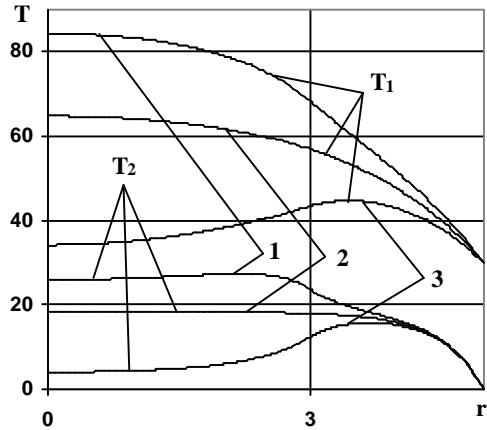


Рис. 2

Поточна точка верхньої межі інтегрування r не завжди збігається з точкою розбиття на вказаному відрізку $[r_j, r_{j+1}]$, тому вибираємо найближчу до неї точку розбиття $r_{j\gamma}$, яка має номер γ ($1 \leq \gamma \leq m$). Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^r \sum_{j=1}^{n-1} d_{ji} F_1 S_-(s - s_j) P_{i1}(r, s) ds = \\ = \sum_{j=1}^{\beta-1} \sum_{k=1}^m d_{j1} A_{jk} F_1(r_{jk}) P_{i1}(r, r_{jk}) + \\ + \sum_{k=1}^{\gamma} d_{\beta 1} A_{\beta k} F_1(r_{\beta k}) P_{i1}(r, r_{\beta k}). \end{aligned} \quad (11)$$

Тут β ($1 \leq \beta \leq n - 1$) — номер відрізка на якому знаходиться поточна точка верхньої межі інтегрування.

Коли таким способом, як наведено у формулах (9) — (11), запишемо всі інтеграли, що входять у систему інтегральних рівнянь (7) та підставимо в них замість r усі точки розбиття, то отримаємо систему $2((n - 1)m - 1)$ лінійних алгебричних рівнянь для пошуку значень функцій $F_i(r_{jk})$ у цих точках розбиття. Після цього функції $F_i(r)$ будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned} F_i(r) = - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m d_{ji} A_{jk} F_1(r_{jk}) P_{i1}(r, r_{jk}) - \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m d_{ji+2} A_{jk} F_2(r_{jk}) P_{i1}(r, r_{jk}) + \\ + \sum_{j=1}^{\beta-1} \sum_{k=1}^m d_{ji} A_{jk} F_1(r_{jk}) P_i(r, r_{jk}) + \\ + \sum_{k=1}^{\gamma} d_{\beta i} A_{\beta k} F_1(r_{\beta k}) P_i(r, r_{\beta k}) + \\ + \sum_{j=1}^{\beta-1} \sum_{k=1}^m d_{ji+2} A_{jk} F_1(r_{jk}) P_i(r, r_{jk}) + \\ + \sum_{k=1}^{\gamma} d_{\beta i+2} A_{\beta k} F_1(r_{\beta k}) P_i(r, r_{\beta k}) + f_i(r), \end{aligned} \quad (12)$$

підставляючи які у співвідношення (4), отримаємо шукані температурні характеристики T_i .

Обчислення приводились для круглої пластини радіуса $l=5$ з різними коефіцієнтами тепловіддачі на двох ділянках, $0 < r \leq 3$ та $3 < r < 5$, лицевой поверхні $z=h$ за таких даних: $T_{1c} = 30$; $T_{2c} = 0$; $\gamma_1^- = \gamma_2^- = 0,25$; $t_c^+ = 125$; $t_c^- = 15$; $r_1 = 3$; $\gamma_i^+ = \mu_i^+ h/2$, $i=1,2$.

На рис. 2 наведено зміну середніх температур T_1 і температурних моментів T_2 відповідно до зміни коефіцієнта $\gamma_1^+ = 1; 0,25; 0$ (криві 1 — 3) тепловіддачі на ділянці $0 < r \leq 3$, а $\gamma_2^+ = 0,25$ — за заданої температури $T_{1c} = 30$ на межі $r=l$. У точці $r=3$, де $\gamma_1^+ \neq \gamma_2^+$ і змінюються на поверхні $z=h$ стрибкоподібно, криві 1 і 3 мають перегин. Коли $\gamma_1^+ = \gamma_2^+$, то крива 2, яка наведена для порівняння, не має перегину.

Коли на межі $r=l$ відбувається конвективний теплообмін з довкіллям, то граничні умови матимуть вигляд:

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=l} + b_l (T_i|_{r=l} - T_{ic}) = 0, \quad (13)$$

де b_l — коефіцієнт теплообміну з поверхні $r=l$.

При переході до функцій F_i граничні умови (13) набудуть вигляду:

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial F_i}{\partial r} \right|_{r=l} + b_l (F_i|_{r=l} - F_{ic}) = 0. \quad (14)$$

Тут $F_{ic} = \lambda_2^{1-i} (T_{1c} - t_1) + \lambda_1^{2-i} (T_{2c} - t_2)$.

Використавши для розв'язання системи рівнянь (5) метод варіації сталої і врахувавши граничні умови (14), розв'язок цієї задачі зведемо до розв'язування взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтери і Фредгольма другого роду у вигляді

$$F_i(r) - \int_0^{r-1} [d_{ji} F_1(s) + d_{ji+2} F_2(s)] S_-(s-s_j) P_i(r,s) ds + \int_0^{l-1} [d_{ji} F_1(s) + d_{ji+2} F_2(s)] S_-(s-s_j) R_{i1}(r,s) ds = q_i(r). \quad (15)$$

Тут

$$R_{i1}(r,s) = s g_i^{-1} a_i I_0(a_i r) [I_1(a_i l) K_0(a_i s) +$$

$$+ I_0(a_i s) K_1(a_i l)] + b_l g_i^{-1} P_i(l,s),$$

$$q_i(r) = o_i I_0(a_i r) + [b_l g_i^{-1} I_0(a_i r) - 1] 3\lambda_1^{2-i} a_i^{-2} t_2,$$

$$g_i = a_i I_1(a_i l) + b_l I_0(a_i l), \quad o_i = b_l g_i^{-1} F_{ic}.$$

На рис. 3 наведено зміну температурних моментів T_2 , (криві 1 — 5) відповідно до зміни коефіцієнта $\gamma_2^+ = 1; 0,5; 0,25; 0,1; 0$ тепловіддачі на ділянці $3 < r < 5$, а $\gamma_1^+ = 0,25$ за конвективного теплообміну з коефіцієнтом $b_l = 0,5$ на межі $r=l$.

Слід зазначити, що отримана система інтегральних рівнянь (15) такого самого виду, як і система інтегральних рівнянь (7), різниця лише у вигляді ядра у другому

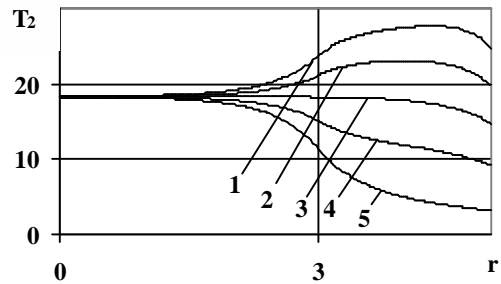


Рис. 3

інтегралі та правій частині, тому числове її розв'язування аналогічне до вищенаведеного.

Визначення компонент вектора переміщень. Рівняння для визначення радіального u та прогину w мають вигляд [2, 5]:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -(1+\nu) \alpha_t \frac{dT_1}{dr}, \quad (16)$$

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = -(1+\nu) \alpha_t \Delta T_2 \quad (17)$$

за таких граничних умов:

$$u|_{r=0} = 0, \quad \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu) \alpha_t T \right]_{r=l} = 0; \quad (18)$$

$$w|_{r=0} \neq \infty, \quad \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \alpha_t (1+\nu) h T_2 \right]_{r=0} \neq \infty,$$

$$w|_{r=l} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=l} = 0, \quad (19)$$

де α_t — коефіцієнт лінійного температурного розширення, ν — коефіцієнт Пуасона.

Підставивши знайдені значення температурних характеристик T_i за формулами (4) при граничних умовах (2) з системи рівнянь (1) у праву частину рівнянь (16), (17) та застосувавши до них метод варіації сталої і задовольнивши граничні умови (18), (19), прогин w та радіальне переміщення u подамо такими формулами:

$$u(r) = \alpha_t \left[\frac{(1-\nu)}{l^2} r \int_0^l \xi T_1(\xi) d\xi + (1+\nu) \frac{1}{r} \int_0^r \xi T_1(\xi) d\xi \right],$$

$$w = C_1 r^2 + C_2 - \frac{AD}{B} t_2 \frac{r^2}{4} + I_1(r) \ln r + I_2(r) - \frac{A}{B} (T_1 - CT_2),$$

де

$$I_1(r) = \int_a^r s \frac{A}{B} (Q_1 + Q_2 - 3C(Q_3 + Q_4)) ds,$$

$$I_2(r) = \int_a^r s \ln s \frac{A}{B} (Q_1 + Q_2 - 3C(Q_3 + Q_4)) ds,$$

$$Q_1 = (T_1 - t_1) \sum_{j=1}^{n-1} (\eta_{j+1}^+ - \eta_j^+) S_-(r - r_j),$$

$$Q_2 = (T_2 - t_2) \sum_{j=1}^{n-1} (\eta_{j+1}^- - \eta_j^-) S_-(r - r_j),$$

$$Q_3 = (T_2 - t_2) \sum_{j=1}^{n-1} (\eta_{j+1}^+ - \eta_j^+) S_-(r - r_j),$$

$$Q_4 = (T_1 - t_1) \sum_{j=1}^{n-1} (\eta_{j+1}^- - \eta_j^-) S_-(r - r_j), \quad A = \alpha_t (1 + \nu),$$

$$B = \eta_1^- - \frac{(1 + \eta_1^+) \eta_1^+}{\eta_1^-}, \quad C = \frac{\eta_1^+}{3\eta_1^-}, \quad D = \eta_1^- - \frac{(\eta_1^+)^2}{\eta_1^-},$$

$$C_1 = \frac{A}{2Bl} \left(\left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=l} - C \left. \frac{dT_2}{dr} \right|_{r=l} \right) + \frac{AD}{B} \frac{t_2}{4} - \frac{1}{2l^2} I_1(l),$$

$$C_2 = \frac{A}{B} (T_1(l) - CT_2(l)) - I_1(l) \ln l + I_2(l) + \frac{AD}{B} \frac{t_2}{4} - C_1 l^2.$$

На рис. 4 наведено зміну прогину w^* (криві 1 — 5), а на рис. 5 — радіального переміщення u (криві 1 — 5) відповідно до зміни коефіцієнта $\gamma_1^+ = 1; 0,5; 0,25; 0,1; 0$ тепловіддачі на ділянці $0 < r \leq 3$, і $\gamma_2^+ = 0,25$ за заданої температури $T_{1c} = 30$ на межі $r = l$.

Висновки. Запропоновано методику зведення крайової задачі теплопровідності для круглої пластини з кусково сталими коефіцієнтами тепловіддачі на лицевих поверхнях до розв'язування взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтери і Фредгольма другого роду. Побудовано числову схему їх розв'язування.

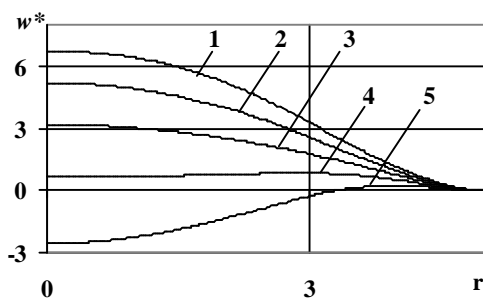


Рис. 4

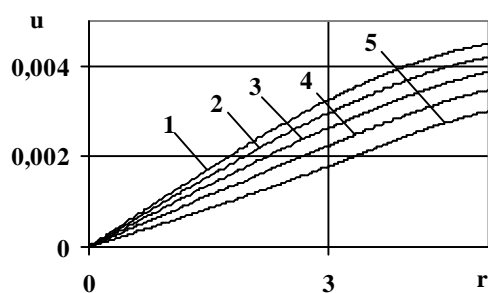


Рис. 5

Аналіз числових результатів показує, що зміна коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях істотно впливає на перерозподіл температури, прогину й радіального переміщення.

Розвинута методика розрахунку термічних переміщень дає змогу проаналізувати характер розподілу напружено-деформованого стану без поділу пластини на окремі її складові елементи.

Отже, при розрахунках круглих пластин зі змінними коефіцієнтами тепловіддачі з лицевих поверхонь потрібно враховувати дискретний характер їх зміни.

Література

1. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
2. Коляно Ю. М., Кулик А. Н. Температурные напряжения от объемных источников. — К.: Наук. думка, 1983. — 288 с.
3. Кулик А.Н., Рутт Т.А. Температурные напряжения в пластинке, обусловленные нагревом по кольцевой области путем конвективного теплообмена // Математические методы в термомеханике. — К.: Наук. думка, 1978. — С. 36—41 с.
4. Sugano Y., Chiba R., Hirose K., Takahashi K. Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk // JSME international journal, Series A. — 2004. — 47, №2. — Р. 189—197.
5. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. — К.: Наук. думка, 1978. — 344 с.
6. Вугак В.М. О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно-однородного тела // Докл. АН УССР. — Сер. А. — 1980. — №1. — С. 30—32.
7. Кушнір Р.М. Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1980. — №9. — С. 54—57.
8. Процюк Б.В. Побудова фундаментальної системи розв'язків звичайного лінійного диференціального рівняння з розривними і сингулярними коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — 42, №4. — С. 116—122.
9. Коляно Ю.М., Попович В.С. Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой // Физ.-хим. механика материалов. — 1976. — №2. — С. 108—112.
10. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. — М.: Машиностроение, 1973. — 659 с.
11. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. — К.: Наук. думка, 1978. — 292 с.

Отримана 09.04.09

B. Khapko, A. Chyzh

Displacements of round plate with radius-dependent coefficients of heat exchange on lateral surfaces.

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine,

Thermal displacements of round plate with radius-dependent heat-exchange coefficients on top and bottom surfaces and different temperatures on these surfaces was investigated. The method of reduction the problem of heat transfer to interconnected system of Volterra and Fredholm integral equations is given. Numerical method of solving of these integral equations using quadrature formulas is constructed. Numerical analysis of radial displacement distribution, bending and thermal moment is introduced.