

УДК 624.075: 539.3

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВТРАТУ СТІЙКОСТІ СТРИЖНІВ З ДИСКРЕТНО- НЕПЕРЕРВНИМ РОЗПОДІЛОМ ПАРАМЕТРІВ МЕТОДОМ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ

**Р. Тацій**

Професор, д-р фіз.-мат. наук,  
Львівський державний університет  
безпеки життєдіяльності,  
м. Львів

**Т. Ушак**

Інженер,  
ЗАТ ЖБК «Ваш дім»,  
м. Львів

*Запропоновано новий наближений метод розв'язування задач про втрату стійкості стрижнів з дискретно-неперервним розподілом параметрів. В основу методу покладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. За допомогою вихідного квазидиференціального рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах розв'язані задачі стійкості для стрижнів під дією розподілених та зосереджених факторів. Стаття демонструє ефективність методу при розв'язуванні задач стійкості. Отримані нові результати, які невідомі в спеціалізованій літературі.*

**метод дискретизації, узагальнене квазидиференціальне рівняння четвертого порядку, стійкість стрижня, коефіцієнт пружної основи**

Для дослідження стійкості стрижнів змінної жорсткості під дією змінного навантаження на пружній основі використовують, як правило, наближені методи [5, 8, 7]. Отримати точні розв'язки вдається лише, за невеликим винятком, для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Проте за дискретно-неперервних розподілів параметрів моделі інтегрування диференціальних рівнянь класичними підходами пов'язане зі значними труднощами або появою складних фундаментальних функцій.

У статті запропонована сингулярна модель пружної основи, коли коефіцієнти жорсткості  $k_i(x)$  містять особливості типу  $\delta$ -функцій та її похідних. У статті вперше запропоновано розв'язати задачу про втрату стійкості багатопролітного стрижня змінної жорсткості на пружній основі за допомогою квазидиференціального рівняння (КДР) з узагальненими коефіцієнтами. Для цього застосовано метод дискретизації, який ґрунтується на концепції квазіпохідних для квазидиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами та апроксимації розв'язків

відповідних їм систем лінійних диференціальних рівнянь з мірами [6].

Такий підхід дає можливість уникнути рівнянь рівноваги та спільності переміщень вузлів лінійної системи. Ефективність такого підходу проілюстрована в [10 — 12] при дослідженні динамічної стійкості стрижнів з дискретно-неперервним розподілом параметрів за дії неконсервативних сил.

**Загальна постановка задачі та методика розрахунку.** Розглянемо задачу про втрату стійкості стиснутого стрижня на сингулярній пружній основі. Задача зводиться до розв'язання квазидиференціального рівняння [1]

$$(EIy'')'' + [(P - k_2)y']' + k_1y = 0, \quad (1)$$

де  $E(x)I(x)$  — згинна жорсткість;  $P(x)$  — поздовжня стискаюча сила;

$$k_1(x) = k_{10}(x) + \sum_i k_{1i} \delta(x - x_i);$$

$$k_2(x) = k_{20}(x) + \sum_i k_{2i} \delta(x - x_i) \quad (2)$$

— коефіцієнти жорсткості пружної основи. Функція  $\delta(x - x_k)$  у формулі (2) —  $\delta$ -функція Дірака з носієм у точці  $x = x_k$ .

Коефіцієнт  $k_1$  визначає роботу пружної основи на стиск, а коефіцієнт  $k_2$  — роботу основи на зсув (зріз). Визначення коефіцієнтів у вигляді (2) дає можливість врахувати вплив на роботу балки реактивних сил, які розподілені неперервно, а також дискретних параметрів (пружних опор та реактивних моментів).

Зі сторони пружних опор на стрижень діють зосереджені реакції  $k_{1i}y$ , пропорційні відповідним лінійним переміщенням опор, і реактивні моменти  $k_{2i}y'$ , пропорційні кутам повороту опорних перерізів навколо осі  $y$ . Податливість опор лінійним переміщенням характеризується коефіцієнтом жорсткості осадки  $k_{1i}$ , а податливість поворотам характеризується коефіцієнтом жорсткості защемлення  $k_{2i}$ . Зосереджені моменти і реакції пружних опор спрямовані в сторони, протилежні поворотам і лінійним переміщенням опор.

Для розв'язання рівняння (1) використаємо методи теорії квазидиференціальних рівнянь [2] Позначимо квазіпохідні так:

$$\begin{aligned} y^{[0]}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} y(x); \quad y^{[1]} = y'(x); \quad y^{[2]} = EIy''(x); \\ y^{[3]}(x) &= (P - k_2)y'(x) + (EIy''(x))'. \end{aligned} \quad (3)$$

Вони є відповідно прогином, кутом повороту, моментом та перерізуючою силою в заданому перерізі  $x$ .

Вихідне КДР (1) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x) \times \mathbf{Y}(x), \quad (4)$$

де

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & -a_1(x) & 0 & 1 \\ -a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$a_0 = EI; \quad a_2 = k_{10}(x) - \sum_{k=1}^n k_{1k} d(x - x_k);$$

$$a_1 = P(x) - k_{20}(x) - \sum_{i=1}^l k_{2i} d(x - x_i);$$

Функція  $C(x)$  допускає стрибки

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0)$$

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta a_1(x) & 0 & 0 \\ -\Delta a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для побудови фундаментальної матриці  $B(x, s)$ , що відповідає квазидиференціальному рівнянню (1), коефіцієнти  $a_1(x)$  і  $a_2(x)$  подаємо у вигляді  $\delta$ -функцій:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= b_1'(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} f_1(x_k) d(x - x_k); \\ a_2(x) &= b_2'(x) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f_2(x_k) d(x - x_k), \end{aligned} \quad (7)$$

де  $b_1(x) = \int da_1(x)$ ,  $b_2(x) = \int da_2(x)$  — подається кусково сталою функцією зі стрибками в точках  $x_k = h \cdot k$ ;  $n$  — кількість ділянок, на які розбивається проміжок інтегрування  $h = x_{k+1} - x_k$ .

Сtribок функції  $\Delta C(x_k)$  запишеться так:

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_1(x_k) & 0 & 0 \\ -f_2(x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

При такому зображенні коефіцієнтів  $a_1, a_2$ , якщо буде відома фундаментальна матриця  $B(x_{k+1}, x_k)$  квазидиференціального рівняння  $(a_0 y'')'' = 0$ , фундаментальну матрицю диференціальної системи (4) можна знайти за формулою [3]

$$B(x_n, x_0) = \prod_{k=0}^{n-1} (E + \Delta C(x_k)) \times B(x_{k+1}, x_k), \quad (9)$$

де  $E$  — одинична матриця.

Тоді розв'язок рівняння (1) матиме вигляд

$$\mathbf{Y}(x) = B(x, x_0) \mathbf{Y}_0, \quad (10)$$

де  $\mathbf{Y}(x)$  — матриця параметрів напружено-деформованого стану у перерізі стрижня;  $\mathbf{Y}_0$  — матриця початкових параметрів;  $B(x, x_0)$  — фундаментальна матриця диференціальної системи (4), елементи якої знаходяться через функцію Коші для рівняння  $(EI(x)y'')'' = 0$ .

**Реалізація методу дискретизації в задачі про втрату стійкості стиснутого стрижня на пружних опорах.** Визначимо критичні сили багатопрілітного стрижня змінної жорсткості на пружних опорах, зображеного на рис. 1 [5].

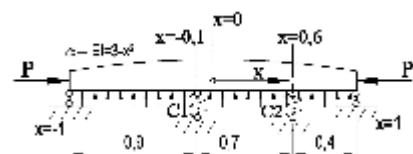


Рис. 1

Задача зводиться до розв'язання КДР 4-го порядку

$$(EIy''')'' + (Py')' + k_1 y = 0 \quad (11)$$

з такими крайовими умовами:

$$y(-1) = y'(-1) = y(+1) = y''(+1) = 0, \quad (12)$$

$$k_1 = 60 + c_1 d(x - x_1) + c_2 d(x - x_2), \quad c_1 = \frac{32EI(x_1)}{l^3} = \beta_1,$$

$$c_2 = \frac{16EI(x_2)}{l^3} = \beta_2 \quad \text{— коефіцієнти жорсткості осадки;}$$

$k_{10} = 60$  — коефіцієнт пружної основи;  $EI(x) = 3 - x^2$  — згинна жорсткість [5];  $P$  — поздовжня сила.

Квазіпохідні для розв'язку рівняння (11) позначимо так:

$$y^{[0]}(x) \stackrel{def}{=} y(x); \quad y^{[1]}(x) = y'(x); \quad y^{[2]}(x) = EI(x)y''(x);$$

$$y^{[3]}(x) = Py'(x) + (EI(x)y''(x))'. \quad (13)$$

Вихідне КДР (11) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x) \times \mathbf{Y}(x), \quad (14)$$

де

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI(x)^{-1} & 0 \\ 0 & -P & 0 & 1 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

За допомогою фундаментальної матриці  $B(x, x_0)$  [2, 3] для довільного початкового вектора  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(x_0)$ ,  $x_0 \in I$ , розв'язок системи (14) записується у вигляді (10).

Розіб'ємо стрижень довжиною  $l$  на  $n$  однакових ділянок. Нехай початкова точка  $x_0 = -1$ , кінцева  $x_n = 1$ , крок розбиття  $h = x_{k+1} - x_k$ , де  $k = 0, \dots, n$ . Апроксимація коефіцієнта  $a_0(x) = EI(x)$  проводиться наступним чином ( $l$  — апроксимація [6]). На кожному з проміжків  $[x_k; x_{k+1})$   $a_0(x)$  є величина стала:

$$a_0(x) \approx \frac{b_0(x_{k+1}) - b_0(x_k)}{h} = a_k, \quad x \in [x_k, x_{k+1}),$$

де

$$b_0(x) = \int_0^x a_0(t) dt. \quad (16)$$

Після апроксимації КДР (11) матиме вигляд

$$\left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta_k y_n'' \right) + \left[ 60h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_k) + c_1 \delta(x - x_1) + \right.$$

$$\left. + c_2 \delta(x - x_2) \right] y_n + P \left[ \left\{ h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_k) \right\} y_n' \right] = 0, \quad (17)$$

що є частинним (конкретизованим) випадком КДР (11). Матриця стрибків (8) для нашого випадку буде такою:

$$\Delta C(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Ph & 0 & 0 \\ -60h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

за виключенням точок  $x = -0,1; 0,6$ , де матриця має вигляд

$$\Delta C(-0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Ph & 0 & 0 \\ -60h - c_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta C(0,6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Ph & 0 & 0 \\ -60h - c_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Отримавши фундаментальну матрицю  $B(1, -1)$  за формулами (9) врахуємо крайові умови закріплення і сформуємо характеристичне рівняння. При цьому фундаментальна матриця  $B(x_{k+1}, x_k)$  КДР  $(EI(x)y'')'' = 0$  має вигляд [3]

$$B(x_{k+1}, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2!a_k} & \frac{h^3}{3!a_k} \\ 0 & 1 & \frac{h}{a_k} & \frac{h^2}{2!a_k} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Початкова матриця  $Y_0$ , для шарнірного закріплення в

точці  $x = -1$  має вигляд  $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Позначимо

$$B(x_n, x_0) \cdot Y_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Для шарнірного закріплення в кінцевій точці ( $x = 1$ ) характеристичне рівняння матиме вигляд

$$|A(P)| = \det \begin{pmatrix} a_{12}(P) & a_{14}(P) \\ a_{32}(P) & a_{34}(P) \end{pmatrix} = 0. \quad (22)$$

Задаючи значення критичної сили  $P$  з визначеним кроком, за допомогою персонального комп'ютера отримуємо з рівняння (22) критичні сили  $P_i$ .

У поданих таблицях виписані результати розрахунку. При обчисленнях з кроком розбиття  $1/1000000$  і  $1/2000000$  значення на шостому знаку після коми критичної сили  $P$  не змінювались, тому зменшення кроку розбиття не має сенсу. В табл. 1 подані порівняльні результати розрахунку перших трьох критичних сил  $P_i$  для стрижня змінного перерізу (див. рис. 1) на пружних опорах. Незаповнені клітинки означають відсутність числових результатів у відповідній літературі.

Визначимо критичні сили трипролітного стрижня кусково сталої жорсткості на пружних опорах, зображеного на рис. 2 [7].

Задача зводиться до розв'язання КДР 4-го порядку

$$EI \left( \sum_{i=1}^3 a_i q_i y'' \right) + P \left( \sum_{i=1}^3 p_i q_i y' \right) + \left( \sum_{i=1}^2 c_i d(x-x_i) \right) y = 0, \quad (23)$$

з такими крайовими умовами:

$$y(0) = y'(0) = y(4,5l) = y''(4,5l) = 0. \quad (24)$$

де  $c_1 = \frac{8EI}{l^3} = \beta_1$ ;  $c_2 = \frac{4EI}{l^3} = \beta_2$  — коефіцієнти жорсткості осадки;  $\alpha_i EI$  — змінна згинна жорсткість на ділянках стрижня  $\alpha_1 = 12$ ;  $\alpha_2 = 6$ ;  $\alpha_3 = 1$  — параметри;  $P$  — поздовжня сила;  $p_1 = 10$ ;  $p_2 = 4$ ;  $p_3 = 1$  — параметри, характеристична функція проміжку:

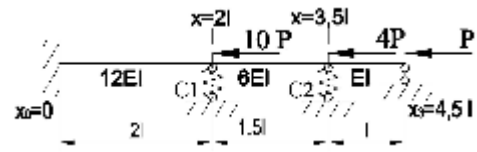


Рис. 2

$$q_1 = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2l[ \\ 0, & x \notin [0, 2l[ \end{cases}; \quad q_2 = \begin{cases} 1, & x \in [2l, 3,5l[ \\ 0, & x \notin [2l, 3,5l[ \end{cases};$$

$$q_3 = \begin{cases} 1, & x \in [3,5l, 4,5l[ \\ 0, & x \notin [3,5l, 4,5l[ \end{cases}. \quad (25)$$

Квазіпохідні для розв'язання (23) позначимо так:

$$y^{[0]}(x) \stackrel{def}{=} y(x); y^{[1]}(x) = y'(x); y^{[2]}(x) = EI \sum_{i=1}^3 \alpha_i \theta_i y''(x);$$

$$y^{[3]}(x) = P \sum_{i=1}^3 p_i \theta_i y'(x) + EI \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i \theta_i y''(x) \right). \quad (26)$$

Вихідне КДР (23) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad (27)$$

де

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix};$$

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( EI \sum_{i=1}^3 \alpha_i \theta_i \right)^{-1} & 0 \\ 0 & -P \sum_{i=1}^3 p_i \theta_i & 0 & 1 \\ -\sum_{i=1}^2 c_i \delta(x-x_i) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

За допомогою фундаментальної матриці  $B(x, x_0)$  [2, 3] для довільного початкового вектора  $Y_0 = Y(x_0)$ ,  $x_0 \in I$ , розв'язок системи (27) записується у вигляді (10).

Розіб'ємо стрижень довжиною  $4,5l$  на  $n$  однакових ділянок. Нехай початкова точка  $x_0 = 0$ , кінцева  $x_n = 4,5$ , крок розбиття  $h = x_{k+1} - x_k$ , де  $k = 0, \dots, n$ .

Апроксимоване КДР (23) матиме вигляд

$$EI \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i \theta_i y'' \right) + P \left[ \sum_{i=1}^3 p_i \theta_i \left\{ h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x-x_k) \right\} y'_n \right] +$$

Таблиця 1

Результати розрахунку

Метод	$P_i$	$k_{10} = 60$ ; $c_1 = 0$ ; $c_2 = 0$ .	$k_{10} = 60$ ; $c_1 = \beta_1$ ; $c_2 = \beta_2$ .
Теорема включення [5]	$P_1$	$31,07 \leq \lambda_1 \leq 32,00$	—
	$P_2$	—	—
	$P_3$	—	—
Коха [5]	$P_1$	$31,35096 \leq \lambda_1 \leq 31,35485$	—
	$P_2$	—	—
	$P_3$	—	—
Авторський	$P_1$	31,352864	33,302010
	$P_2$	32,711797	36,673622
	$P_3$	61,933504	62,684450

$$+\left(\sum_{i=1}^2 c_i \delta(x-x_i)\right)y=0, \quad (28)$$

Рівняння (28) є частинним (конкретизованим) випадком КДР (23).

Матриця стрибків (8) для нашого випадку буде такою:

$$\Delta C(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Pp_i h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

За виключенням точок  $x=2l$ ;  $3,5l$ , де матриця має вигляд

$$\Delta C(2l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4Ph & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta C(3,5l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Ph & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

фундаментальну матрицю диференціальної системи (27) можна знайти за формулою (9), причому фундаментальна матриця  $B(x_{k+1}, x_k)$  КДР  $(EI(x)y'')''=0$  в нашому випадку має вигляд [3]

$$B(x_{k+1}, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2EIa_i} & \frac{h^3}{3!} \\ 0 & 1 & \frac{h}{EIa_i} & \frac{h^2}{2EIa_i} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Для жорсткого закріплення в початковій точці ( $x=0$ ) та шарнірного — в кінцевій точці ( $x=4,5l$ ) характеристичне рівняння матиме вигляд

$$|A(I)| = \det \begin{pmatrix} a_{13}(P) & a_{14}(P) \\ a_{33}(P) & a_{34}(P) \end{pmatrix} = 0. \quad (31)$$

У табл. 2 подані порівняльні результати розрахунку перших трьох критичних сил  $P_i$  для стрижня змінного перерізу (рис. 2) на пружних опорах з коефіцієнтами

$$\text{жорсткості осадки } c_1 = \frac{8EI(x_1)}{l^3} = \beta_1; \quad c_2 = \frac{4EI(x_2)}{l^3} = \beta_2.$$

Збільшивши значення коефіцієнтів жорсткості до значень  $c_1 = 10^5$ ;  $c_2 = 10^5$ , отримаємо значення критичних сил, які збігаються з результатами задачі про втрату стійкості трипролітного стрижня змінної жорсткості (рис. 2) на жорстких опорах [7]. У таблиці виписані результати при  $l=1$ .

Результати розрахунку

Метод	$P_i$	Жорсткі опори	$c_1 = \beta_1$ $c_2 = \beta_2$
С.А.Рогіцького	$P_1$	6,35	2,98
	$P_2$	—	—
	$P_3$	—	—
Граничних елементів	$P_1$	4,45	1,95
	$P_2$	9,55	4,65
	$P_3$	—	9,85
		$c_1 = 10^5$ ; $c_2 = 10^5$	$c_1 = \beta_1$ ; $c_2 = \beta_2$
Авторський	$P_1$	4,430059	1,962257
	$P_2$	9,555361	4,674828
	$P_3$	13,236780	9,841164

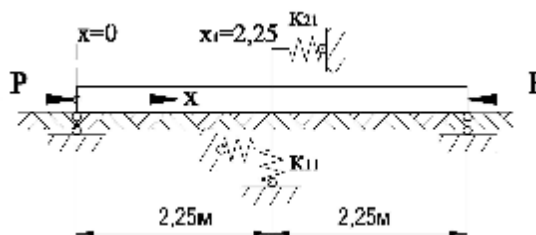


Рис. 3

Отже, записуючи вихідне КДР з узагальненими функціями в коефіцієнтах, уникаємо розв'язування задач спряження і громіздких викладок при цьому. Такий підхід, разом з реалізацією методу дискретизації, дає змогу без ускладнень розв'язувати подібні задачі для довільної скінченної кількості ділянок.

**Реалізація методу дискретизації в задачі про втрату стійкості стиснутого стрижня на сингулярній пружній основі.** Нехай стрижень, стиснутий силою  $P$ , розміщений на пружній основі (рис. 3). Приймемо плоску модель пружної основи з двома характеристиками [4]. Така модель враховує деформацію зсуву основи, її неоднорідність та багато інших чинників.

Для конкретності розглянемо залізобетонну балку прямокутного перерізу з такими характеристиками: ширина  $b=1$  м; висота  $h=0,3$  м; довжина  $l=4,5$  м;  $E=2,7 \cdot 10^7$  кПа,  $\mu=0,167$  — відповідно модуль пружності та коефіцієнт Пуасона матеріалу балки; згинна

$$\text{жорсткість балки } EI = \frac{Ebh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Задача про втрату стійкості такого стрижня зводиться до розв'язання КДР 4-го порядку

$$EIy^{IV} + [(P-k_2)y']' + k_1y = 0 \quad (32)$$

з такими крайовими умовами:

$$y(0) = y'(0) = y(4,5) = y''(4,5) = 0, \quad (33)$$

де  $k_1$ ;  $k_2$  — коефіцієнти жорсткості пружної основи (2).

Згідно з [4]

$$k_{10} = \frac{E_0 r_{11}}{2(1+\mu_0)}; \quad k_{20} = \frac{E_0 s_{11}}{(1-\mu_0^2)}. \quad (34)$$

Сталі величини у виразах (3) визначаються такими формулами:

$$E_0 = \frac{E_{zp}}{(1-\mu_{zp}^2)}; \quad \mu_0 = \frac{\mu_{zp}}{1-\mu_{zp}}; \quad r_{11} = \int_0^H \psi^2(y) b dy;$$

$$s_{11} = \int_0^H [\psi'(y)]^2 b dy; \quad t = \frac{E_0 r_{11}}{4(1+\mu_0)}. \quad (35)$$

де  $E_{zp} = 32 \cdot 10^3$  кПа;  $\mu_{zp} = 0,3$  — модуль пружності й коефіцієнт Пуасона основи;  $b$  — ширина перерізу стрижня;  $\psi(y)$  — безрозмірна функція поперечного розподілу осадки основи, яку приймаємо лінійною:

$$y(y) = \frac{(H-y)}{H}. \quad (36)$$

Потужність основи приймем для випадку пружної півплощини  $H \rightarrow \infty$ ; коефіцієнти  $r_{11} = b/2\gamma$ ,  $s_{11} = b\gamma/2$  при  $H \rightarrow \infty$  [4]. Приймаємо значення коефіцієнта  $\gamma = 1 \text{ м}^{-1}$ . Коефіцієнт жорсткості осадки та коефіцієнт жорсткості защемлення приймемо відповідно такими:  $k_{11} = EI/l^3$ ;  $k_{21} = EI/l^2$ .

Поділивши обидві частини рівняння (32) на сталу  $EI$ , отримаємо

$$y^{IV} + \left[ \frac{(P-k_2)}{EI} y' \right]' + \frac{k_1}{EI} y = 0. \quad (37)$$

Квазіпохідні для розв'язання (37) позначимо так:

$$y^{[0]}(x) \equiv y(x); \quad y^{[1]}(x) = y'(x); \quad y^{[2]}(x) = y''(x)$$

$$y^{[3]}(x) = \frac{(P-k_2)}{EI} y'(x) + y'''(x). \quad (38)$$

Вихідне КДР (37) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad (39)$$

де

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix};$$

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{(P-k_2)}{EI} & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{EI} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Розіб'ємо стрижень довжиною  $l$  на  $n$  однакових ділянок. Нехай початкова точка  $x_0 = 0$ , кінцева  $x_n = 4,5$ , крок розбиття  $h = x_{k+1} - x_k$ , де  $k = 0, \dots, n$  і замість рівняння (37) розглянемо КДР  $n$ -го наближення

$$y_n^{IV} + \left[ \frac{k_{10}}{EI} h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x-x_k) + k_{11} \delta(x-x_1) \right] y_n' + \left[ \frac{(P-k_{20})}{EI} h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x-x_k) + k_{21} \delta(x-x_1) \right] y_n' = 0. \quad (41)$$

Матриця стрибків (6) для нашого випадку має вигляд

$$\Delta C(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(P-k_{20})}{EI} h & 0 & 0 \\ -\frac{k_{10}}{EI} h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

за виключенням точки  $x = 2,5$ , де матриця є такою:

$$\Delta C(2,5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(P-k_{20})}{EI} h - k_{21} & 0 & 0 \\ -\frac{k_{10}}{EI} h - k_{11} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальну матрицю диференціальної системи (39) можна знайти за формулою (9), причому фундаментальна матриця  $B(x_{k+1}, x_k)$  КДР ( $a_0 y'''' = 0$  в нашому випадку має вигляд [3]

$$B(x_{k+1}, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3!} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Врахуємо крайові умови закріплення і сформуємо характеристичне рівняння. Для шарнірно закріплених кінців характеристичне рівняння матиме вигляд

$$|A(P)| = \det \begin{pmatrix} a_{12}(P) & a_{14}(P) \\ a_{32}(P) & a_{34}(P) \end{pmatrix} = 0. \quad (44)$$

Задаючи значення критичної сили  $P$  з визначеним кроком, за допомогою персонального комп'ютера отримуємо з рівняння (44) критичні сили  $P_i$ . В табл. 3 подані порівняльні результати з врахуванням та без врахування пружних опор.

**Висновки.** Запропоновано новий наближений метод обчислення критичного навантаження для стрижнів з дискретно неперервним розподілом параметрів, в основу якого покладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних

Таблиця 3

## Результати розрахунку

Метод	$P_i$	$k_1 = 0;$ $k_2 = 0.$	З врахуванням пружних опор
Аналітичний	$P_1$	3105873,6	—
	$P_2$	12423494,4	—
	$P_3$	27952862,4	—
Авторський	$P_1$	3105874,1	17345956,6
	$P_2$	12423496,3	24090579,5
	$P_3$	27952868,3	40931338,6

диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Метод характеризується простотою та універсальністю алгоритму і швидкістю збіжності. Отримані при цьому числові результати при відповідних значеннях параметрів збігаються з відомими в літературі.

## Література

1. *Образцов И.Ф., Онанов Г.Г.* Строительная механика скошенных систем. — М.: Машиностроение, 1973. — 654с.
2. *Тацій Р.М.* Узагальнені квазидиференціальні рівняння // Препр. АН України ІППММ. — 1994. — №2-94. — С. 1—54.
3. *Тацій Р.М., Пахолок Б.Б.* Про структуру фундаментальної матриці квазидиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. — Сер. А. — 1989. — №4. — С. 25—28.
4. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — М.: Физматгиздат,
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Перев. с нем. — М.: Наука, 1968. — 503 с.
6. *Тацій Р.М., Іщук В.В., Кіселевич В.В.* Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами // Вісн. Київ. ун-ту: Математика і механіка. — Київ: Либідь, 1990. — №32. — С. 128—131.

7. *Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф.* Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. — Одесса: Астропринт, 2001. — 240 с.

8. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1967. — с.

9. *Тацій Р.М., Ушак Т.І.* Метод дискретизації в задачах стійкості стрижнів змінної жорсткості / Вісник НУ «Львівська політехніка» «Теорія та практика будівництва». — 2005. — №545. — С. 178—181.

10. *Давидчак О.Р., Тацій Р.М., Ушак Т.І.* Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стрижневих систем методом граничних елементів з апроксимацією коефіцієнтів диференціальних рівнянь // Вісник НУ «Львівська політехніка» «Теорія та практика будівництва». — 2004. — №495. — С. 62—64.

11. *Давидчак О.Р., Тацій Р.М.* Розв'язок задач динаміки і стійкості стержневих систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів // *Zeszyty naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i inzynieria srodowiska.* — Rzeszow, 2004. — Z. 37. — S. 57—60.

12. *Тацій Р.М., Давидчак О.Р.* Розрахунок дискретно-неперервних стрижневих систем // Вісник НУ «Львівська політехніка» «Теорія та практика будівництва». — 2002. — №462. — С. 145—149.

Отримана 25.05.09

R. Tatsiy<sup>1</sup>, T. Ushak<sup>2</sup>

**Solving problems of resistance loss of rods with discretely-continuous parameters distribution by the method of digitization**

<sup>1</sup>Lviv State University of Vital Activity Safety, Lviv;  
<sup>2</sup>VAT ZBK "Vash dim", Lviv

In the present article the new rough method of problems solving of resistance loss of rods with discretely-continuous parameters is introduced. In the core of the method lies the approximation of coefficients of the corresponding differential equations with generalized functions. With the help of issue quasi-differential equation with generalized functions coefficients the problems of rods resistance under the distributed and concentrated factors are solved. The article gives a demonstration of method efficiency while resistance problems solving. New results unknown in specialized literature before are achieved.

---

2í ôîðì àö³ÿ

## MULTISCALE EFFECTS IN FATIGUE METALS

Ecole Polytechnique, Palaiseau, France  
5 July 2010 - 9 July 2010

## Contact:

Chairperson: *Dr. Andrei*

Polytechnique Laboratoire de Mécanique des Solides  
91128 Palaiseau cedex, France phone: +33 1 69 33 57 56 fax: +33 1 69 33 57 06  
E-mail: [andrei.constantinescu@lms.polytechnique.fr](mailto:andrei.constantinescu@lms.polytechnique.fr)

Co-Chairperson: *Dr. Pedro Donatella Portella*

German Federal Institute for Material Research and Testing,  
Berlin, Germany

Website: <http://www.lms.polytechnique.fr>