

О. Полюдов

Професор, д-р. техн. наук

В. Пасіка

Доцент, канд. техн. наук

Українська академія друкарства,  
м. Львів

УДК 621-75

## СИНТЕЗ КОМБІНОВАНОГО МАЛЬТІЙСЬКОГО МЕХАНІЗМУ ЗІ ЗРІВНОВАЖЕНИМ ХРЕСТОМ

*Дітсәеуі ооа сд³аііааәоаәеуіа пәһоаі а әеу сд³аііааәоааііу одаһоа і әеуіо³әһуеіаі  
і аоаі³сі о с³ сі³ііір аіаәеіір аіаеә. І іәәсәіі, үі оәеір пәһоаі ір ііәіа  
сд³аііааәеөә өеәеііаі³ сәеііе дооо одаһоа.*

мальтійський механізм, синтез, зрівноваження, закон руху

У вихідних мальтійських механізмах початок і кінець руху хреста завжди супроводжується початковим і кінцевим пришвидшенням [1]. Сама зміна пришвидшення хреста є досить істотною, змінюючись як за напрямом, так і за величиною. Усе це призводить до появи м'яких ударів і незрівноваженого моменту сил інерції на хресті. Якщо з хрестом пов'язані великоінерційні маси, наприклад, для повороту столів агрегатних верстатів, то динамічні навантаження на хресті викличуть коливання вала хреста і можуть не задовольнити, наприклад, умови позиціонування. У зв'язку з цим, актуальним постає питання зрівноваженості сил інерції мас, зведених до вала хреста.

У статті [2] розглядався мальтійський механізм зі збільшеним часом повороту хреста. Цей механізм має менші кутові пришвидшення хреста і, відповідно, менші інерційні навантаження. Однак, коли на рух хреста накладають додаткові динамічні обмеження, то збільшенням часу повороту хреста не можливо повністю зрівноважити чи хоча б істотно зменшити інерційні навантаження.

Для усунення цього недоліку використаємо комбінований мальтійський механізм зі змінною довжиною водила і додатково зрівноважувальну систему, яка містить пару зубчастих коліс  $z_2$ ,  $z_8$  і пружину розтягу  $DE$ , рис. 1. Зубчасте колесо  $z_2$  жорстко посаджене на вал хреста, а пружина одним кінцем прикріплена до стояка в точці  $E$ , а другим — до зубчастого колеса  $z_8$  у точці  $D$  з радіусом обертання  $r_D = l_{DE}$ . Такою зрівноважувальною

системою можна повністю зрівноважувати симетричні циклоїдні закони руху хреста.

Для циклоїдних законів руху за один поворот хреста колесо  $z_8$  повинно зробити повний оберт. При цьому, в момент початку руху хреста точка кріплення пружини  $D$  повинна знаходитись на промені, який проходить крізь точки  $E$  і  $C$  вище точки  $C$ .

Зрівноважувальна система працює так.

На стадії розгону хреста момент сил інерції  $M_{S_2}$  діятиме на хрест проти його руху. На цій стадії пружина з вертикального положення відхилиться вліво і створить момент  $M_{\Pi}$ , який діятиме в напрямі обертання колеса  $z_8$  (цей випадок зображений на рис. 1). Коли осі водила і паза хреста збіжаться з віссю  $OB$ , точка  $D$  повинна знаходитись на прямій  $CE$  нижче точки  $C$ . При цьому хрест і колесо  $z_2$  повернуться на кут  $\varphi_{2\Sigma}/2$ , а колесо  $z_8$  зробить пів оберту. Для забезпечення такого співвідношення потрібно, щоб передавальне число між зубчастими колесами становило  $i_{28} = \varphi_{2\Sigma}/2\pi = 1/z$ .

На стадії вибігу момент  $M_{S_2}$  діє за рухом обертання колеса  $z_2$ , а пружина буде відхилена вправо від осі  $CE$  і створить момент  $M_{\Pi}$  у протилежному до обертання колеса  $z_8$  напрямі. Таким чином, при повороті хреста момент сил пружності пружини  $M_{\Pi}$  весь час діє проти моменту сил інерції  $M_{S_2}$ .

Задача зводиться до синтезу такого моменту сил інерції (закону руху хреста), при якому для будь-якого кута повороту хреста зберігатиметься рівність

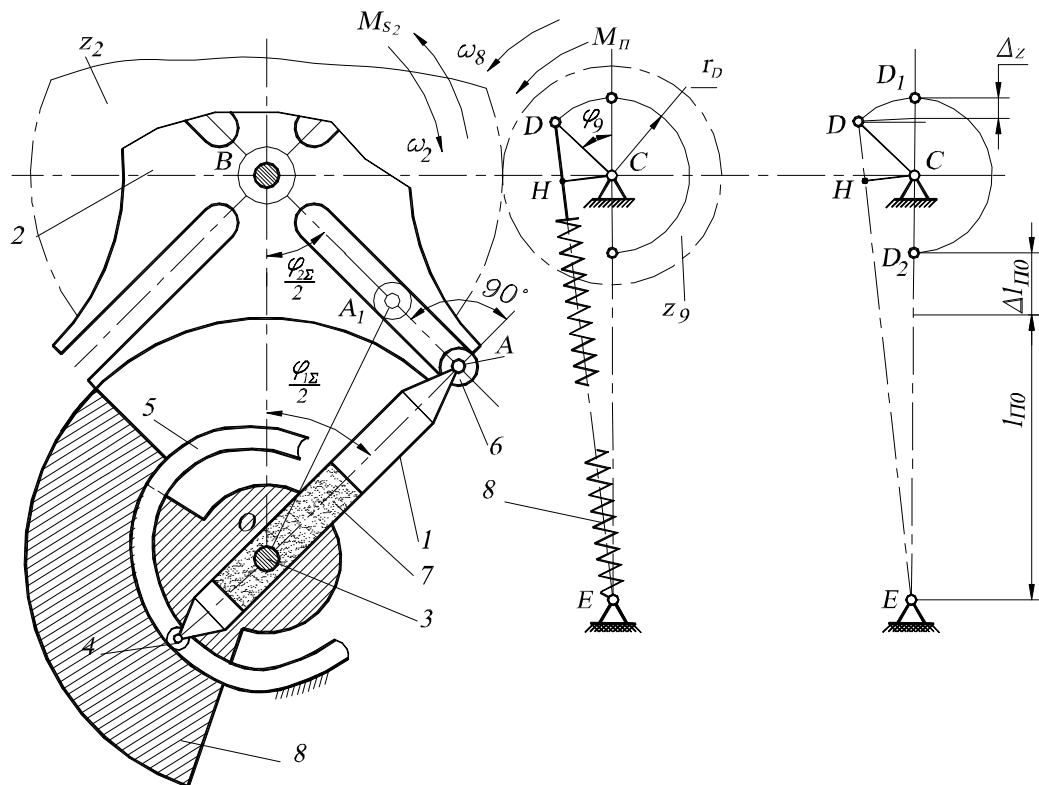


Рис. 1. Зрівноважувальна система комбінованого мальтійського механізму:  
 а) – комбінований мальтійський механізм зі зрівноважувальною системою;  
 б) – до визначення деформації пружини

$$M_{s_2} = M_{II_2}, \quad (1)$$

де  $M_{s_2} = I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2}$ ;  $M_{II_2} = M_{II} / i_{28}$  — момент сили пружності пружини, зведений до осі обертання хреста;  $M_{II} = F_{II} h$  — момент сили пружності пружини відносно осі обертання колеса  $z_8$ ;  $I_2$  — момент інерції зведених до хреста мас відносно осі обертання хреста;  $\varphi_2$  — кут повороту хреста;  $F_{II}$  і  $h$  — сила і плече сили пружності пружини.

Виразивши кут повороту хреста через його інваріант переміщення  $\varphi_2 = a_{k_2} \varphi_{2\Sigma}$  і, ввівши нову безрозмірну змінну  $k = \varphi_1 / \varphi_{1\Sigma}$ , отримуємо величину моменту сил інерції в інваріантній формі

$$M_{s_2} = c_{k_2} I_2 \frac{\varphi_{2\Sigma}}{\varphi_{1\Sigma}^2} \omega_1^2,$$

де  $c_{k_2}$  — інваріант пришвидшень хреста;  $\varphi_1$  і  $\omega_1$  — кут повороту і кутова швидкість водила  $OA$ .

Позначимо довжину недеформованої пружини  $l_{II0}$ , а попередній розтяг пружини у нижньому положенні  $D_2$  —  $\Delta l_{II0}$ . Максимальна довжина деформованої пружини становитиме  $l_{II\max} = l_{II0} + \Delta l_{II0} + 2r_D = b + r_D$ , а максимальна деформація —  $\Delta l_{II\max} = \Delta l_{II0} + 2r_D$ , рис. 1.б. Довжину пружини у довільному положенні визначаємо з трикутника  $\triangle CDE$   $l_{II} = \sqrt{r_D^2 + b^2 + 2r_D b \cos(\varphi_8)}$  за теоре-

мою косинусів, а зміну деформації пружини за виразом  $\Delta z = l_{II\max} - l_{II} = b + r_D - \sqrt{r_D^2 + b^2 + 2r_D b \cos(\varphi_8)}$ . Тоді деформація пружини

$$\Delta l_{II} = \Delta l_{II\max} - \Delta z = \Delta l_{II0} + r_D - b + \sqrt{r_D^2 + b^2 + 2r_D b \cos(\varphi_8)}.$$

Формула справедлива для механізмів, коли  $b > r_D$ . Тут  $b = l_{CE}$  — міжосьова віддаль між опорами;  $\varphi_8 = \varphi_2 / i_{28} = z \cdot a_{k_2} \varphi_{2\Sigma}$  — кут повороту колеса  $z_8$ ;  $a_{k_2}$  — синтезуючий інваріант переміщення хреста. Коли  $b < r_D$  перед радикалом потрібно змінити знак. Для врахування цього вводимо функцію знака і отримуємо:

$$\Delta l_{II} = r_D + \Delta l_{II0} - b + \text{sign}(b - r_D) \sqrt{r_D^2 + b^2 + 2r_D b \cos(\varphi_8)}.$$

Ця формула справедлива для механізмів, коли  $b > r_D$  і коли  $b < r_D$ .

Сила пружності  $F_{II} = c \cdot \Delta l_{II}$ , де  $c$  — коефіцієнт жорсткості пружини. З  $\triangle CDE$  визначаємо за теоремою синусів кут  $\sin(\varphi_{II}) = \frac{r_D}{l_{II}} \sin(\varphi_8)$ . З  $\triangle CEH$  плече сили пружності  $h = CH = \frac{br_D}{l_{II}} \sin(\varphi_8)$ . Тоді момент сил пружності

$$M_{II} = cbr_D \sin(z\varphi_2) \left[ \frac{r_D + \Delta l_{II0} - b}{\sqrt{r_D^2 + b^2 + 2r_D b \cos(z\varphi_2)}} + \text{sign}(b - r_D) \right].$$

Тепер рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - \frac{cbr_D}{i_{28} I_2} \sin(z\varphi_2) \left[ \frac{r_D + \Delta l_{II0} - b}{\sqrt{b^2 + r_D^2 + 2br_D \cos(z\varphi_2)}} + \text{sign}(b - r_D) \right] = 0. \quad (2)$$

Рівняння (2) диференціальне, другого порядку нелінійне відносно кута повороту хреста  $\varphi_2$ .

Для зрівноважувальної системи введемо безрозмірні відносні геометричні параметри:  $\mu_{rD} = r_D / d_8 = r_D$ ,  $\mu_b = b / d_8 = b$ ,  $\mu_d = \Delta l_{II0} / d_8 = \Delta l_{II0}$ , де  $d_8 = 1$  м — дільний діаметр зубчастого колеса  $z_8$ .

З прийнятими позначеннями записуємо диференціальне рівняння (2) відносно потрібного закону руху хреста в інваріантній формі

$$a_{k_2} - z \frac{\varphi_{1\Sigma}^2}{\varphi_{2\Sigma}} \frac{c}{I_2 \omega_1^2} \mu_b \mu_{rD} \sin(z a_{k_2} \varphi_{2\Sigma}) \left[ \frac{\mu_{rD} - \mu_b + \mu_d}{\mu_{II}} + \text{sign}(\mu_b - \mu_{rD}) \right] = 0,$$

$$\text{де } \mu_{II} = \sqrt{\mu_b^2 + \mu_{rD}^2 + 2\mu_b \mu_{rD} \cos(z a_{k_2} \varphi_{2\Sigma})}.$$

Величина  $\frac{c}{I_2 \omega_1^2}$  є сталою для конкретного механізму.

Виразимо цю сталу через інші характеристики механізму.

На початку руху хреста його кінетична енергія дорівнює нулю. У цей час потенційна енергія пружини є максимальною і становить  $E_{nom} = c(2r_D + \Delta l_{II0})^2 / 2$ . Коли хрест повернеться на кут  $\varphi_{2\Sigma} / 2$  кінетична енергія хреста стане максимальною і становитиме  $E_{kin} = (0,5 I_2 \omega_2^2)_{max}$ , де

$$\omega_{2max} = B \frac{\varphi_{2\Sigma}}{\varphi_{1\Sigma}} \omega_1, \quad B \text{ — константа швидкості хреста, а}$$

потенціальна енергія стане мінімальною і дорівнюватиме  $E_{nom} = c \Delta l_{II0}^2 / 2$ . Таким чином, без врахування втрат зміна кінетичної і потенціальної енергій мусить бути однаковою, тобто,  $(E_{kin})_{max} = (E_{nom})_{max} - (E_{nom})_{min}$ . З останньої рівності визначаємо сталу механізму

$$st \equiv \frac{c}{I_2 \omega_1^2} = \frac{B^2 \varphi_{2\Sigma}^2}{4 \varphi_{1\Sigma}^2 r_D (r_D + \Delta l_{II0})}.$$

Маючи числове значення сталої  $st$  і два з трьох параметрів  $c$ ,  $I_2$  і  $\omega_1$ , визначаємо третій параметр. Наприклад, якщо відомі частота обертання водила і момент інерції (найреальніший випадок) потрібну жорсткість пружини обчислюємо за виразом  $c = I_2 \omega_1^2 \cdot st$ .

Кінцево записуємо рівняння для визначення потрібного інваріанта закону руху хреста при якому мальтійський хрест буде зрівноваженим

$$a_{k_2} - \frac{\pi B^2 \mu_b}{2(\mu_{rD} + \mu_d)} \sin(z a_{k_2} \varphi_{2\Sigma}) \left[ \frac{\mu_{rD} - \mu_b + \mu_d}{\mu_{II}} + \text{sign}(\mu_b - \mu_{rD}) \right] = 0.$$

Для числового розв'язку диференціального рівняння подамо його у формі Коші. Нехай  $y_1 = a_{k_2}$ ,  $y_2 = dy_1 / dk = da_{k_2} / dk$ . Тоді  $d^2 a_{k_2} / dk^2 = dy_2 / dk$ . З такими замінами отримуємо систему двох рівнянь першого порядку:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dk} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dk} &= \frac{\pi B^2 \mu_b}{2(\mu_{rD} + \mu_d)} \sin(z a_{k_2} \varphi_{2\Sigma}) \left[ \frac{\mu_{rD} - \mu_b + \mu_d}{\mu_{II}} + \text{sign}(\mu_b - \mu_{rD}) \right] \end{aligned} \right\}$$

з початковими умовами:

$$k = 0 \rightarrow y_1 = 0,5 \quad (a_{k_2} = 0,5), \quad y_2 = B \quad (b_{k_2} = B).$$

Проаналізуємо вплив параметрів зрівноважувальної системи на інерційну складову інваріанта синтезованого закону руху хреста, при якому хрест буде зрівноваженим і на профіль кулачка.

Дослідження проводились для константи швидкості  $B = 2$ , що відповідає вихідному циклоїдному закону і таких параметрів:  $\mu_{rD} = 0,7 - 1$ ,  $\mu_b = 2 - 3 - 4$ ;  $\mu_d = 0 - 0,2 - 0,4 - 0,7$ .

Аналіз графіків на рис. 2 показує таке: для різних значень  $\mu_b$  і  $\mu_{rD}$  з ростом попереднього натягу  $\mu_d$  константа піка пришвидшення зменшується від 11% для  $\mu_b = 2$  і  $\mu_{rD} = 1$  до 11,82% для  $\mu_b = 4$  і  $\mu_{rD} = 0,7$ ; при збільшенні міжосьової віддалі  $\mu_b$  спостерігаємо незначний ріст константи пришвидшення; в околі точки  $k = 0,5$  інваріант пришвидшення двічі змінює знак кривини. Однак існує така величина попереднього натягу  $\mu_d$ , при якій спадання інваріанта пришвидшення відбувається за квазілінійним законом. При цьому швидкість обертання хреста буде квазісталою. Так, наприклад, для  $\mu_b = 2$  і  $\mu_{rD} = 1$  при попередньому натягу  $\mu_d = 0,7$  спад інваріанта пришвидшення відбувається по лінії; константа пришвидшення в усіх варіантах більша за константу у вихідному циклоїдному законі, для якого  $C = 2\pi$ .

Числові дослідження показують, що траєкторія кінця водила для різної кількості пазів на хресті може бути вгнутою, тобто змінювати знак кривини. На рис. 3 наведено траєкторію кінця водила для різних значень кількості пазів на хресті. Для  $z = 3$  профіль кулачка вгнутий, що може негативно впливати на динаміку механізму. Для інших значень профіль кулачка випуклий. Отримані графіки будувались за відсутності попереднього натягу. На правому рисунку для  $z = 3$  побудовано профіль кулачка для двох значень попереднього натягу. Як бачимо, за

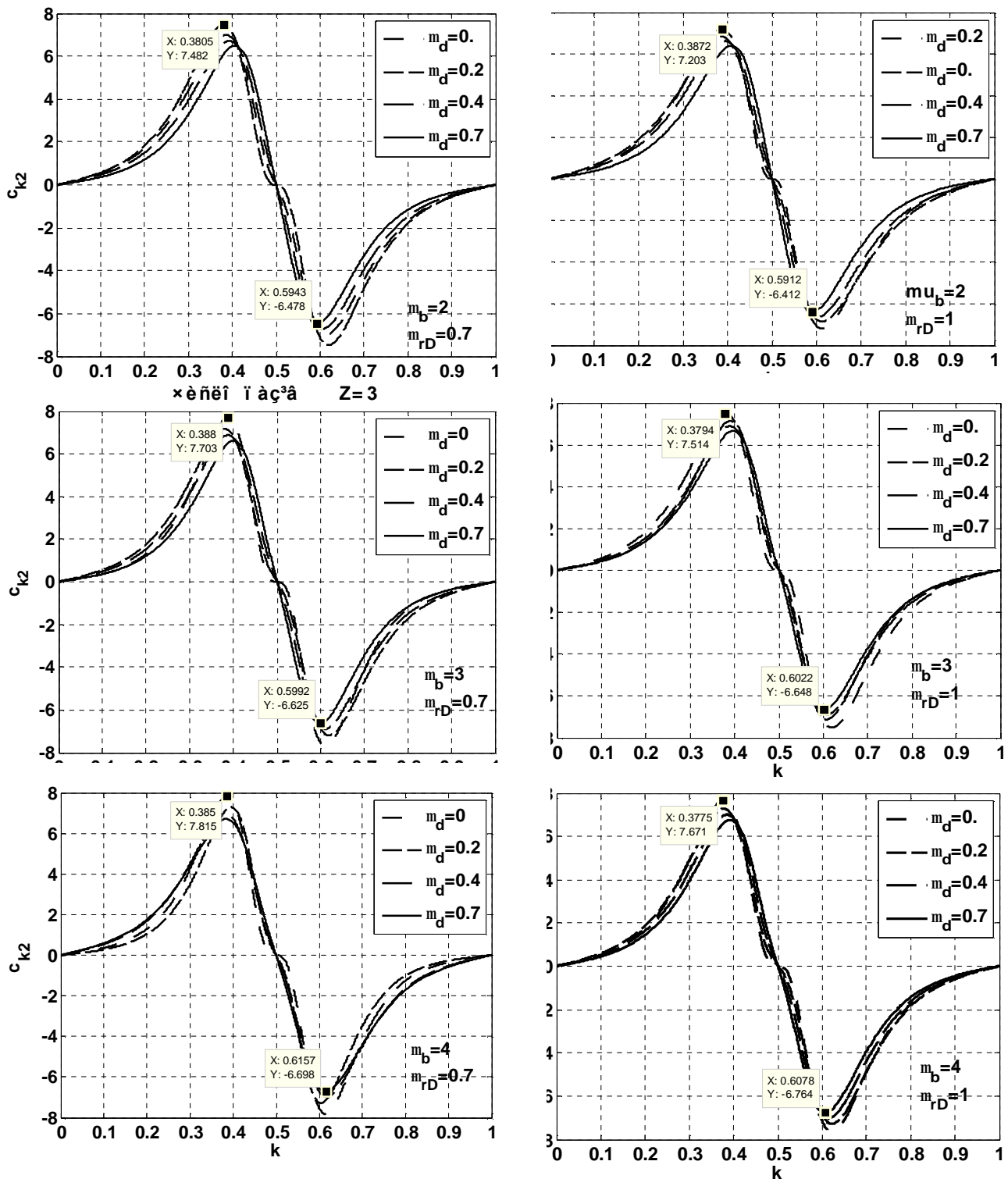


Рис. 2. Залежність інваріанта пришвидження синтезованого закону руху хреста від параметрів зрівноважувальної системи

допомогою попереднього натягу можна позбутися вгнутості профілю кулачка.

Вище зазначалось, що при збільшенні міжосьової віддалі неістотно зростає константа пришвидження. Оскільки, при дослідженні мінімальний параметр міжосьової віддалі було прийнято  $\mu_b = 2$ , то проведемо дослідження впливу попереднього натягу на константу пришвидження і профіль кулачка для трипазового

мальтійського механізму при  $\mu_b = 1$ . При такій кількості пазів профіль кулачка має вгнутість. Результати досліджень наведені на рис. 4.

При мінімальній міжосьовій віддалі  $\mu_b = 1$  константа  $C$  має найменші значення. Профіль кулачка для  $z = 3$  при нульовому натягу хоч і має вгнутість, але менш виражену, ніж на рис. 3. Починаючи з  $\mu_d = 0,2$  профіль кулачка — опуклий. Характерно, що меншим значенням

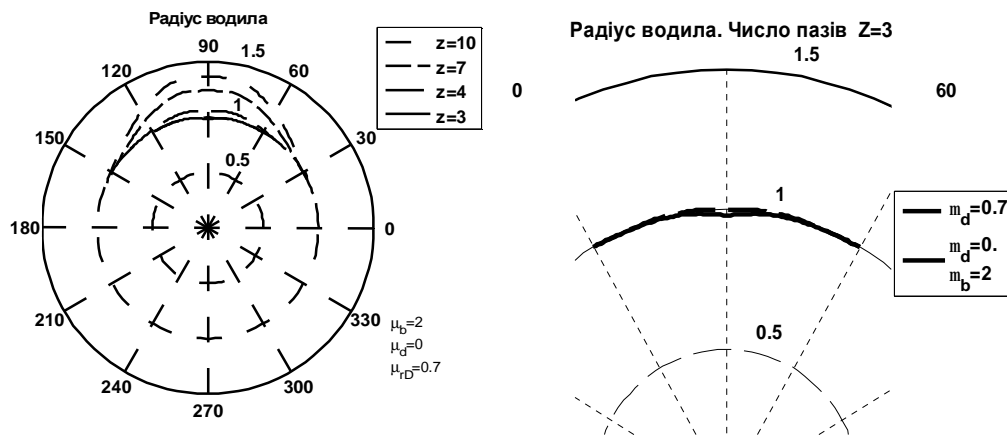


Рис. 3. Залежність профілю кулачка від кількості пазів  $z$

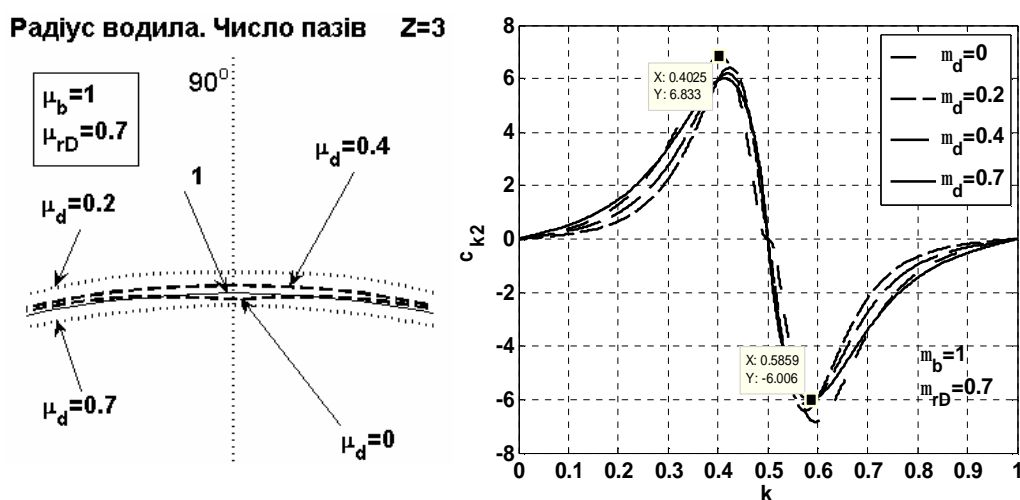


Рис. 4. Вплив попереднього натягу на профіль кулачка і константу пришвидшення  $C$

константи  $C$  відповідає профіль кулачка з меншими розмірами.

**Висновки.** Запропоновано механічну систему для повного зрівноваження інерційних навантажень на мальтійському хресті; синтезовано кінематичні інваріанти хреста і за їхніми результатами радіус-вектор нерухомого кулачка, що забезпечує повне зрівноваження хреста; показано, що для отримання кулачка з опуклим профілем першочергове значення мають міжосьова віддаль від точки кріплення пружини до осі обертання зубчастого колеса і величина попереднього натягу пружини; розроблена обчислювальна програма для оперативного синтезу радіуса вектора нерухомого кулачка; варіацією параметрів зрівноважувальної системи можна отримати профіль кулачка, при якому рух хреста відбуватиметься з квазі-сталою швидкістю у середині кінематичного циклу; при проектуванні зрівноважувальної системи доцільно якомога меншою брати міжосьову віддаль і якомога більшою величину попереднього натягу.

## Література

1. Артобелевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. — М.: Государственное издательство физмат литературы. 1959. — 1084 с.
2. Пасіка В.Р. Синтез комбінованих мальтійських механізмів з метою збільшення часу повороту і забезпечення заданого закону руху хреста // Вісник Східноукраїнського національного університету імені В. Даля. — 2007. — №9 (115). — С. 175—183.

Отримана 11.09.08

O. Poludov, V. Pasika

**Synthesis of movement law of combined maltese cross mechanism with balancing**

Ukrainian Academy of Printing, Lviv

The balanced system for balancing of cross of the Geneva mechanism with variable length of crank is examined in work. It is shown that it is possible to balance the cyclical laws of motion of cross by such systems.