

Л. Дзюбик

Інженер

І. Кузьо

Професор, д-р техн. наук

Національний університет
«Львівська політехніка»,
м. Львів

І. Прокопишин

Доцент, канд. фіз.-мат. наук,
Львівський національний
університет імені Івана Франка,
м. Львів

УДК 666.940.41, 539.3

СТАТИЧНА РІВНОВАГА БАЛКИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ НА ПРУЖНИХ ОПОРАХ З ПОПЕРЕДНІМ ЗМІЩЕННЯМ

Методом функцій Коші отримано загальний вираз для прогину балки. З умов рівності прогину балки пружному переміщенню опор та умов зрівноваженості перерізуючих сил і моментів отримано систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих реакцій опор. Числові розрахунки проведено для восьмиопорної обертової печі. Показано, що врахування попередніх зміщень і пружних деформацій опор істотно впливає на геометрію і характеристики міцності печі.

обертовий агрегат, пружна опора, балка змінної жорсткості, міцність

Розглядається проблема розрахунку на міцність обертового агрегату барабанного типу з урахуванням податливості опор та їх можливого зміщення у вертикальному напрямі.

Для дослідження міцності таких агрегатів найчастіше використовують модель балки змінного трубчастого перерізу, яка вільно лежить на опорах під дією зосереджених і розподілених сил.

Огляд праць з розрахунку на міцність обертових агрегатів за моделлю балки подано у працях [1, 2]. Найдослідженішим є випадок балки сталого і змінного поперечного перерізу на жорстких опорах. Вплив коефіцієнтів жорсткості опор для балки сталого поперечного перерізу показано в [3]. Дослідження впливу пружних деформацій в опорних вузлах на зміну характеристики міцності балки проведено у працях [2, 3]. Роботи, де згадані фактори для балки змінної жорсткості враховують одночасно, за нашими даними, відсутні. У зв'язку з цим актуальним і важливим є дослідження статичної рівноваги балки змінної жорсткості на пружних опорах з попереднім зміщенням.

Метою статті є побудова розв'язку задачі про статичну рівновагу нерозрізної балки кусково сталого згинної

жорсткості, розміщеної на пружних точкових опорах різної висоти і його застосування для дослідження обертових агрегатів неперервної дії.

Формулювання задачі. Розглянемо балку довжиною l кусково сталого згинної жорсткості, яка вільно лежить на N_R пружних опорах під дією зосереджених і розподілених кусково сталих навантажень (рис. 1).

Вісь Ox спрямуємо вздовж осі балки вправо, а вісь Oy — вниз.

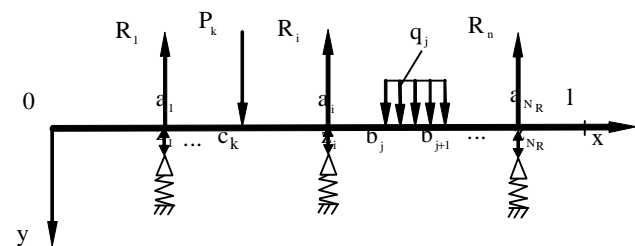


Рис. 1. Схема балки кусково сталого згинної жорсткості на пружних опорах

Позначимо: $a_i, k_i, z_i, i = 1, N_R$ — координати, коефіцієнти податливості і початкові зміщення опор; $[d_m, d_{m+1}), m = 1, N_D$ — ділянки, де жорсткість балки на згин D_m — стала. Для балок трубчатого поперечного перерізу цю жорсткість визначають так [1]:

$$D_m = (\rho d_{tm}^3 h_m E_m) / 8 ,$$

де d_{tm}, h_m, E_m — діаметр, товщина і модуль Юнга для m -тої ділянки труби.

Зауважимо, що величина попередніх зміщень повинна відповідати моделі — теорії балок і прийнятій схемі навантаження.

У точках $x = c_k, k = 1, N_p$ на балку діють зосереджені сили P_k , а на ділянках $[b_j, b_{j+1}), j = 1, N_q$ (в межах ділянки сталої жорсткості) — розподілені сили сталої інтенсивності q_j . Позначимо $\Delta_j = b_{j+1} - b_j$ довжину ділянки сталого навантаження, $b_j^0 = (b_{j+1} + b_j) / 2$ — їхні центри.

Зовнішнє навантаження зумовлює реакції опор $R_i, i = 1, N_R$.

Прогин балки $w(x)$ задовольняє диференціальне рівняння [5]

$$(D(x)w''') = q(x), \quad x \in (0, l), \quad (1)$$

в якому зовнішнє навантаження у нашому випадку визначається так:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{N_R} R_i d(x-a_i) + \sum_{k=1}^{N_p} P_k d(x-c_k) + \sum_{j=1}^{N_q} q_j [q(x-b_j) - q(x-b_{j+1})], \quad (2)$$

де $d(x-a)$ — дельта функція Дірака;

$$q(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases} \quad \text{— функція Хевісайда.}$$

Згинний момент і перерізуючу силу в балці визначають через переміщення так:

$$M(x) = -D(x)w''(x), \quad Q(x) = M'(x). \quad (3)$$

Оскільки краї балки вільні, на них виконуються умови рівності нулю згинних моментів та перерізуючих сил:

$$M(0) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad (4)$$

$$M(l) = 0, \quad Q(l) = 0. \quad (5)$$

На кожну опору діє сила, протилежна до реакції опори R_i , яка зумовлює пружне переміщення опори:

$$U_i = -k_i R_i, \quad i = 1, N_R. \quad (6)$$

З умови ідеального контакту балки з опорою отримуємо рівності:

$$w(a_i) = -k_i R_i + z_i, \quad i = 1, N_R. \quad (7)$$

Отож, прогин балки задовольняє крайову задачу (1), (4), (5) з додатковими умовами (7).

Розв'язок задачі. Використовуючи метод функцій Коші [5, 6] для побудови загальних розв'язків диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, загальний розв'язок рівняння (1) запишемо у вигляді

$$w(x) = w_0 + q_0 x + M_0 \frac{\partial}{\partial a} K(x, 0) + Q_0 K(x, 0) + w_*(x, 0), \quad (8)$$

де

$$K(x, a) = \int_a^x \frac{(x-s)(s-a)}{D(s)} ds \quad \text{— функція Коші,} \quad (9)$$

$$w_*(x, a) = \int_a^x K(x, t) q(t) dt \quad \text{— частковий розв'язок (1),} \quad (10)$$

а початкові параметри w_0, q_0, M_0, Q_0 відповідають прогину, куту повороту, згинальному моменту і перерізуючій силі на лівому кінці балки при $x = 0$.

Оскільки лівий кінець балки вільний, то з умов (4) отримаємо $M_0 = 0, Q_0 = 0$. Тому, підставляючи навантаження (2) у формулу (10), вираз (8) перепишемо так:

$$w(x) = w_0 + q_0 x + \sum_{i=1}^{N_R} R_i q(x-a_i) K(x, a_i) + \sum_{k=1}^{N_p} P_k q(x-c_k) K(x, c_k) + \sum_{j=1}^{N_q} q_j H_j(x), \quad (11)$$

$$\text{де } H_j(x) = \int_{b_j}^{j_j(x)} K(x, t) dt, \quad j_j(x) = \begin{cases} 0, & x < b_j \\ x, & b_j \leq x < b_{j+1} \\ b_{j+1}, & b_{j+1} \leq x \end{cases}$$

Враховуючи, що жорсткість балки на згин $D(x)$ є кусково сталою функцією, запишемо вирази для функції Коші $K(x, a)$ та функцій $H_j(x)$ у вигляді, зручному для числових обчислень.

Нехай $x \in [0, l)$, позначимо через $m(x)$ номер ділянки сталої жорсткості, якій належить x :

$$d_m \leq x < d_{m+1} \quad \Rightarrow \quad m(x) = m. \quad (12)$$

Через $I(u, v, x, y)$ позначимо інтеграл

$$I(u, v, x, y) = \int_u^v (x-s)(s-y) ds, \quad (13)$$

який обчислюється аналітично.

Тоді вираз для функції Коші (9) можна подати за допомогою введених величин так:

$$K(x, a) = \frac{1}{D_{m(a)}} I(a, d_{m(a)+1}, x, a) + \sum_{m=m(a)+1}^{m(x)-1} \frac{1}{D_m} I(d_m, d_{m+1}, x, a) + \frac{1}{D_{m(x)}} I(d_{m(x)}, x, x, a). \quad (14)$$

Для функції $H_j(x)$ при $b \leq x < b_{j+1}$, використовуючи формулу Діріхле [7, с. 341], отримаємо:

$$H_j(x) = \frac{1}{D_{m(b_j)}} \int_{b_j}^x dt \int_t^x (x-s)(s-t) ds = \frac{1}{D_{m(b_j)}} \int_{b_j}^x ds \int_{b_j}^s (x-s)(s-t) dt = \frac{(x-b_j)^4}{24D_{m(b_j)}}. \quad (15)$$

При $x \geq b_{j+1}$ послідовно знайдемо:

$$H_j(x) = \int_{b_j}^{b_{j+1}} dt \int_t^x \frac{(x-s)(s-t)}{D(s)} ds + \int_{b_j}^{b_{j+1}} dt \int_t^{b_{j+1}} \frac{(x-s)(s-t)}{D(s)} ds + \int_{b_j}^{b_{j+1}} dt \int_{b_{j+1}}^x \frac{(x-s)(s-t)}{D(s)} ds = U_j(x) + V_j(x). \quad (16)$$

Перший інтеграл, після застосування формули Дирихле, знаходимо аналітично:

$$U_j(x) = \frac{1}{D_{m(b_j)}} \int_{b_j}^{b_{j+1}} ds \int_{b_j}^s (x-s)(s-t) dt = \frac{1}{D_{m(b_j)}} \left(\frac{\Delta_j^3}{6} (x-b_j) - \frac{\Delta_j^4}{8} \right). \quad (17)$$

Другий інтеграл $V_j(x)$, змінюючи порядок інтегрування та використовуючи позначення (13), запишемо у вигляді:

$$V_j(x) = \int_{b_j}^x \frac{x-s}{D(s)} ds \int_{b_j}^{b_{j+1}} (s-t) dt = \Delta_j \int_{b_j}^x \frac{(x-s)(s-b_j^0)}{D(s)} ds = \Delta_j \left(\frac{1}{D_{m(b_{j+1})}} I(b_{j+1}, d_{m(b_{j+1})}, x, b_j^0) + \sum_{m=m(b_{j+1})+1}^{m(x)-1} \frac{1}{D_m} I(d_m, d_{m+1}, x, b_j^0) + \frac{1}{D_{m(x)}} I(d_{m(x)}, x, x, b_j^0) \right). \quad (18)$$

Згинні моменти та перерізуючі сили в балці знаходимо за загальними формулами (3):

$$M(x) = - \sum_{i=1}^{N_R} R_i q(x-a_i)(x-a_i) - \sum_{k=1}^{N_P} P_k q(x-c_k)(x-c_k) - \sum_{j=1}^{N_q} q_j \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad x < b_j \\ (x-b_j)^2/2, \quad b_j \leq x < b_{j+1} \\ \Delta_j(x-b_j^0), \quad b_{j+1} \leq x \end{array} \right\}, \quad (19)$$

$$Q(x) = - \sum_{i=1}^{N_R} R_i q(x-a_i) - \sum_{k=1}^{N_P} P_k q(x-c_k) - \sum_{j=1}^{N_q} q_j \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad x < b_j \\ x-b_j, \quad b_j \leq x < b_{j+1} \\ \Delta_j, \quad b_{j+1} \leq x \end{array} \right\}. \quad (20)$$

Отже, прогин балки, згинаючий момент і перерізуюча сила повністю виражаються через початкові переміщення w_0 та кут повороту q_0 , реакції опор R_i , $i=1, N_R$ та зовнішнє навантаження.

З крайових умов при $x=l$ (6) отримуємо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{N_R} R_i(l-a_i) + \sum_{k=1}^{N_P} P_k(l-c_k) + \sum_{j=1}^{N_q} q_j \Delta_j(l-b_j^0) = 0, \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{N_R} R_i + \sum_{k=1}^{N_P} P_k + \sum_{j=1}^{N_q} q_j \Delta_j = 0. \quad (22)$$

Рівняння (21) є умовою рівноваги моментів відносно правого кінця балки, а рівняння (22) — умовою рівноваги поперечних сил.

З умов ідеального контакту балки та опор (7) отримуємо N_R рівнянь:

$$w_0 + q_0 a_i + \sum_{m=1}^{N_R} R_m q(a_i - a_m) K(a_i, a_m) + k_i R_i = z_i - \sum_{k=1}^{N_P} P_k q(a_i - c_k) K(a_i, c_k) - \sum_{j=1}^{N_q} q_j H_j(a_i). \quad (23)$$

Рівняння (21) — (23) складають систему з $N_R + 2$ лінійних алгебричних рівнянь для визначення $N_R + 2$ невідомих w_0, q_0 та R_i , $i=1, N_R$.

Частковий випадок жорстких опор отримуємо, покладаючи в рівняннях (23) $k_i = 0$, $i=1, N_R$, а випадок незміщених опор — $z_i = 0$, $i=1, N_R$.

Аналіз отриманої системи показує, що реакції опор не змінюються коли опори початково лежать на одній прямій, тобто $z_i = \alpha a_i + \beta$ ($\alpha, \beta = const$), оскільки в цьому випадку змінюється лише переміщення і кут повороту лівого краю балки. Тобто, для регулювання моментів та опорних реакцій реального обертового агрегата можна переміщати лише $N_R - 2$ опори при двох фіксованих.

Практичні розрахунки. Наведений алгоритм розрахунку балки реалізовано на мові Object Pascal в середовищі Delphi.

Розглянемо восьмиопорну обертову піч для виготовлення сипучих будівельних матеріалів. Геометричні параметри печі, пружні сталі та навантаження такі ж, як у [3]. Прийmemo значення зведеного коефіцієнта податливості (k) кожного опорного вузла рівним 0,8086 кН/м [2].

Для випадку початково незміщених опор проведено порівняння результатів з отриманими методом п'яти моментів [3] і методом скінченних елементів [9], яке показало їх повне узгодження.

Застосовуючи отриману систему рівнянь (21) — (23), визначимо величину пружних вертикальних переміщень в опорах, діючих моментів та опорних реакцій для випадку попереднього зміщення лише п'ятої опори вгору і вниз на 5 мм (табл. 1).

Відповідно до прийнятої схеми навантаження зовнішні навантаження є додатними, а реакції опор — від'ємними. Пружні зміщення опор i рівні $d_i = -kR_i$, а повні — $w_i = z_i + d_i$, $i=1, N_R$.

Силові навантаження та переміщення в печі

Опора	Без попередніх зміщень			Зміщення вгору на 5 мм п'ятої опори			Зміщення вниз на 5 мм п'ятої опори		
	R_i , МН	δ_i , мм	M_i , МН·м	R_i , МН	w_i , мм	M_i , МН·м	R_i , МН	w_i , мм	M_i , МН·м
1	-2,86	2,32	-3,64	-2,86	2,31	-3,63	-2,86	2,31	-3,63
2	-4,06	3,29	-7,31	-4,07	3,29	-7,42	-4,06	3,28	-7,21
3	-3,77	3,05	-6,49	-3,99	3,23	-6,50	-3,55	2,87	-6,47
4	-3,97	3,22	-5,52	-3,21	2,59	-0,95	-4,75	3,84	-10,1
5	-4,11	3,33	-7,47	-5,16	-0,83	-15,81	-3,07	7,48	0,86
6	-4,00	3,24	-7,53	-3,27	2,64	-2,69	-4,73	3,82	-12,36
7	-5,08	4,11	-8,22	-5,30	4,29	-8,26	-4,86	3,92	-8,19
8	-3,79	3,07	-2,11	-3,79	3,06	-2,11	-3,79	3,07	-2,11

Аналіз отриманих результаті показує, що наявність пружних деформацій в опорах зумовлює їх зміщення на величини, які близькі до нормативних меж [1]. При цьому наявність попередніх зміщень зумовлює значний перерозподіл діючих сил у корпусі обертової печі та визначається їхнім напрямом. В усіх випадках зміщення на одній опорі відчутно впливає на діючі сили навантаження, щонайменше двох сусідніх до неї.

Зокрема, переміщення опори догори істотно збільшує діючий на ній опорний момент. В розглянутому варіанті він локально зростає приблизно вдвічі, однак, на сусідніх опорах він зменшується. Реакція опори при цьому зростає приблизно на 20 %, а сусідні опори — розвантажуються. Повне переміщення розглянутої опори значно менше від заданого і складає приблизно 1 мм.

При переміщенні опори вниз момент на ній практично відсутній, а навантаження перерозподіляється на сусідні опори. Реакція п'ятої опори зменшується на 33 %, однак зростають сили на шостій і четвертій опорах. Повне переміщення розглянутої опори значно більше від заданого і складає приблизно 7,5 мм.

Отже, наявність пружних деформацій в опорах обертових печей істотно впливає на геометрію і характеристики міцності печі, зокрема, на величину регулюючих переміщень. Останнє є важливим на етапі технічного діагностування й ремонту обертового агрегата.

Висновки. Розв'язано задачу про статичну рівновагу нерозрізної балки кусково сталої згинної жорсткості, розміщеної на багатьох пружних точкових опорах з можливим їх попереднім зміщенням у вертикальному напрямі. Отримано систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення реакцій опор балки. Аналітично показано, що реакції опор не змінюються при переміщенні опор як жорсткого цілого. Досліджено восьмиопорну обертову піч і показано, що наявність пружних деформацій та попередніх зміщень опор змінює величину регулюючих переміщень.

Література

1. Кузьо І. В., Шевченко Т. Г. Расчет и контроль установки агрегатов непрерывного производства. – Л.: Вища шк., 1987. – 176 с.

2. Кузьо І. В., Дзюбик Л. В. Дослідження пружних деформацій опорних вузлів та їх вплив на сили характеристики обертових печей // Вісник НУ «Львівська політехніка»: «Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні». – Львів: НУ «Львівська політехніка». – 2008. – № 613 – С. 106-110.

3. Кузьо І. В., Дзюбик Л. В. Врахування пружних деформацій опор обертових печей під час монтажно-налагоджувальних робіт // Вісник НУ «Львівська політехніка»: «Динаміка, міцність та проектування машин і приладів». – Львів: НУ «Львівська політехніка». – 2009. – № 641 – С. 39-43.

4. Кузьо І., Зубрицький А. Вплив коефіцієнтів жорсткості на навантаження та деформацію опор великогабаритних обертових агрегатів // Машинознавство. – 1997. – № 2. – С. 42-46.

5. Гащук П., Зорій Л.-М. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с.

6. Зорій Л.-М. О новом методе построения решений линейных дифференциальных уравнений // Доклады АН УССР. – Серия А.–1979. –№ 5. – С. 351-355.

7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. – Т. 2. – М.: Высш. шк., 1988. – 576 с.

8. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3-х томах. – Под. ред. Биргера И. А., Пановко Я. Г. – Т.1. – М.: Машиностроение, 1988. – 831 с.

9. Дзюбик Л. В. Автоматизація процесу технічного контролю агрегатів із нахиленою віссю обертання // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Праці конф. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2008. – С. 212-214.

Отримана 04.09.09

Dzyubyk L., Kusjo I., Prokopyshyn I.

The static equilibrium of nonuniform beam on elastic supports with initial displacements

National University "Lvivska Politechnika", Lviv;
Ivan Franko Lviv National University, Lviv

General expression of beam deflection is written by the Cauchy functions method. A system of the linear algebraic equations for unknown reactions at supports is obtained using the equilibrium equations for moments and shearing forces, and the equality conditions of the beam deflection and the elastic displacements of supports. The numerical calculations are made for an eight supporting circulating stove. It is shown that the consideration of the initial displacements and the supports elasticity has large inference on the geometric and strength parameters of the stove.