

О. Максимук

Професор, д-р. фіз.-мат. наук

Р. Махніцький

Ст. наук. співр., канд. фіз.-мат. наук

Н. Щербина

Ст. наук. співр., канд. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача
НАН України,
м. Львів

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ СТІЛЬНИКОВИХ ПОЛІМЕРНИХ ТРУБ

Наведено формулювання й розв'язок задачі стійкості циліндричної полімерної труби зі стільниковою структурою стінки за дії сталого навантаження. Запропоновано формули для оцінки стійкості стільникових полімерних труб різної довжини за їхніми ефективними характеристиками.

стійкість, труба, стільникова структура, полімерний матеріал, моделювання

Розроблення й застосування стільникових полімерних труб у сучасній інженерній практиці зумовлене тим, що вони мають низку важливих переваг порівняно з традиційними аналогами (наприклад, мала питома вага при рівномірності конструкції та достатній кільцевій жорсткості, висока хімічна стійкість, нетоксичність тощо) [6, 8].

Труби зі стільниковою (пустотілою) структурою стінки отримують намотуванням на спеціальних пристроях тонких трубок з поліетилену високої густини й низького тиску на основу циліндричної форми та одночасним їх екструзійним зварюванням, заповненням розплавленою масою поліетилену проміжків між спіралями трубок як з внутрішньої, так і з зовнішньої сторони (рис. 1).

Моделюванню стільникової стінки труб з полімерних матеріалів присвячена праця [4], в якій досліджено вплив параметрів стільникової стінки труби на величину її кільцевої жорсткості й запропоновано оптимальний проект стільникової конструкції.

На підставі математичних розрахунків зроблено висновок, що оптимальними щодо матеріалоемності і жорсткості можна вважати одношарові конструкції для внутрішніх діаметрів труби $D^* < 3000$ мм, а при $D^* \geq 3000$ мм оптимальною є двошарова структура (як конструкційний елемент для формування стінки труби було вибрано тонкі трубки діаметра $D = 20-110$ мм).

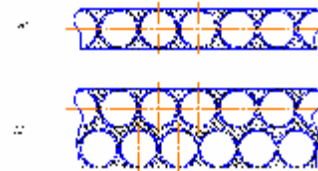


Рис. 1. Структура стільникової стінки труби (поздовжній переріз): а — одношарова стільникова стінка; б — двошарова стільникова стінка

Дещо інший підхід до розрахунку напружено-деформованого стану стільникових труб, жорсткість яких збільшують конструкційно за допомогою пружних кільцевих підпор, розглянуто в [7], а саме: методом усереднення внутрішніх рівнодійних сил та моментів визначено жорсткісні характеристики стільникових труб і запропоновано обчислення циліндричних жорсткостей та жорсткостей на стиск — розтяг замкнених оболонок.

Водночас, ефективне застосування полімерних труб зі стільниковою стінкою вимагає розроблення нових методів їхнього розрахунку. Поряд з розрахунками напружено-деформованого стану, жорсткості й міцності таких конструкцій важливе значення має також розрахунок на стійкість, бо руйнування тонкостінної конструкції

найчастіше пов'язане з втратою нею загальної стійкості або стійкості окремих елементів [1].

Мета статті — запропонувати підхід до дослідження стійкості стільникової труби з полімерного матеріалу.

У межах лінійнопружного деформування матеріал полімерних труб стільникової структури можна вважати ортотропним зі зведеними характеристиками. Пружні характеристики модельного матеріалу E_x , E_ϕ , $\nu_{x\phi}$ визначали експериментально за зразками стільникової будови. Ефективну товщину стільникової стінки труби H визначали з умови рівності кільцевих жорсткостей труби з однорідного матеріалу та стільникової будови [4], звідки випливає

$$\frac{I_y}{R_0^3} = \frac{I'_y}{(R'_0)^3},$$

де $R'_0 = \frac{D^* + H}{2}$ — радіус серединної поверхні; D^* — внутрішній діаметр труби; I'_y — момент інерції у випадку труби з суцільною стінкою [3], а R_0 , I_y — відповідні величини стільникової структури [4].

Зазначимо, що модуль пружності в осьовому напрямі менший, ніж модуль пружності в кільцевому напрямі, а, отже, жорсткість стінки труби на розтяг — стиск у кільцевому напрямі вища від жорсткості в осьовому напрямі.

Формулювання задачі стійкості багат шарової оболонки, стиснутої осьовою силою та зовнішнім тиском. Розглянемо трубу, змодельовану циліндричною оболонкою, яка складається з декількох ортотропних шарів з різними властивостями. Оболонка віднесена до системи координат x , y ($y = R\phi$; x , ϕ — осьова й кутова координати відповідно; R — радіус серединної поверхні). Припускаємо, що початковий докритичний стан є безмоментний. На оболонку діє осьова сила стиску P та зовнішній тиск q .

У рамках класичної моделі Кірхгофа — Лява [1] для збуреного стану циліндричної оболонки рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} - \\ - \frac{\partial N_y}{R} - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $N_1 = \frac{P}{2\pi R}$, $N_2 = qR$.

Оскільки початковий напружений стан оболонки безмоментний, то використовуємо лінійні геометричні співвідношення, які у такий спосіб пов'язують на серединній поверхні компоненти деформації ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} , κ_x , κ_y з компонентами переміщень u , v , w :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Фізичні співвідношення для розглянутої моделі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \delta N_x &= B_{11}\epsilon_x + B_{12}\epsilon_y + A_{11}\kappa_x + A_{12}\kappa_y, \\ \delta N_y &= B_{21}\epsilon_x + B_{22}\epsilon_y + A_{21}\kappa_x + A_{22}\kappa_y, \\ \delta M_x &= A_{11}\epsilon_x + A_{12}\epsilon_y + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y, \\ \delta M_y &= A_{21}\epsilon_x + A_{22}\epsilon_y + D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y, \\ \delta N_{xy} &= B_{66}\gamma_{xy} + A_{66}\kappa_{xy}, \quad \delta M_{xy} = A_{66}\gamma_{xy} + D_{66}\kappa_{xy}, \end{aligned} \quad (3)$$

де B_{ij} , A_{ij} , D_{ij} — відомі жорсткості [1, 2].

Як результат підстановки співвідношень (3) у рівняння рівноваги (1), з урахуванням геометричних співвідношень (2), отримаємо таку систему диференціальних рівнянь відносно збурених значень переміщень u , v , w :

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{12} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - A_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \\ - (A_{12} + 2A_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{66} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \\ B_{66} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - 2A_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + B_{22} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + B_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - A_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - A_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\ A_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (A_{21} + A_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - B_{21} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \\ + (A_{12} + 2A_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\ - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(\frac{A_{21} + A_{12}}{R} - N_1 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \left(2 \frac{A_{22}}{R} - N_2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{B_{22}}{R} w = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для шарнірно опертих країв оболонки ($x = 0$, $x = L$) крайові умови мають вигляд:

$$\delta N_x = \delta M_y = v = w = 0. \quad (5)$$

Граничні умови системи рівнянь (4) — однорідні. Власні функції, які описують переміщення у разі втрати стійкості оболонки за умов (5), подаємо у такому вигляді:

$$u = \tilde{u} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m y}{R},$$

$$v = \tilde{v} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m y}{R}, \quad w = \tilde{w} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m y}{R}, \quad (6)$$

де \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} — амплітудні значення переміщень.

Підставивши подання розв'язку (6) у рівняння (4), отримаємо однорідну систему трьох алгебричних рівнянь для визначення невідомих \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} . З умови існування її розв'язку випливає, що визначник з коефіцієнтів рівнянь системи повинен дорівнювати нулю. Отже, отримуємо таку умову стійкості багат шарової оболонки:

$$N_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + N_2 \left(\frac{m}{R} \right)^2 = C_{33} + C_{23} \frac{C_{13}C_{12} - C_{11}C_{23}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} + C_{13} \frac{C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}. \quad (7)$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned} C_{11} &= B_{11} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + B_{66} \left(\frac{m}{R} \right)^2, \\ C_{12} &= (B_{12} + B_{66}) \frac{n\pi}{L} \frac{m}{R}, \\ C_{13} &= \frac{B_{12}}{R} \frac{n\pi}{L} + A_{11} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^3 + (A_{21} + 2A_{66}) \frac{n\pi}{L} \left(\frac{m}{R} \right)^2, \\ C_{22} &= B_{66} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + B_{22} \left(\frac{m}{R} \right)^2, \\ C_{23} &= (A_{21} + 2A_{66}) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{m}{R} + \frac{B_{22}}{R} \frac{m}{R} + A_{22} \left(\frac{m}{R} \right)^3, \\ C_{33} &= D_{11} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + (4D_{66} + D_{12}) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{m}{R} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{m}{R} \right)^4 + 2 \frac{A_{21}}{R} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + 2 \frac{A_{22}}{R} \left(\frac{m}{R} \right)^2 + \frac{B_{22}}{R^2}. \end{aligned}$$

Критичне навантаження визначаємо за допомогою виразу (7) шляхом пошуку мінімуму внутрішнього зусилля (власного значення) за числами m і n .

З умови стійкості (7) випливають часткові випадки: а) стійкість оболонки при осьовому стиску без зовнішнього тиску; б) стійкість оболонки за дії зовнішнього тиску (без осьового стиску).

У першому випадку слід покласти $N_2 = 0$, а у другому випадку — $N_1 = 0$. Формула (7) справедлива також і у випадку одношарової труби. У цьому разі потрібно у виразах для C_{ij} прийняти, що жорсткості $A_{ij} = 0$. Це стосується також і того випадку, коли весь пакет багат шарової оболонки можна вважати ортотропним матеріалом.

Зокрема, для одношарової ортотропної оболонки завтовшки H величини B_{ij} та D_{ij} у виразах для C_{ij} мають вигляд:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{E_x H}{1 - \nu_{x\phi} \nu_{\phi x}}, \quad B_{22} = \frac{E_\phi H}{1 - \nu_{x\phi} \nu_{\phi x}}, \quad B_{12} = \nu_{x\phi} B_{11}, \\ B_{66} &= G_{x\phi} H, \quad D_{11} = B_{11} H^2 / 12, \quad D_{22} = B_{22} H^2 / 12, \\ D_{12} &= \nu_{x\phi} D_{11}, \quad D_{66} = B_{66} H^2 / 12, \end{aligned}$$

де E_x , E_ϕ — модулі Юнга матеріалу в осьовому та кільцевому напрямках; $G_{x\phi}$ — модуль зсуву, що характеризує зміну кута між головними напрямками; $\nu_{x\phi}$, $\nu_{\phi x}$ — коефіцієнти Пуасона (перший індекс вказує напрям скорочення чи розширення, а другий — напрям дії сили). Модулі Юнга та коефіцієнти Пуасона зв'язані залежністю $E_x \nu_{x\phi} = E_\phi \nu_{\phi x}$.

Вказані припущення дають змогу отримати розрахункові формули для визначення критичних навантажень, які достатньо повно апробовані на однорідних анізотропних оболонках та обґрунтовані на основі експериментальних даних. Для полімерних труб зі стільниковою будовою стінки показано можливість моделювання їх оболонкою з ефективними модулями ортотропії, зведеною товщиною H і радіусом серединної поверхні $R = R'_0$.

Розрахункові формули для визначення критичних навантажень труби. Далі розглянемо деякі часткові випадки, які випливають з наведеної загальної формули (7) для оцінки стійкості стільникової полімерної труби різної довжини.

Рівномірний осьовий стиск ($N_2 = 0$). У діапазоні довжин труби

$$1,38\sqrt{H/R'_0} \leq L/R'_0 \leq 0,57\sqrt{R'_0/H}$$

(середньої довжини), торці якої шарнірно закріплені, критичні напруження її осесиметричної форми втрати стійкості при рівномірному осьовому стиску визначаються за формулою [1]

$$\sigma_{кр} = \frac{2\sqrt{D_{11} B_{22}}}{HR'_0}.$$

Критичну силу стиску $P_{кр}$ визначаємо через знайдену величину $\sigma_{кр}$ за формулою

$$P_{кр} = 2\pi R'_0 H \sigma_{кр}.$$

Для довгих труб, для яких виконується нерівність $L/R'_0 > 0,57\sqrt{R'_0/H}$, відповідні критичні напруження можна розраховувати за формулою Ейлера:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E_x (R'_0)^2 / L^2.$$

Рівномірний зовнішній стиск ($N_1 = 0$). Критичний тиск втрати стійкості труби середньої довжини за рівномірного зовнішнього стиску розраховується за формулою [5]

$$q_{кр} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{E_\phi}{(1 - \nu_{x\phi} \nu_{\phi x})^3} \sqrt{\frac{E_x}{E_\phi} \frac{\pi R'_0}{L} \left(\frac{H}{R'_0} \right)^2}.$$

Для визначення критичного тиску довгих труб слід користуватись такою формулою:

$$q_{кр} = 3D_{\phi} / (R'_0)^3,$$

де $D_{\phi} = E_{\phi} I_y / H$, I_y обчислюється за відповідними формулами для одно- і двошарової структур стінки труби [4].

У результаті розрахунку на стійкість труби зі стільниковою стінкою одношарової структури при рівномірному осьовому стиску з параметрами: $D^* = 32$ мм, $L = 900$ мм, $E_x = 390$ МПа, $E_{\phi} = 750$ МПа, $\nu_{x\phi} = 0,35$ отримано такі значення критичного напруження і навантаження: $\sigma_{кр} = 0,699$ МПа, $P_{кр} = 6450$ кГ.

Якщо один край труби шарнірно закріплений, а другий повністю вільний ($\delta N_x = 0$, $\delta N_{x\phi} = 0$), то виникають чисто згинні деформації без розтягу та зсувів її серединної поверхні. За таких умов при рівномірному осьовому стиску забезпечується чисто згинна форма втрати стійкості.

Біфуркаційні переміщення у цьому випадку слід задати у вигляді [1]

$$u = \frac{A_n}{n^2} \cos n\phi, \quad v = \frac{A_n}{n} \frac{x}{R'_0} \sin n\phi, \quad w = -A_n \frac{x}{R'_0} \cos n\phi, \quad (8)$$

де A_n — довільний параметр.

З використанням подання (8) енергетичним методом отримано нову розрахункову формулу для визначення критичного навантаження:

$$\sigma_{кр} = \frac{3D_{22}}{HR'_0{}^2} \left[\left(\frac{L}{R'_0} \right)^2 + 3 \frac{G_{x\phi}}{E_{\phi}} (1 - \nu_{x\phi} \nu_{\phi x}) \right] \left(\frac{H}{R'_0} \right)^2. \quad (9)$$

Як частковий випадок, з формули (9) випливає відома формула для ізотропної оболонки [1]. Чисто згинна форма втрати стійкості здійснюється за найменших критичних навантажень.

Висновки. Запропоновані формули для оцінки стійкості стільникових полімерних труб за їхніми ефективними характеристиками. Використання наведених залежностей дає змогу здійснювати прогнозовані оцінки стійкості стільникових труб різної довжини за різних умов

навантаження. Результати розрахунків використано на підприємствах корпорації “Енергоресурс-Інвест” при впровадженні полімерних труб зі стільниковою будовою стінки для водопостачання і водовідведення.

Література

1. Алфатов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. — М.: Машиностроение, 1991. — 336 с.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974. — 446 с.
3. Беляев Н. М. Сопrotивление материалов. — М.: Госиздат техн.-теор. лит., 1953. — 856 с.
4. Максимук О., Щербина Н., Махніцький Р., Гануліч Н. Моделирование стільникової стінки труб із полімерних матеріалів // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. — Львів, 2008. — Т. 2. — С. 227—230.
5. Погорелов В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций. — Санкт-Петербург: БХВ, 2007. — 528 с.
6. Полимерные сетчатые конструкции: меньше материала — больше достоинств // Инженерные сети из полимерных материалов. — 2006. — №3. — С. 32—34.
7. Стацук М., Дорош М. Визначення деформованого стану підкріпленого стільникового трубопроводу // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. — Львів, 2008. — Т. 2. — С. 239—241.
8. Jonson L.-E. Plastics pipes for water supply and sewage disposal. — Borealis, Boras, 1996. — 286 p.

Отримана 20.08.08

O. Maksymuk, R. Makhniitsky, N. Shcherbyna
Calculation of stability of polymeric pipes with
honeycomb wall structure

*Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and
Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv*

The problem of stability of honeycomb wall structure of pipes subjected to static loadings is investigated. As the basic engineering calculated quantity of the tube, its ring rigidity is accepted. From the condition of maintenance of necessary value of the ring rigidity of cylindrical tubes made of polymeric materials with honeycomb wall the geometrical, physicomechanical and technological parameters are certain. The engineering formulas to estimate the stability of polymeric pipes with honeycomb walls and different lengths are presented.

Ä î â³âîî à àâðîð³â!

Опублікування статей у журналі “Машинознавство” є безкоштовним. Організаціям-передплатникам, а також спонсорам журналу “Машинознавство” у разі офіційного клопотання надається право позачергового опублікування статей їхніх працівників за умови позитивної рецензії. Аналогічно пільгою користуються автори, які особисто передплатили не менше шести примірників журналу, або посприяли його передплаті для організації.

Журнал “Машинознавство” можна передплатити на будь-який місяць і довільну кількість примірників, перерахувавши по 25 грн за кожен примірник видавцю журналу.