

О. Гачкевич

Професор, д-р фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів, Україна;
Політехніка Опольська,
м. Опольє, Польща

М. Гачкевич

Канд. фіз.-мат. наук

Є. Ірза

Канд. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів, Україна

З. Касперський

Ад'юнкт,
Політехніка Опольська,
м. Опольє, Польща

УДК 539.3

МЕТОДИКА ЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ ВІДПАЛУ СКЛЯНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Запропонована методика оптимізації режимів відпалу скляних тіл обертання при обмеженнях на напружений стан тіла. Для опису термомеханічної поведінки таких тіл використана тривимірна модель термочутливого пружного тіла за врахування релаксації початкових (вихідних) залишкових напружень.

термічне оброблення, відпал, тіло обертання, скляний виріб

У скляних виробках при нагріванні, охолодженні, силовому навантаженні виникають механічні напруження. Напруження можуть бути тимчасовими і залишковими. Тимчасові напруження зникають при охолодженні скла до натуральної температури, а залишкові — практично впливають на подальші експлуатаційні властивості виробу.

До зменшення рівня залишкових напружень застосовують відпал скла. Відпал — це спеціальне температурне оброблення всього скляного виробу з метою зменшення рівня залишкових напружень за рахунок їх релаксації при витримці за підвищених температур нижчих за температуру склування (при яких скло ще не розм'якшується) з подальшим повільним охолодженням.

Порівняно з існуючими в літературі дослідженнями в цьому напрямі [1 — 3], в статті запропоновано методику

числової оптимізації режимів відпалу скляних тіл обертання (форма яких відмінна від канонічної) при обмеженнях на напружений стан тіла. Для опису термомеханічної поведінки таких тіл використано тривимірну модель термочутливого пружного тіла за врахування релаксації початкових (вихідних) залишкових напружень за підвищених температур. Вибір функціоналу оптимізації здійснюється поетапно, в залежності від наявних інтервалів температур нагрівання тіла.

Процес відпалу поділено на п'ять стадій. Перша стадія — нагрів від початкової t_0 до нижньої температури відпалу t_v^n (температура, якій відповідає в'язкість 10^{15} П). На цій стадії приймається, що напруження не повинні перевищувати допустимих (щоб виріб не зруйнувався). При такій в'язкості залишкові напруження практично не виникають. Друга стадія — подальший повільний нагрів

до верхньої температури відпалу t_v^e (температура, якій відповідає в'язкість 10^{13} П), за якого виріб рівномірно прогрівається. Третя стадія — витримка при верхній температурі відпалу до зникнення чи максимального пониження рівня залишкових напружень (тривалість якої визначається з умови досягнення потрібного рівня залишкових напружень). Четверта стадія — повільне охолодження до нижньої температури відпалу, за якого не виникають залишкові напруження. П'ята стадія — охолодження до натуральної температури за міцнісних обмежень на допустимі тимчасові напруження.

Математична постановка задачі оптимізації відпалу скляних тіл обертання включає на кожній стадії такі етапи: формулювання залежностей, які описують поведінку тіл за заданих умов відпалу; вибір критерію і відповідного функціоналу оптимізації; вибір функцій керування, за допомогою яких досягається екстремум функціоналу оптимізації; формулювання обмежень на параметри стану і функції керування.

Розглядаємо тіло обертання, яке займає область W евклідового простору R^3 і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ . Воно віднесене до циліндричної системи координат $Or\phi z$. Як і в загальних постановках задач термомеханіки [4] приймаємо, що на частині Γ_u поверхні Γ тіла задано переміщення $\bar{u} = (u_r^0, u_z^0)$, а на частині Γ_σ — силове навантаження, яке характеризується вектором $\bar{p} = (p_r, p_z)$, ($\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$).

Тіло піддається технологічному осесиметричному нагріванню, яке здійснюється через поверхню Γ конвективним способом зовнішнім середовищем температури $t_c(t)$.

Вважаємо, що при розглянутій тепловій дії напружений стан тіла не впливає на його температуру, тобто задачу про визначення напружено-деформованого стану в тілі формулюємо в квазістатичній постановці (в переміщеннях). При цьому температурне поле в тілі описується відомим рівнянням теплопровідності [4]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (1)$$

за таких початкової і граничних умов:

$$t(r, z, 0) = t_0; \left[k \left(\frac{\partial t}{\partial r} n_r + \frac{\partial t}{\partial z} n_z \right) + \alpha(t - t_c) \right]_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Тут $c(t)$ — питома теплоємність; $r(t)$ — густина; t — час; $k(t)$ — коефіцієнт теплопровідності; $\alpha(t)$ — коефіцієнт тепловіддачі; n_r, n_z — компоненти зовнішньої нормалі до поверхні.

Зв'язок між компонентами тензора напружень і тензора деформацій приймаємо у вигляді [3]:

$$\{\sigma\} = [D] \{ \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\} \} \quad \text{при } t < t_v^b, \\ \sigma_{екв} = \sigma_0 e^{-\frac{G}{\eta_c} \tau} \quad \text{при } t = t_v^b, \quad (3)$$

де $[D]$ — матриця пружних характеристик; $\{\sigma\}$ — тензор напружень; $\{\varepsilon\}$ — тензор деформацій; $\{\varepsilon_t\}$ — тензор

температурної деформації; $\sigma_{екв}$ — еквівалентні напруження [2]; σ_0 — початкові залишкові напруження; η_c — динамічна в'язкість при зсуві; G — модуль пружності при зсуві.

В області Ω повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (4)$$

і механічні граничні умови:

$$n_r \sigma_{rr} + n_z \sigma_{zr} - p_r = 0, \quad n_r \sigma_{rz} + n_z \sigma_{zz} - p_z = 0 \quad \text{на } \Gamma_\sigma; \\ u_r = u_r^0, \quad u_z = u_z^0 \quad \text{на } \Gamma_u. \quad (5)$$

Обмежимося випадком малих деформацій. При цьому зв'язок між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора переміщень у розглянутому випадку буде таким:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (6)$$

Зведена система залежностей рівнянь (1) — (6) за прийнятих зв'язків між компонентами тензора деформацій і тензора напружень складає повну систему співвідношень що окреслюють температурне поле, компоненти вектора переміщень, компоненти тензорів деформацій і напружень при заданих температурі навколишнього середовища t_c і зовнішньому силовому навантаженні \bar{p} .

Вибір функціоналу оптимізації J здійснюється поетапно, в залежності від температурного інтервалу, в якому знаходиться тіло. На першій стадії відпалу на проміжку часу $[\tau_0; \tau_1]$ за функціонал оптимізації F_1 вибираємо відхилення рівня тимчасових напружень від допустимих σ_{d1} ; на другій — умову однорідності за товщиною температури тіла при досягненні верхньої температури відпалу в момент часу τ_2 ; на третій — відхилення рівня залишкових напружень $\sigma_{екв}$ від потрібного технологічного σ_0 в момент часу τ_3 закінчення витримки при верхній температурі відпалу t_v^b , на четвертій — відхилення перепаду температур за товщиною від технологічного Δt_{d2} за час охолодження $[\tau_3; \tau_4]$ до нижньої температури відпалу t_v^h , на п'ятій стадії (охолодження від нижньої температури відпалу t_v^h до натуральної температури на проміжку часу $[\tau_4; \tau_5]$) — відхилення рівня тимчасових напружень від допустимих σ_{d2} , тобто:

$$J = \begin{cases} \max |\sigma_{екв} - \sigma_{d1}| & \text{при } \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1; \\ \max \left| \frac{\partial t}{\partial n} - \Delta t_{d1} \right| & \text{при } \tau = \tau_2; \\ \max |\sigma_{екв} - \sigma_0| & \text{при } \tau = \tau_3; \\ \max \left| \frac{\partial t}{\partial n} - \Delta t_{d2} \right| & \text{при } \tau_3 < \tau \leq \tau_4; \\ \max |\sigma_{екв} - \sigma_{d2}| & \text{при } \tau_4 < \tau \leq \tau_5. \end{cases} \quad (7)$$

Вибір функції керування здійснюємо виходячи з технологічних можливостей на кожній стадії. Функцією керування h розглянуто як температуру зовнішнього середовища t_c (зокрема температуру поверхні тіла), так і густину теплового потоку q . Приймаємо такі типові обмеження на температуру тіла і функцію керування під час процесу термооброблення [4]:

$$t_1 \leq t(M, \tau) \leq t_2; \quad h_1 \leq h(\tau) \leq h_2, \quad v_1 \leq \frac{dh(\tau)}{d\tau} \leq v_2. \quad (8)$$

Зауважимо, що кількість додаткових обмежень і умов функціонального типу на параметри розглянутих полів і функції керування у процесі відпалу в такій схемі оптимізації є неістотною.

Сформульована вище задача оптимізації режимів відпалу скляних тіл обертання є задачею на умовний екстремум (мінімум) функціоналу (7), при в'язях (1) — (6) і обмеженнях (8).

Важливою у цій схемі оптимізації є методика побудови розв'язку прямої задачі, яка включає відповідні складові задачі теплопровідності й термопружності. Оскільки геометрична конфігурація області, яку займає тіло, є часто досить складною, а система вихідних співвідношень — нелінійною, при розв'язанні прямої задачі використовуємо метод зважених нев'язок у поєднанні зі скінченно-елементним підходом [5]. При цьому система вихідних співвідношень (1) — (6) піддається просторово-часовій дискретизації і зводиться до системи нелінійних алгебричних рівнянь, які можна записати у вигляді:

$$[K_T]\{T\} = \{F_T\}; \quad [K_{U,T}]\{U\} = \{F_{U,T}\}. \quad (9)$$

Тут $[K_T]$, $[K_{U,T}]$ — відповідні матриці жорсткості; $\{F_T\}$, $\{F_{U,T}\}$ — вектори навантаження [5].

Нелінійні системи алгебричних рівнянь (9) розв'язуємо за допомогою методу простої ітерації.

Розв'язок сформульованої екстремальної задачі шукаємо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [6]. У рамках запропонованого підходу мінімізація функціоналу (7) зводиться до задачі нелінійного програмування пошуку мінімуму відповідної функції $J = J(h_1, \dots, h_n)$, аргументами якої є значення h_i функції керування $h(t)$ в дискретні моменти часу τ_i . Отже, задачу оптимізації режимів відпалу скляних тіл обертання зведено до розв'язання задачі на умовний екстремум функції $J = J(h_1, \dots, h_n)$ при в'язях (1) — (6) і обмеженнях (8) — (10).

Розв'язок отриманої екстремальної задачі шукаємо на кожній з п'яти розглянутих стадій. На першій стадії, коли тіло нагрівається до нижньої температури відпалу, розв'язок будемо методом прямого пошуку на множині кусково-лінійних функцій $h_{i+1} = a_{i+1}(\tau_{i+1} - \tau_i) + h_i$ шляхом підбору коефіцієнта a_{i+1} . На другій стадії, коли тіло нагрівається до верхньої температури відпалу, розв'язок отримуємо методом прямого пошуку на множині лінійних функцій $h = a\tau + h_0$ шляхом підбору коефіцієнта a . На третій стадії час витримки (при верхній температурі витримки) знаходимо з умови досягнення заданого рівня напружень. На четвертій і п'ятій стадіях оптимальний розв'язок будемо за схемою другої і першої стадій.

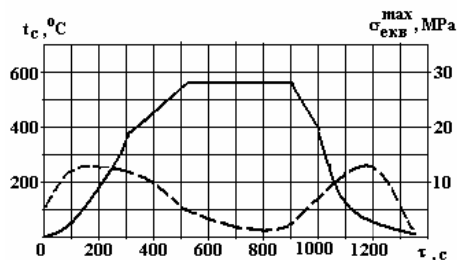


Рис. 1

Як приклад побудовано оптимальний режим відпалу скляного порожнистого циліндра висотою 0,10 м, внутрішнім радіусом 0,045 м і товщиною 0,005 м. Циліндр виготовлений зі скла С93, теплофізичні характеристики якого наведені в [4].

На рис. 1 суцільною лінією показано оптимальний режим зміни функції керування t_c (температури поверхні циліндра), а штрих-пунктирною — відповідну зміну в часі максимальних еквівалентних напружень.

Запропонована модель оптимізації дає можливість побудови оптимальних режимів відпалу скляних тіл обертання довільної форми за врахування термочупливості матеріалу і досить загального закону релаксації напружень.

Література

1. Yu-Chung, Chinghua Hung, Jung-Chung Hung Glass material model for the forming stage of the glass molding process // Journal of materials processing technology. — 2008. — №201. — P. 751—754.
2. Подстригач Я.С., Бурак Я.Й., Шелепец В.И. и др. Оптимизация и управление в электровакуумном производстве. — К.: Наук. думка, 1980. — 216 с.
3. Дяківський С.І., Житлинський Г.С., Ячишин Й.М. Термічне оброблення і напруження у склі. — Нац. ун-т «Львівська політехніка», 2003. — 193 с.
4. Ірза С.М. Математична модель формування залишкових напружень у скляних тілах обертання під час охолодження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2008. — №2. — С. 14—19.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis. — London: «Butterworth Heinemann», 2000. — 689 p.
6. Химмельбау Д. Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 532 с.

Отримана 12.06.09

Gachkevych O., Gachkevych M., Irza E., Kasperski Z.
The numerical optimization of annealing of glass bodies of rotation

Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics Ukrainian National Academy of Science, Technical University of Opole
Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics Ukrainian National Academy of Sciences Technical University of Opole

In the work the technique of optimization of annealing modes of glass bodies of rotation is offered at restrictions on the stress state of a body. For the description of thermomechanical behaviour of such bodies a 3D model of thermosensitive elastic body considering relaxation of initial residual stresses is used.