

О. Морачковський

Професор, д-р техн. наук

Ю. Ромашов

Доцент, канд. техн. наук

Національний технічний
університет «ХПІ»,
м. Харків

УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ В ЗАДАЧАХ ПОВЗУЧОСТІ ТОНКИХ ОБОЛОНОК

Запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язання нелінійних початково-крайових задач повзучості тонких оболонок з урахуванням пошкоджуваності. Метод заснований на зведенні за процедурою Бубнова-Гальоркіна до задачі Коші для визначення залежних від часу коефіцієнтів аналітичних апроксимацій шуканих невідомих за системами заданих пробних функцій, що задовольняють граничні умови задачі. Розв'язання тестової задачі свідчить про високу достовірність результатів, що отримані за допомогою запропонованого в статті методу. Встановлені якісні й кількісні закономірності повзучості й пошкоджуваності осесиметрично навантаженого рівномірним тиском та жорстко закріпленого сегменту тонкої сферичної оболонки.

повзучість, пошкоджуваність, нелінійна початково-крайова задача, метод Бубнова-Гальоркіна, тонкі оболонки

При вирішенні багатьох науково-технічних проблем проектування сучасної авіаційної, ракетно-космічної, реакторної та іншої техніки, розв'язують задачі високо-температурної повзучості тонких оболонок. На цій основі вирішують проблеми довговічності та прогнозування ресурсу елементів такої техніки. Сьогодні ускладнюються моделі повзучості матеріалів за рахунок введення в рівняння стану нових внутрішніх термодинамічних параметрів, наприклад, мезо- й макроструктурні параметри пошкоджуваності, старіння, та інші [1 — 3]. Це стимулює пошук нових постановок початково-крайових задач теорії повзучості та ефективних методів їхнього розв'язування для дослідження розвитку в часі незворотних полів деформацій повзучості та пошкоджуваності, перерозподілу напружено-деформованого стану в тілах. Традиційно формулювання задач повзучості тіл зводять до варіаційних рівностей та систем диференціальних рівнянь [4]. За аналогією з теоріями пластичності при варіаційному формулюванні задач теорії повзучості застосовують потенціали пружності з додатковими векторами фіктивних сил,

що враховують незворотні деформації повзучості. Для пошуку стаціонарних значень відповідних функціоналів використовують дискретні скінченноелементні апроксимації разом з продовженням розв'язків у часі. На цьому шляху отримують числові значення розрахункових змінних в області тіла для дискретних значень часу.

Метою цієї статті є розвиток методів розв'язування початково-крайових задач повзучості тонких оболонок з урахуванням пошкоджуваності їхніх матеріалів за рахунок застосування методу Бубнова-Гальоркіна [5, 6] і аналітичних апроксимацій шуканих невідомих. Головною перевагою методу Бубнова-Гальоркіна є те, що він дає можливість отримати чисельно-аналітичні розв'язки вихідних диференціальних рівнянь повзучості тонких оболонок.

Математична постановка задачі повзучості з урахуванням пошкоджуваності оболонок містить повну систему статичних, геометричних диференціальних рівнянь і рівнянь стану з початковими та граничними умовами. Припускається, що повні деформації є доданком пружних, теплових деформацій та деформацій повзучості.

Термопружна деформація визначається за законом Дюамеля-Неймана; рівняння стану повзучості прийняті у вигляді кінетичних рівнянь відносно деформацій повзучості й параметра пошкоджуваності.

Далі розглянемо повну систему рівнянь тонких оболонок у змішаній формі відносно невідомих переміщень точок і кутів повороту нормалей серединної поверхні, внутрішніх сил та моментів, зведених до цієї поверхні, деформації повзучості та параметра пошкоджуваності оболонки. Ця система містить рівняння рівноваги й загальновідомі кінематичні рівняння, які зв'язують переміщення довільних точок оболонки з переміщеннями та кутами поворотів нормального елемента серединної поверхні, відповідно до гіпотези Кірхгофа-Лява [4, 7]. Інша група рівнянь — це кінетичні рівняння стану, які записані відносно деформацій повзучості та параметра пошкоджуваності [4]. Зазвичай згідно з прийнятими в теорії тонких оболонок означеннями, рівняння відносно внутрішніх силових факторів і геометричних параметрів серединної поверхні мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} -\frac{N_1^0}{Eh} + \frac{\nu N_2^0}{Eh} + \varepsilon_1^0 &= \frac{\alpha}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T dx_3 + \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} dx_3; \\ -\frac{N_2^0}{Eh} + \frac{\nu N_1^0}{Eh} + \varepsilon_2^0 &= \frac{\alpha}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T dx_3 + \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} c_{22} dx_3; \\ -\frac{1+\nu}{Eh} N^0 + \varepsilon_{12}^0 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} c_{12} dx_3; \\ -\frac{M_1^0}{Eh} + \frac{\nu M_2^0}{Eh} + \kappa_1^0 &= \frac{12\alpha}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T x_3 dx_3 + \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} x_3 dx_3; \\ -\frac{M_2^0}{Eh} + \frac{\nu M_1^0}{Eh} + \kappa_2^0 &= \frac{12\alpha}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T x_3 dx_3 + \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} c_{22} x_3 dx_3; \\ -\frac{12(1+\nu)}{Eh^3} M^0 + \kappa_{12}^0 &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} c_{12} x_3 dx_3, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де $N_1^0, N_2^0, N^0, M_1^0, M_2^0, M^0$ — внутрішні сили та моменти, що зведені до серединної поверхні оболонки; E, ν, α — модуль пружності, коефіцієнт Пуасона та теплового розширення матеріалу оболонки; h — товщина оболонки; ΔT — збурення температури у точках оболонки відносно натурально ненавантаженого стану; c_{11}, c_{22}, c_{12} — деформації повзучості; $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_{12}^0, \kappa_1^0, \kappa_2^0, \kappa_{12}^0$ — деформації та кривини серединної поверхні.

Кінетичні рівняння стану повзучості мають такий вигляд [4]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= \frac{3}{2} \frac{B\sigma_i^{n_1-1}}{(1-\omega^{n_2})^{n_3}} \left(\frac{2}{3} \sigma_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{22} \right); \\ \mathfrak{E}_2 &= \frac{3}{2} \frac{B\sigma_i^{n_1-1}}{(1-\omega^{n_2})^{n_3}} \left(\frac{2}{3} \sigma_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \right); \end{aligned}$$

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{3}{2} \frac{B\sigma_i^{n_1-1}}{(1-\omega^{n_2})^{n_3}} \sigma_{12}; \mathfrak{E} = \frac{A\sigma_i^{k_1}}{(1-\omega^{k_2})^{k_3}}, \quad (1.2)$$

де $c_{11}, c_{22}, c_{12}, \omega$ — компоненти деформації повзучості та параметр пошкоджуваності; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ — компоненти тензора напружень; σ_i — інтенсивність напружень; $B, n_1, n_2, n_3, A, k_1, k_2, k_3$ — параметри, що характеризують властивості повзучості матеріалу оболонки, які визначають за кривими повзучості впритул до руйнування.

Компоненти напружень, що містяться у рівняннях (1.2), визначаються за співвідношеннями [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{h} N_1^0 + \frac{12x_3}{h^3} M_1^0 + \frac{\alpha E}{h(1-\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T dx_3 + \\ &+ \frac{12\alpha E x_3}{h^3(1-\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T x_3 dx_3 - \frac{\alpha E}{1-\nu} \Delta T + \\ &+ \frac{E}{h(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} + \nu c_{22}) dx_3 + \\ &+ \frac{12E x_3}{h^3(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} + \nu c_{22}) x_3 dx_3 - \frac{E}{1-\nu^2} (c_{11} + \nu c_{22}); \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{h} N_2^0 + \frac{12x_3}{h^3} M_2^0 + \frac{\alpha E}{h(1-\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T dx_3 + \\ &+ \frac{12\alpha E x_3}{h^3(1-\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T x_3 dx_3 - \frac{\alpha E}{1-\nu} \Delta T + \\ &+ \frac{E}{h(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} (c_{22} + \nu c_{11}) dx_3 + \\ &+ \frac{12E x_3}{h^3(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} (c_{22} + \nu c_{11}) x_3 dx_3 - \frac{E}{1-\nu^2} (c_{22} + \nu c_{11}); \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{h} N^0 + \frac{12x_3}{h^3} M^0 + \frac{E}{h(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} c_{12} dx_3 + \\ &+ \frac{12E x_3}{h^3(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} c_{12} x_3 dx_3 - \frac{E}{1+\nu} c_{12}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Істотним фактором вибору форми рівнянь для розв'язання задач повзучості оболонок є можливість незалежної апроксимації шуканих невідомих. При розв'язуванні задач повзучості відносно переміщень, як це робиться у більшості сучасних досліджень, для визначення внутрішніх сил та моментів зазвичай виконують диференціювання наближено знайдених переміщень, напруження й параметр пошкодження у довільній точці оболонки визначають інтерполюванням між вузловими їхніми значеннями, що зменшує точність розв'язків задачі. В прийнятій

змішаній постановці задач повзучості виключаються ці обчислювальні операції, що сприяє отриманню точніших розв'язків задачі.

Подамо математичну постановку початково-крайової задачі повзучості тонких оболонок в операторно-матричній формі відносно п'ятнадцяти невідомих. Початкові значення невідомих відповідають пружному деформуванню оболонки [4]. Таким чином, відповідні рівняння та умови набудуть вигляду:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad (\forall t \geq 0; \forall \mathbf{x} \in \Upsilon^0);$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_B \quad (\forall t \geq 0; \forall \mathbf{x} \in \upsilon^0), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{v}; \mathbf{u}) \quad (\forall t \geq 0; \forall \mathbf{x} \in \Upsilon);$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad (t = 0; \forall \mathbf{x} \in \Upsilon), \quad (1.5)$$

де t — час; \mathbf{x} — вектор, складений з просторових координат точки оболонки; Υ^0 , υ^0 — серединна поверхня оболонки та її межа; Υ — область оболонки; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ — вектор, складений з невідомих задачі; $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ — вектор, складений з компонент деформацій повзучості та параметра пошкоджуваності; \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{w} — матрично-диференціальні лінійні оператори; \mathbf{f} — вектор зовнішніх навантажень; \mathbf{B} , \mathbf{u}_B — матричний оператор і вектор, що відповідають крайовим умовам.

Співвідношення (1.4), (1.5) представляють параметричну за часом множину крайових задач з неявно залежними від часу невідомими полями напружено-деформованого стану оболонки.

Чисельно-аналітичний метод розв'язання задач повзучості тонких оболонок полягає у зведенні до звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій часу — коефіцієнтів аналітичних апроксимацій невідомих за системою заданих пробних функцій просторових координат [6].

Невідомі задачі, відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна [5], подаємо апроксимаціями за координатами системою заданих пробних функцій з коефіцієнтами, що залежать від часу:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^{(n)}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_v(\mathbf{x}; \mathbf{u}_B) + \mathbf{F}_u^{(n)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_u^{(n)}(t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \approx \mathbf{v}^{(m)}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{F}_v^{(m)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_v^{(m)}(t), \quad (2.2)$$

де \mathbf{u}_v — вектор, що продовжує до внутрішніх точок області задані граничні значення; $\mathbf{F}_u^{(n)}$, $\mathbf{F}_v^{(m)}$ — матриці, складені з n та m стовбців заданих пробних функцій просторових координат; $\mathbf{a}_u^{(n)}$, $\mathbf{a}_v^{(m)}$ — вектори коефіцієнтів апроксимацій, що підлягають визначенню.

Пробні функції $\mathbf{F}_u^{(n)}$ та вектор \mathbf{u}_v оберемо так, щоб тотожно задовольнялись граничні умови:

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{u}_v + \mathbf{F}_u^{(n)} \cdot \mathbf{a}_u^{(n)}) = \mathbf{u}_B. \quad (2.3)$$

Побудову вектора \mathbf{u}_v та матриці $\mathbf{F}_u^{(n)}$ для межі υ та оператора \mathbf{B} складного вигляду здійснюємо методами теорії R-функцій, розроблених академіком В. Л. Рвачовим [8].

Визначення невідомих коефіцієнтів апроксимації здійснюємо за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна, в якому умови ортогональності для рівнянь напружено-деформованого стану розглядаємо в області серединної поверхні, а умови ортогональності для кінетичних рівнянь — у всьому об'ємі оболонки:

$$\int_{\Upsilon^0} (\mathbf{F}_u^{(n)})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}_v + \mathbf{F}_u^{(n)} \cdot \mathbf{a}_u^{(n)}) - \mathbf{f} - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{F}_v^{(m)} \cdot \mathbf{a}_v^{(m)})) d\Upsilon^0 = 0; \quad (2.4)$$

$$\int_{\Upsilon} (\mathbf{F}_v^{(m)})^T \cdot (\mathbf{F}_v^{(m)} \cdot \mathbf{a}_v^{(m)} - \mathbf{w}(\mathbf{F}_v^{(m)} \cdot \mathbf{a}_v^{(m)}; \mathbf{u}_v + \mathbf{F}_u^{(n)} \cdot \mathbf{a}_u^{(n)})) d\Upsilon = 0. \quad (2.5)$$

З умови (2.4) одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь, з якої можемо визначити коефіцієнти апроксимацій переміщень, кутів повороту, сил і моментів за відомими коефіцієнтами апроксимацій деформацій повзучості та параметра пошкоджуваності:

$$\mathbf{A}^{(n)} \cdot \mathbf{a}_u^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)} + \mathbf{C}^{(nm)} \cdot \mathbf{a}_v^{(m)}, \quad (2.6)$$

де

$$\mathbf{A}^{(n)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{F}_u^{(n)})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}_u^{(n)}) d\Upsilon;$$

$$\mathbf{C}^{(nm)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{F}_u^{(n)})^T \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_v^{(m)}) d\Upsilon;$$

$$\mathbf{f}^{(n)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{F}_u^{(n)})^T \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_v) d\Upsilon.$$

З умови (2.5) отримуємо параметричну множину задач Коші відносно невідомих коефіцієнтів апроксимації деформацій повзучості та параметра пошкоджуваності з правою частиною, яка залежить від коефіцієнтів апроксимацій внутрішніх сил і моментів:

$$\mathbf{a}_v^{(m)} = (\mathbf{K}^{(m)})^{-1} \cdot \mathbf{w}^{(m)}(\mathbf{a}_v^{(m)}; \mathbf{a}_u^{(n)}); \mathbf{a}_v^{(m)}(0) = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

де

$$\mathbf{K}^{(m)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{F}_v^{(m)})^T \cdot \mathbf{F}_v^{(m)} d\Upsilon;$$

$$\mathbf{w}^{(m)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{F}_v^{(m)})^T \cdot \mathbf{w}(\mathbf{F}_v^{(m)} \cdot \mathbf{a}_v^{(m)}; \mathbf{u}_v + \mathbf{F}_u^{(n)} \cdot \mathbf{a}_u^{(n)}) d\Upsilon.$$

За допомогою рівняння (2.6) виключимо вектор $\mathbf{a}_u^{(n)}$ з рівняння (2.7) та отримуємо відносно невідомих коефіцієнтів апроксимації деформацій повзучості та параметра пошкоджуваності систему розв'язувальних рівнянь у формі Коші:

$$\mathbf{a}_v^{(m)} = (\mathbf{K}^{(m)})^{-1} \cdot \mathbf{w}^{(m)}(\mathbf{a}_v^{(m)}); \mathbf{a}_v^{(m)}(0) = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

де

$$\mathbf{w}^{(m)}(\mathbf{a}_v^{(m)}) = (\mathbf{K}^{(m)})^{-1} \cdot \mathbf{w}^{(m)}(\mathbf{a}_v^{(m)}; \mathbf{a}_u^{(n)});$$

$$\mathbf{a}_u^{(n)} = (\mathbf{A}^{(n)})^{-1} \cdot (\mathbf{f}^{(n)} + \mathbf{C}^{(nm)} \cdot \mathbf{a}_v^{(m)}).$$

Обчислення правої частини задачі Коші (2.8) потребує розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь, з якої визначаються коефіцієнти апроксимацій переміщень, кутів повороту, сил та моментів за відомими коефіцієнтами апроксимацій деформацій повзучості та параметра пошкоджуваності. Таким чином, розв'язання задачі Коші (2.8) здійснюємо за допомогою методу Рунге-Куты в модифікації з автоматичним вибором кроку, яка запропонована Мерсоном [9]. Розв'язок задачі (2.8) дає змогу на кожному кроці інтегрування в часі встановлювати поля усіх шуканих невідомих.

Осесиметричні сферичні оболонки в умовах повзучості з пошкоджуваністю матеріалу можна розглянути на основі рівнянь (1.4), (1.5), з урахуванням осової симетрії [1, 4], що дасть можливість записати систему рівнянь повзучості осесиметричних сферичних оболонок так:

$$-\frac{N_1^0}{Eh} + \frac{\nu N_2^0}{Eh} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{u_3^0}{R} = \frac{\alpha}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T dx_3 + \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} dx_3;$$

$$-\frac{N_2^0}{Eh} + \frac{\nu N_1^0}{Eh} + \frac{ctgx_1}{R} u_1^0 + \frac{u_3^0}{R} = \frac{\alpha}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T dx_3 +$$

$$+ \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} c_{22} dx_3;$$

$$-\frac{M_1^0}{Eh} + \frac{\nu M_2^0}{Eh} - \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_1^0}{\partial x_1} = \frac{12\alpha}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T x_3 dx_3 +$$

$$+ \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} x_3 dx_3;$$

$$-\frac{M_2^0}{Eh} + \frac{\nu M_1^0}{Eh} + \frac{ctgx_1}{R} \vartheta_1^0 = \frac{12\alpha}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T x_3 dx_3 +$$

$$\frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} c_{22} x_3 dx_3;$$

$$-\frac{1}{R} u_1^0 + \frac{1}{R} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} - \vartheta_1^0 = 0;$$

$$\frac{\partial N_1^0}{\partial x_1} + ctgx_1 (N_1^0 - N_2^0) + \frac{1}{R} \frac{\partial M_1^0}{\partial x_1} + \frac{ctgx_1}{R} (M_1^0 - M_2^0) = 0;$$

$$\frac{N_1^0}{R} + \frac{N_2^0}{R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_1^0}{\partial x_1^2} -$$

$$-\frac{2ctgx_1}{R^2} \frac{\partial M_1^0}{\partial x_1} - \frac{ctgx_1}{R^2} \frac{\partial M_2^0}{\partial x_1} + \frac{M_1^0 - M_2^0}{R^2} = p, \quad (3.1)$$

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{3}{2} \frac{B\sigma_i^{n_1-1}}{(1-\omega^{n_2})^{n_3}} \left(\frac{2}{3} \sigma_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{22} \right);$$

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{3}{2} \frac{B\sigma_i^{n_1-1}}{(1-\omega^{n_2})^{n_3}} \left(\frac{2}{3} \sigma_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \right); \mathfrak{C} = \frac{A\sigma_i^{k_1}}{(1-\omega^{k_2})^{k_3}}, \quad (3.2)$$

де R — радіус серединної поверхні оболонки; p — тиск; компоненти напружень визначаються за відповідними формулами (1.3).

Апроксимації шуканих невідомих будуються відповідно до граничних умов, які конкретизуються при розгляданні відповідної задачі. Невідомі переміщення, кут повороту, сили й моменти є функціями часу та лише однієї просторової координати у серединній поверхні, тоді як деформації повзучості та параметр пошкоджуваності є функціями часу та двох просторових координат: однієї у серединній поверхні та вздовж нормалі до серединної поверхні.

Тестова задача. Для аналізу вірогідності запропонованого чисельно-аналітичного методу розглянемо повзучість замкнутої рівномірно нагрітої тонкої сферичної оболонки зі сплаву Д16 [10], яка деформується під дією стаціонарного внутрішнього тиску.

Геометричні й фізико-механічні параметри оболонки прийняті такими:

$$R = 0.35 \text{ м}; h = 0.003 \text{ м}; p = 500 \text{ КПа}. \quad (4.1)$$

$$E = 72 \text{ ГПа}; \nu = 0.35; \alpha = 2.2 \cdot 10^{-5}. \quad (4.2)$$

$$B = 3.4 \cdot 10^{-8} \text{ МПа}^{-n}; A = 1.9 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-n};$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = n = 2.93, \quad k_1 = k_2 = k_3 = k = 1.38. \quad (4.3)$$

Легко встановити, що в такій оболонці реалізується безмоментний напружений стан, що дає змогу отримати точний розв'язок задачі (3.1), (3.2) в аналітичному вигляді:

$$N_1^0 = N_2^0 = \frac{pR}{2}, \quad M_1^0 = M_2^0 = 0, \quad u_1^0 = 0; \vartheta_1^0 = 0,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{N_1^0}{h}, \quad \sigma_i = \left| \frac{N_1^0}{h} \right|; \quad c_{11} = c_{22} = c, \quad c = \frac{1}{2} \frac{B}{A} \omega,$$

$$u_3^0 = R\alpha \nu T + \frac{1-\nu}{Eh} \frac{pR^2}{2} + Rc. \quad (4.4)$$

При цьому залежність $\omega = \omega(t)$ можна визначити з такої рівності:

$$\int_0^{\omega} (1-\xi^k)^n d\xi = A\sigma_i^n t.$$

На рис. 1 наведено порівняння розрахункових даних (маркери) з точними, які отримані за аналітичними фор-

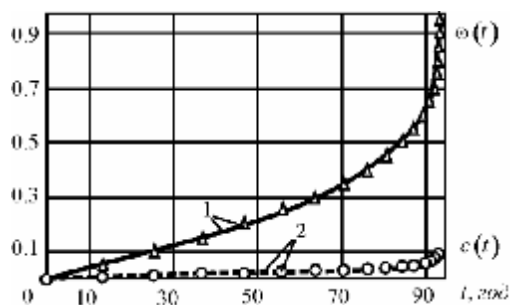


Рис. 1. Параметр пошкоджуваності та деформація повзучості: 1 — параметр пошкоджуваності; 2 — деформації повзучості

мулами (4.4) для параметра пошкоджуваності (крива 1) і деформацій повзучості (крива 2).

Чисельно-аналітичний розв'язок розглянутої задачі за запропонованим у статті методом отримано при такій апроксимації кінематичних параметрів:

$$\begin{aligned}
 u_1^0(t, x_1) &= \frac{x_1}{\pi} \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) \sum_{k=1}^n a_k^{(u1)}(t) \cdot \Psi_k(x_1); \\
 u_3^0(t, x_1) &= \sum_{k=1}^n a_k^{(u2)}(t) \cdot \Psi_k(x_1); \\
 \vartheta_1^0(t, x_1) &= \frac{x_1}{\pi} \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) \sum_{k=1}^n a_k^{(u3)}(t) \cdot \Psi_k(x_1). \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Вони точно задовольняють умови симетрії задачі:

$$u_1^0(t, 0) = 0; u_1^0(t, \pi) = 0; \vartheta_1^0(t, 0) = 0; \vartheta_1^0(t, \pi) = 0$$

та внутрішніх силових факторів:

$$\begin{aligned}
 N_1^0(t, x_1) &= \sum_{k=1}^n a_k^{(u4)}(t) \cdot \Psi_k(x_1); \\
 N_2^0(t, x_1) &= \sum_{k=1}^n a_k^{(u5)}(t) \cdot \Psi_k(x_1); \\
 M_1^0(t, x_1) &= \sum_{k=1}^n a_k^{(u6)}(t) \cdot \Psi_k(x_1); \\
 M_2^0(t, x_1) &= \sum_{k=1}^n a_k^{(u7)}(t) \cdot \Psi_k(x_1); \\
 c_{11}(t, x_1, x_3) &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m a_{kj}^{(v1)}(t) \cdot \Psi_k(x_1) \Psi_j(x_3); \\
 c_{22}(t, x_1, x_3) &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m a_{kj}^{(v2)}(t) \cdot \Psi_k(x_1) \Psi_j(x_3); \\
 \omega(t, x_1, x_3) &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m a_{kj}^{(v3)}(t) \cdot \Psi_k(x_1) \Psi_j(x_3), \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

де Ψ_k — поліноми Чебишова.

Наведені результати отримані при $n = m = 5$ доданків в апроксимаціях невідомих (4.5), (4.6). Ці дані свідчать про збіжність аналітичних і наближених розв'язків.

Приклад розрахунку. З метою дослідження закономірностей повзучості й пошкодження оболонок при повзучості розглянемо центральний сегмент (купол) $0 \leq x_1 \leq \theta$, де $\theta = 60^\circ$ (рис. 2) тонкої сферичної оболонки з жорстко закріпленими краями, який знаходиться під внутрішнім тиском $p = 0.1$ МПа при температурі $573K$.

Умови осьової симетрії та закріплення для розглянутого прикладу є такими:

$$\begin{aligned}
 u_1^0(t, 0) = 0; \vartheta_1^0(t, 0) = 0; \\
 u_1^0(t, \theta) = 0; u_3^0(t, \theta) = 0; \vartheta_1^0(t, \theta) = 0. \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Це дає підстави прийняти апроксимації $u_1^0, u_3^0, \vartheta_1^0$ у вигляді:

$$\begin{aligned}
 u_1^0(t, x_1) &= \frac{x_1}{\theta} \left(1 - \frac{x_1}{\theta}\right) \sum_{k=1}^n a_k^{(u1)}(t) \cdot \Psi_k(x_1); \\
 u_3^0(t, x_1) &= \left(1 - \frac{x_1}{\theta}\right) \sum_{k=1}^n a_k^{(u2)}(t) \cdot \Psi_k(x_1); \\
 \vartheta_1^0(t, x_1) &= \frac{x_1}{\theta} \left(1 - \frac{x_1}{\theta}\right) \sum_{k=1}^n a_k^{(u3)}(t) \cdot \Psi_k(x_1) \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

при збереженні (4.6).

Розрахункові дані, що наведені на рис. 3, відповідають зміні у часі параметра пошкоджуваності в найпошкодженішому жорстко закріпленому перерізі, де криві 1 — 5 відповідають моментам часу $t = 2000; 4004; 6003; 6550$ год.

Дані щодо перерозподілу за часом інтенсивності напружень у жорстко закріпленому перерізі оболонки

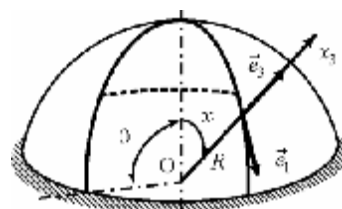


Рис. 2. Сегмент сферичної оболонки

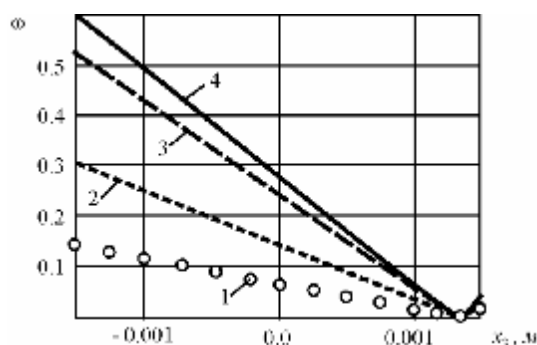


Рис. 3. Параметр пошкоджуваності в жорсткому закріпленні сферичного купола

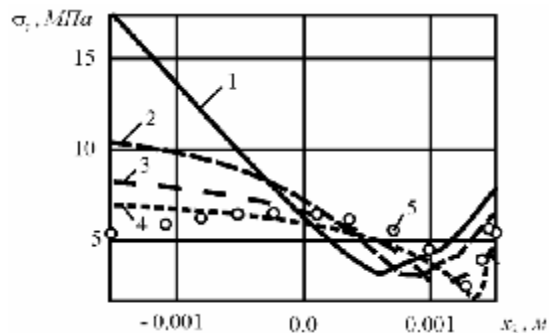


Рис. 4. Інтенсивність напружень у жорстко закріпленому перерізі сферичного купола

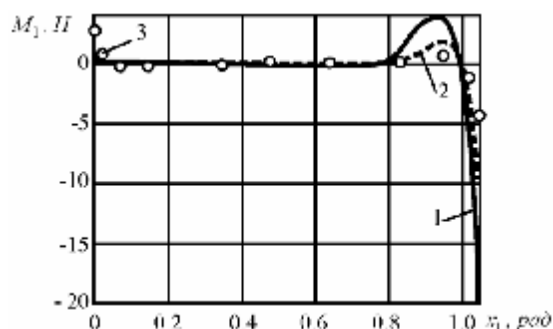


Рис. 5. Згинальний момент жорстко закріпленого сферичного купола

наведені на рис. 4, для моментів часу: 1 — $t = 0$; 2 — 4; 3 — 14; 4 — 3002; 5 — 6550 год.

За аналізом цих даних можна встановити, що внаслідок повзучості інтенсивності напруження перерозподіляються по перерізу в часі, наближаючись до рівномірного розподілу.

Подані на рис. 5 результати розрахунків ілюструють крайовий ефект біля жорстко закріпленого перерізу оболонки, де наведені розподіли згинаючого моменту M_1 вздовж твірної оболонки, що відповідають моментам часу: 1 — $t = 0$; 2 — 14; 3 — 6550 год.

З аналізу цих даних можна встановити, що за достатньо великий проміжок часу стан оболонки, близький до безмоментного, зберігається на досить великій віддалі від жорстко закріпленого перерізу, тоді як біля жорстко закріпленого перерізу стан оболонки є істотно моментним. Протягом часу зона моментного стану розповсюджується в напрямі до центра оболонки та перерозподіл значень згинального моменту відбувається так, що його максимальне значення, хоча і зменшується, та місце руйнування зберігається у жорстко закріпленому перерізі.

Висновки. Запропоновано чисельно-аналітичний розв'язок нелінійних початково-крайових задач повзучості тонких оболонок з урахуванням пошкоджуваності їхніх матеріалів за рахунок застосування методу Бубнова-Гальоркіна й аналітичних апроксимацій шуканих невідомих. Метод заснований на зведенні за процедурою Бубнова-Гальоркіна до задачі Коші для визначення залежних від часу коефіцієнтів аналітичних апроксимацій

шуканих невідомих за системами заданих пробних функцій, що задовольняють граничні умови задачі.

Розв'язання тестової задачі повзучості осесиметрично навантаженої замкнутої сферичної оболонки, яка дає можливість отримати точний розв'язок задачі в аналітичному вигляді, свідчить про високу вірогідність результатів, отриманих за допомогою запропонованого в статті методу.

За результатами досліджень встановлені якісні й кількісні закономірності повзучості й пошкоджуваності оболонок.

На підставі розрахункових даних осесиметричної задачі повзучості жорстко закріпленого по краю сегмента сферичної оболонки під дією рівномірно розподіленого тиску встановлено, що внаслідок повзучості зона моментного стану розповсюджується в напрямі від жорстко закріпленого перерізу до центра оболонки, та інтенсивності напруження по цьому перерізу, де оболонка руйнується, перерозподіляються в часі, наближаючись до рівномірного розподілення.

Література

1. *Lemaitre J., J.-L. Chaboche.* Mechanics of solid materials. — Cambridge: University press, 1994. — 556 p.
2. *Lemaitre J., Sermage J.P.* One damage law for different mechanisms // Computational mechanics. — 1997. — V. 20. — P. 84—88.
3. *Altenbach H.* Creep and Damage in Materials and Structures // CISM Courses and Lectures. — Wein; New York: Springer, 1999. — 399. — 348 p.
4. *Бурлаков А.В., Львов Г.И., Морачковский О.К.* Ползучесть тонких оболочек. — Харьков: Вища шк., 1977. — 124 с.
5. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 352 с.
6. *Морачковский О.К. Ромашов Ю.В.* Решение начально-краевых задач теории ползучести повреждающихся тел методом Бубнова-Галеркина // Теоретическая и прикладная механика. — Вып. 42. — 2006. — С. 23—28.
7. *Подстригач Я.С., Швец Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек. — К.: Наук. думка, 1978. — 344 с.
8. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 566 с.
9. *Ланс Дж. Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин: Пер с англ. — М.: Иностранная литература, 1962. — 208 с.
10. *Конкин В.Н., Морачковский О.К.* Ползучесть и длительная прочность, легких сплавов, проявляющих анизотропные свойства // Проблемы прочности. — 1987. — №5. — С. 38—42.

Отримана 06.05.09

O. Morachkovsky, Yu. Romashov
Numerical-analytical solutions for thin shells creep problems
*National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,
 Kharkiv*

Numerical-analytical method for thin shells nonlinear initial-boundary-value creep-damage problems solving is proposed. This method based on the Galerkin method procedure reducing to Cauchy problems for time depended coefficients of the unknowns analytical approximations boundary conditions identically satisfied by trial functions choice. Reliability of the results obtained using proposed method is established by testing task solving. The quantitative and qualitative creep-damage mechanisms properties for the rigid thin spherical shells segments under pressure is obtained.