О. Гачкевич

Професор, д-р фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів, Україна;
Опольська політехніка,
м. Ополє, Польща

Р. Мусій

Доцент, д-р фіз.-мат. наук,
Національний університет
„Львівська політехніка”,
м. Львів, Україна

Є. Ірза

Канд. фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів, Україна

УДК 539.3

ОПТИМІЗАЦІЯ ЗА ШВИДКОДІЄЮ РЕЖИМІВ НАГРІВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Запропонована методика оптимізації за швидкодією процесу термооброблення кусково-однорідних тіл обертання при обмеженнях на напружений стан тіла. Для опису термомеханічної поведінки кусково-однорідних тіл обертання використана модель термочутливого пружного тіла в тривимірній постановці при залежності характеристик матеріалу від просторової координати. Запропоновану числову математичну модель оптимізації можна використовувати для дослідження параметрів процесу нагрівання при різного типу обмеженнях теплової і механічної природи.

тіло обертання, оптимізація, термічне оброблення

У статті запропоновано методику оптимізації за швидкодією режимів нагрівання кусково-однорідних тіл обертання за обмежень на напружений стан тіла.

Методика є розвитком існуючих у літературі досліджень [1 — 3] за врахування термочутливості матеріалів, з яких виготовлено кусково-однорідне тіло обертання.

Математична постава задач оптимізації режимів термооброблення кусково-однорідних тіл обертання включає такі типові етапи: вибір критерію і відповідного функціонала оптимізації; вибір функцій керування, за допомогою яких досягається екстремум функціонала оптимізації; формулювання залежностей, які описують поведінку тіл за заданих умов термооброблення; формування обмежень на параметри стану і функції керування.

Зупинимося на кожному з перелічених етапів розглянутої задачі оптимізації.

Вибір критерію і відповідного функціонала, який реалізує цей критерій оптимізації, здійснюється виходячи з основних призначень процесу термооброблення.

У цій статті за функціонал оптимізації вибрано тривалість процесу нагрівання

$$J = \tau^{*}, \qquad (1)$$

який є важливим елементом багатьох технологій.

Мінімізація функціонала (1) дає змогу скоротити час термічного оброблення. При цьому забезпечення міцності кусково-однорідної конструкції здійснюється за рахунок обмежень на напружений стан кожного однорідного елемента конструкції.

Такий функціонал дає змогу формулювати задачі оптимізації для реальних технологій нагрівання і враховувати обмеження як технологічного характеру, так і пов’язані з властивостями матеріалу за підвищених температур.

Вибір функції керування здійснюється виходячи з технологічних можливостей керування наявними фізико-механічними процесами в конкретній технології термічного оброблення. Так, функцією керування може бути температура навколишнього середовища, коефіцієнт тепловіддачі або тепловий потік і т. п.

Для опису термомеханічної поведінки розглянутих тіл використана тривимірна модель кусково-однорідного (в напрямі осі обертання) термочутливого пружного тіла.

Розглядається кусково-однорідне тіло обертання, яке в такій постановці задачі трактується суцільним, а його кускова неоднорідність закладається у фізико-механічні характеристики матеріалу, які є кусково-однорідними в напрямі осі обертання. Приймаємо, що тіло займає область W евклідового простору R^3 і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ. Воно віднесене до циліндричної системи координат $Or\varphi z$ і є кусково-однорідним за координатою z. На частині (Γ_u) поверхні тіла Γ задані переміщення $\bar{u} = \left(u_r^0, u_z^0\right)$, а на частині ($\Gamma_\sigma$) — силове навантаження, яке характеризується вектором $\bar{p} = (p_r, p_z)$ $(\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma)$.

Тіло піддається технологічному осесиметричному нагріванню, яке здійснюється зовнішнім середовищем з температурою $t_c(r,z,\tau)$ через частину поверхні Γ_t $((r,z) \in \Gamma_t)$, тепловим потоком $q(r,z,\tau)$ через частину поверхні Γ_q $\left((r,z) \in \Gamma_q;\ \ \Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma\right)$, а також розподіленими джерелами тепла потужності $Q(r,z,\tau)$, $((r,z) \in \Omega)$.

Вважаємо, що при розглянутій тепловій дії напружений стан тіла не впливає на його температуру, тобто пряму задачу про визначення напружено-деформованого стану в тілі формулюємо в квазістатичній постановці (в переміщеннях). При цьому температурне поле в тілі описується рівнянням теплопровідності [4]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial t}{\partial z}\right)+Q=\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{2}$$

за початкової

$$t(r,z,0)=t_0 \tag{3}$$

і крайових

$$\begin{aligned}&\left[k\left(\frac{\partial t}{\partial r}n_r+\frac{\partial t}{\partial z}n_z\right)+\alpha(t-t_c)\right]_{\Gamma_t}=0;\\&\left[k\left(\frac{\partial t}{\partial r}n_r+\frac{\partial t}{\partial z}n_z\right)+q\right]_{\Gamma_q}=0;\end{aligned} \tag{4}$$

умов.

Тут $c(z,t)$ — питома теплоємність; $\rho(z,t)$ — густина; τ — поточий час; $k(z,t)$ — коефіцієнт теплопровідності; α — коефіцієнт тепловіддачі; n_r, n_z — компоненти зовнішньої нормалі до поверхні.

Зв'язок між компонентами тензора напружень і тензора деформацій беремо у вигляді [4]

$$\{\sigma\}=[D]\left(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}\right), \tag{5}$$

де $[D]$ — матриця пружних характеристик; $\{\sigma\}^T=\left[\sigma_{rr}\ \sigma_{\varphi\varphi}\ \sigma_{zz}\ \sigma_{rz}\right]$ — тензор напружень; $\{\varepsilon\}^T=\left[\varepsilon_{rr}\ \varepsilon_{\varphi\varphi}\ \varepsilon_{zz}\ \varepsilon_{rz}\right]$ — тензор деформацій; $\{\varepsilon_0\}^T=\int_{t_0}^{t}\alpha_t(z,\varsigma)d\varsigma\ \{1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\}^T$ — тензор температурної деформації; $E(z,t)$ — модуль пружності; $n(z,t)$ — коефіцієнт Пуасона; $\alpha_t(z,t)$ — лінійний коефіцієнт температурного розширення.

В області Ω повинні виконуватися такі рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=0\\&\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=0\end{aligned} \tag{6}$$

і граничні умови:

$$\begin{aligned}&n_r\sigma_{rr}+n_z\sigma_{zr}-p_r=0,\\&n_r\sigma_{rz}+n_z\sigma_{zz}-p_z=0\quad на\quad \Gamma_\sigma,\\&u_r=u_r^0,\quad u_z=u_z^0\quad на\quad \Gamma_u.\end{aligned} \tag{7}$$

Обмежимося випадком малих деформацій. При цьому зв'язок між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора переміщень буде таким [4]:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{u_r}{r},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}. \tag{8}$$

Залежності (2) — (8) складають повну систему співвідношень для визначення температурного поля, компонент вектора переміщень, компонент тензорів деформацій і напружень при заданих температурі навколишнього середовища t_c, тепловому потоці q, зовнішньому силовому навантаженні $\bar{p}$ і потужності внутрішніх джерел тепла Q.

Третім важливим етапом у поставі задачі оптимізації є вибір обмежень на параметри наявних фізико-механічних полів і функції керування. Вибір обмежень на параметри полів здійснюється в залежності від цілей термічного оброблення. Типовими обмеженнями в цих задачах є обмеження на напруження в тілі:

$$\max_{\tau,\Omega}\sigma_{екв}\le\sigma_d(z,t), \tag{9}$$

де $\sigma_d(z,t)$ — допустимий рівень еквівалентних напружень:

$$\sigma_{екв}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})^2+(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{rr}-\sigma_{zz})^2+6\sigma_{rz}^2}\ .$$

До типових обмежень належать також такі обмеження на температуру тіла під час процесу нагрівання [2]:

$$t_1\le t(M,\tau)\le t_2, \tag{10}$$

обмеження на функцію керування

$$h_1\le h(\tau)\le h_2 \tag{11}$$

і обмеження на швидкість зміни функції керування

$$v_1 \le \frac{dh(\tau)}{d\tau} \le v_2 \ . \qquad (12)$$

Кількість додаткових умов на параметри розглянутих полів і функції керування в процесі термічного оброблення в цій схемі оптимізації є неістотною.

У такій поставі оптимізація за швидкодією режимів термооброблення полягає в мінімізації функціонала (8) при в'язях (1) — (7) і обмеженнях (10) — (12).

Наріжне місце в побудові оптимального розв'язку в задачі оптимізації займає питання побудови алгоритмів знаходження розв'язків прямої задачі, а саме: знаходження температурних полів і відповідних їм деформацій і напружень. Оскільки геометрична конфігурація області часто є досить складною і система диференційних рівнянь є нелінійною, при розв'язуванні цієї задачі використано метод зважених нев'язок у поєднанні зі скінченноелементним підходом [5]. Такий підхід дав змогу ефективно отримати наближені розв'язки сформульованих складових задач.

Задача теплопровідності (2) — (4), при використанні методу зважених нев'язок (зокрема методу Гальоркіна) в поєднанні з методом скінченних елементів, описується рівнянням [5]

$$[C_t]\frac{d\{T\}}{d\tau} + [K_t]\{T\} = \{f_t\}. \qquad (13)$$

Тут $[C_t],[K_t],\{f_t\}$ — відповідні температурні матриці жорсткості і вектор навантаження [5].

Використавши метод скінченних різниць (поділивши проміжок $[0, t_k]$ на дискретну множину точок τ_0, τ_1, ... з кроком Δt), з (8) отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь [5]:

$$\begin{aligned}&([C_t] + \theta\Delta\tau[K_t])\{T\}_{n+1} = \\ &= ([C_t] - (1-\theta)\Delta\tau[K_t])\{T\}_n + \{f_t\}_n \ , \end{aligned} \qquad (14)$$

де індексами n, n+1 позначено значення величини в момент часу τ_n, τ_{n+1} відповідно.

За рахунок вибору точки колокації θ співвідношення (14) можна перетворити в одну з таких відомих скінченно-різницевих схем для рівняння (8), а саме [5]: при θ=0 — схему Ейлера (схема з різницею вперед), θ=0.5 — схему Кранка-Нікольсона (схема з центральною різницею), θ=0.66667 — метод Гальоркіна, θ=1 — схему з різницею назад.

Нелінійну система алгебричних рівнянь (9) розв'язуємо за допомогою ітераційного методу [6].

При відомому температурному полі система рівнянь (4) — (7), з використанням методу зважених нев'язок у поєднанні з методом скінченних елементів, зводиться, як і задача теплопровідності, до системи нелінійних алгебричних рівнянь виду

$$[K]\{U(\tau)\} = \{F_0(\tau)\} \qquad (15)$$

відносно невідомих значень переміщень $U(\tau)$ у вузлах елементів [5].

Тут $[K], \{F_0(\tau)\}$ — відповідні матриця жорсткості і вектор навантаження.

Розв'язок нелінійної системи (10) будуємо з використанням ітераційної схеми, аналогічної до застосованої в задачі теплопровідності. При відомих переміщеннях за допомогою співвідношення (4) визначаємо компоненти тензора напружень у тілі.

Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будуємо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [6]. В рамках запропонованого підходу мінімізація функціонала (8) зводиться до задачі нелінійного програмування зі знаходження мінімуму відповідної функції $J = J(h_1,...,h_n)$, аргументами якої є значення h_i функції керування h в дискретні моменти часу. Розв'язок будуємо за допомогою методу прямого пошуку на множині кусково-лінійних функцій так: на кожному інтервалі часу $[\tau_n , \tau_{n+1}]$ функцію керування подаємо у вигляді

$$h_{n+1} = k_n(\tau_{n+1} - \tau_n) + h_n\,. \qquad (16)$$

Тут h_n — значення функції керування в момент часу τ_n. Методом прямого пошуку коефіцієнта k_n (перебором множини значень) при обмеженнях (10) — (12) і в'язях (14), (15) знаходимо значення функції керування h_{n+1} в момент часу τ_{n+1}.

З використанням запропонованої методики побудований оптимальний за швидкодією режим нагрівання з подальшим охолодженням зовнішнім середовищем вільного від силового навантаження порожнистого циліндра радіусом R=0,25 м і товщиною 2h=0,014 м, який складається з трьох неоднорідних частин з фізичними характеристиками, наведеними в [2]. Внутрішня поверхня циліндра теплоізольована, а на зовнішній задана температура, яка є функцією керування.

На рис. 1 наведені оптимальна зміна функції керування $t_c(\tau)$ (крива 1) і виникаючі при цьому максимальні еквівалентні напруження (крива 2) в кусково-однорідному циліндрі (які досягаються в різні моменти часу в інших точках перерізу).

З аналізу результатів досліджень оптимальних за швидкодією режимів термічного оброблення зауважено, що мінімізація часу термооброблення досягається за рахунок здійснення процесу нагріву за рівнем допустимих напружень.

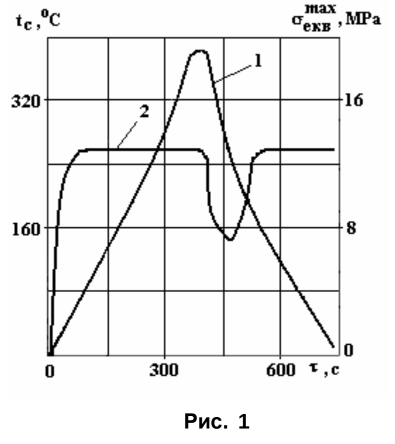

Рис. 1

Запропонована числова математична модель оптимізації за швидкодією режимів термооброблення може бути використана для різних технологій, пов’язаних з процесами нагріву (охолодження).

Порівняно з раніше опублыкованими авторами працями, запропонована модель оптимізації полягає в побудові оптимального режиму нагрівання на кожному часовому кроці часової дискретизації шляхом перебирання лише одного параметра (кута нахилу кусково-лінійної функції керування) так, щоб досягалися допустимі напруження або допустимі обмеження на швидкість зміни фукції керування. Розроблена методика не вимагає задавання нульового наближення режиму нагрівання (охолодження). Такий алгоритм побудови оптимального розв’язку дає можливість істотно скоротити час його знаходження.

Література

1. *Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. — К.: Наук. думка, 1979. — 364 с.

2. *Гачкевич О., Гачкевич М., Гуменчук О., Касперський З.* Методика оптимізації режимів нагріву конвективним способом і електромагнітним випромінюванням кусково-орднорідних оболонок обертання // Машинознавство. — 2000. — №4-5. — С. 3—10.

3. *Вигак В.М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. — К.: Наук. думка, 1988. — 312 с.

4. *Гачкевич О.Р., Будз С.Ф., Ірза Є.М., Пеер-Касперська А.* Визначення напружено-деформованого стану скляної сферичної оболонки при локальному нагріві // Вісник Донецького університету. — 2002. — №2. — Серія А. — С. 76—78.

5. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* Finite Element Method: Vol 1. The Basis. — London: Butterwoth Heinemann, 2000. — 689 p.

6. *Химмельбау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 532 с.

Отримана 01.10.08

O. Gachkevych[1,3], R. Musij[2], E. Irza[3]

High speed optimization of regimes of heat of thermoelastic piece-wise bodies of rotation

[1]*Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics Ukrainian National Academy of Sciences, Lviv, Ukraine;*
[2]*National University “Lvivska Politechnika”, Lviv, Ukraine;*
[3]*Technical University of Opole, Opole, Poland*

In the work the technique for high speed optimization of the process of heat treatment of piece-wise bodies of rotation is proposed at restrictions the stress state of the body. For the description of thermomechanical behaviour of a piece-wise body of rotation the model of a thermosensitive elastic body in 3D statement is used at dependence of characteristics of material on the spatial coordinate. The proposed numerical mathematical model of optimization can be used for research of parameters of the process of heating at different type restrictions of thermal and mechanical nature.

² íôîðìàö³ÿ

Nonlinear Normal Modes, Dimension Reduction and Localization in Vibrating Systems

27 September 2009 — 2 October 2009, Frascati (Rome), Italy

Information:

The Colloquium aims at presenting the latest developments in the areas of Nonlinear Normal Modes, Dimension Reduction and Localization, and their applications in vibrating systems.

Nonlinear Normal Modes (NNMs) is a classical topic which is presently given a more modern interpretation mostly as regards their formulation for continuous or discontinuous systems, strongly nonlinear regimes, and discretized structures, as well as their use in various applications. They are also of major interest in the framework of Dimension Reduction of dynamical systems, an area where various methods are being formulated and compared with each other, along with the reduced order models – developed for different purposes/systems – based on just nonlinear (vs linear) normal modes or proper orthogonal modes or multi-modes ensuing from nonlinear finite element analyses. In turn, Localization is one major topic (to be possibly addressed via NNMs) in wave propagation and targeted energy transfer. In this context, there is special interest towards analyzing possible occurrence in mechanics of such dynamic phenomena as the discrete breathers highlighted in applied mathematics and physics, where they are paradigmatic solutions in periodic lattices. Cross-fertilization among such companion areas could allow to exploit results useful to describe analogous phenomena likely to occur in engineered materials and devices, with nontrivial effects in terms of efficient/robust energy focusing/transfer, and material/system design.

Contact: *Prof. Giuseppe Rega*
Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Universita’ di Roma La Sapienza
Via A. Gramsci 53, 00197 Roma, Italy
Ph: +39-06-49919195
Fax: +39-06-49919192 or +39-06-3221449; e-mail: Giuseppe.Rega@uniromal.it