УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО КРУЧЕННЯ ЦИЛІНДРА ПОВЕРХНЕВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ЗА ІСНУВАННЯ МЕЖОВОГО ШАРУ

О. Андрейків

Член-кор. НАН України, професор, д-р техн. наук

О. Галазюк

Аспірантка

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

Запропонована нова математична модель кручення циліндра за існування на його поверхні межового шару, який утворений певним технологічним процесом. Проведений числовий аналіз розподілу дотичних напружень при крученні циліндричного вала за защімленого торця і частини поверхні у циліндричному поясі.

циліндр, межовий шар, кручення, торсіонна підвіска

Круглі циліндри сталого перерізу, які скручуються поверхневим навантаженням, є одними з важливих елементів машин і механізмів, а тому актуальною є побудова ефективних математичних моделей їх напружено-деформованого стану. У цьому випадку теорію кручення Сен-Венана, яка базується на припущенні про відсутність поверхневого навантаження, не можна застосовувати.

Класична математична модель осесиметричного деформування круглих циліндрів, які скручуються поверхневим навантаженням, побудована на основі системи рівнянь рівноваги в напруженнях та умов спільності в напруженнях Бельтрамі-Мічела [1]. Ця модель вперше була застосована А. Тимпе до задачі про кручення циліндра кругового поперечного перерізу поверхневим навантаженням. Проте розв’язок визначає такі характеристики напруженого стану, які не існують на поверхні циліндра, що є результатом некоректного формулювання задачі.

Нижче для побудови математичної моделі осесиметричного кручення циліндра поверхневим навантаженням за відсутності дилатації запропоновано використати рівняння рівноваги у переміщеннях, які у розглянутому випадку зводяться до одного рівняння відносно двох не рівних нулю компонент вектора локального жорсткого повороту $\vec{\Omega} = 0,5\, rot\vec{u}$. Це дає можливість записати усі характеристики напруженого стану через одну гармонічну функцію, яку в циліндричних координатах для довгого циліндра можна подати інтегралами Фур’є, що сприяє ефективному розв’язанню задач з частково детермінованими крайовими умовами.

Такі задачі виникають за математичного моделювання напружено-деформованого стану в циліндрах із защемленими торцем і частиною бічної поверхні (торсіонна підвіска).

Зазначимо, що у класичній постановці крайових задач за локалізованих крайових умов потрібно їх довизначити поза областю задання. Як наслідок, виникає задача зі змішаними або розривними крайовими умовами, в якій питання їх узгодженості на лінії зміни не розглядається. Це призводить до появи сингулярних ефектів [2], які суперечать гіпотезі суцільності та обмеженням лінійної моделі деформівного твердого тіла.

Подання характеристик напружено-деформованого стану в циліндрі інтегралами Фур’є спрощує процедуру виконання локалізованих крайових умов, оскільки це приводить до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, множина залежних від параметра розв'язків якого знаходиться методом розривних інтегралів Фур'є [3]. Введений параметр можна трактувати як зведену характеристику межового шару і ним визначається клас порібних довантажень, який здійснює межовий шар для існування розв'язку задачі та гладкості деформування поверхні циліндра на лінії зміни крайових умов. Зазначимо, що наявність межового шару обґрунтовує існування поверхневої енергії.

Постановка задачі і її математична модель. Пружний ізотропний циліндр з радіусом твірної R віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha,\beta,R\gamma)$ і за умови незмінюваності об'єму $\theta(\alpha,\beta,\gamma)=div\,\vec{u}\equiv 0$, яка справедлива за відсутності дилатації, компоненти вектора пружного переміщення $R\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ в циліндричній системі координат будуть такими:

$$u_\alpha(\alpha,\beta,\gamma)=0,\ u_\beta=u_\beta(\alpha,\gamma),\ u_\gamma(\alpha,\beta,\gamma)=0\,.$$

За таких обставин рівняння Ламе

$$(\lambda+2\mu)\,grad\,div\,\vec{u}-\mu\,rotrot\,\vec{u}=0$$

зведеться до одного рівняння

$$\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\alpha}=0 \qquad (1)$$

відносно компонент $\omega_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $\omega_\gamma(\alpha,\gamma)$ вектора локального жорсткого повороту $\vec{\Omega}=0{,}5\,rot\,\vec{u}$, які у циліндричній системі координат визначаються компонентою $u_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора $\vec{u}(\alpha,\gamma)$ так:

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma)=-\frac{\partial u_\beta}{\partial\gamma}\ ,\ 2\omega_\gamma=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha u_\beta)\,. \qquad (2)$$

Якщо ввести ключову функцію $Q(\alpha,\gamma)$ таку, що $u_\beta(\alpha,\gamma)=\partial Q/\partial\alpha$, то за поданням (2) знайдемо, що

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma)=-\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha\partial\gamma},\ 2\omega_\gamma(\alpha,\gamma)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right) \qquad (3)$$

і, як наслідок, рівняння в частинних похідних (1) набере вигляду

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial^2 Q}{\partial\gamma^2}\right]=0\,. \qquad (4)$$

Для виконання рівняння (4) досить прийняти, що шукана функція $Q(\alpha,\gamma)$ є розв'язком рівняння Лапласа

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial^2 Q}{\partial\gamma^2}=0 \qquad (5)$$

в області $0\le\alpha\le 1$ і $0\le|\gamma|<\infty$. За відомою функцією $Q(\alpha,\gamma)$ та законом Гука знайдемо ненульові компоненти тензора напружень і запишемо їх так:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)=\mu\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right);\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,.\gamma)=\mu\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha\partial\gamma}, \qquad (6)$$

де $\mu=E/2(1+\nu)$ — модуль зсуву.

Отже, у випадку кручення циліндра поверхневим навантаженням без дилатації його напружений стан визначається тільки дотичними напруженнями, рівень яких обумовлює появу пластичних деформацій (умова пластичності Треска-Мізеса) або спричинює крихке руйнування.

Розв'язок рівняння Лапласа (5) подамо сумою інтегралів Фур'є:

$$Q(\alpha,\gamma)=\int_0^\infty A(\xi)\ \mathrm{I}_0(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi+\int_0^\infty B(\xi)\ \mathrm{I}_0(\xi\alpha)\cos\xi\gamma d\xi, \qquad (7)$$

які є обмеженими в області $0\le\alpha\le 1$, а функції $A(\xi)$ і $B(\xi)$ визначаються крайовими умовами і забезпечують існування й обмеженість інтегралів в області ($0\le\alpha\le 1$, $0\le|\gamma|<\infty$).

За відомими функціями $A(\xi)$ і $B(\xi)$ обчислимо компоненту $u_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора $\vec{u}$:

$$u_\beta(\alpha,\gamma)=\int_0^\infty \xi A(\xi)\ \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi+$$

$$+\int_0^\infty \xi B(\xi)\ \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\cos\xi\gamma d\xi\,, \qquad (8)$$

а за поданням (6) нерівні нулю у цьому випадку компоненти тензора напружень:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)=\mu\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)\ \mathrm{I}_2(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi-$$

$$-\mu\int_0^\infty \xi^2 B(\xi)\ \mathrm{I}_2(\xi\alpha)\cos\xi\gamma d\xi\,, \qquad (9)$$

$$\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)=\mu\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)\ \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\cos\xi\gamma d\xi-$$

$$-\mu\int_0^\infty \xi^2 B(\xi)\ \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi, \qquad (10)$$

де $\mathrm{I}_1(\xi\alpha)$ і $\mathrm{I}_2(\xi\alpha)$ — модифіковані функції Беселя першого та другого порядку.

З (2) знайдемо компоненти вектора $\vec{\Omega}$:

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma)=-\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)\ \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\cos\xi\gamma d\xi+$$

$$+\int_0^\infty \xi^2 B(\xi)\ \mathrm{I}_1(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi, \qquad (11)$$

$$2\omega_\gamma(\alpha,\gamma)=\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)\mathrm{I}_0(\xi\alpha)\sin\xi\gamma\, d\xi+$$

$$+\int_0^{\infty}\xi^2 B(\xi)\,\mathrm{I}_0(\xi\alpha)\cos\xi\gamma\,d\xi. \qquad (12)$$

Аналіз виразів (8) — (12) вказує на те, що характеристики напружено-деформованого стану можуть бути парними функціями змінної γ за умови $A(\xi)=0$ або непарними функціями змінної γ за умови $B(\xi)=0$.

Отже, для визначення характеристик напружено-деформованого стану циліндра слід сформулювати крайову задачу для визначення функцій $A(\xi)$ або $B(\xi)$. Як нижче буде з'ясовано, мистецтво математичного моделювання визначається коректним формулюванням крайових умов, які правильно відображають сутність фізичного явища.

Для визначення функцій $A(\xi)$ і $B(\xi)$ розглянемо таку задачу: нехай в області $0\le|\gamma|\le\gamma_0$ на поверхні $\alpha=1$ безмежного циліндра задана компонента $\omega_\gamma(1,\gamma)$ вектора $\vec{\Omega}=0{,}5\,rot\,\vec{u}$ локального жорстокого повороту навколо осі γ:

$$2\omega_\gamma(1,\gamma)=\gamma f\left(\gamma^2\right)\ 0\le|\gamma|\le\gamma_0\,, \qquad (13)$$

яка має протилежні знаки у циліндричних поясах $-\gamma_0\le\gamma\le 0$ і $0\le\gamma\le\gamma_0$ відповідно, що автоматично забезпечує рівновагу циліндра. Оскільки відповідно до крайової умови (13) функція $\omega_\gamma(1,\gamma)$ є непарною функцією змінної γ, то $B(\xi)=0$ і підстановкою подання (12) у крайову умову (13) отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\int_0^{\infty}\xi^2 A(\xi)\ \mathrm{I}_0(\xi\alpha)\sin\xi\gamma\,d\xi=\gamma f\left(\gamma^2\right)\ \ 0\le|\gamma|\le\gamma_0\,, \qquad (14)$$

для визначення функції $A(\xi)$.

Для розв'язання рівняння (14) застосуємо метод розривних інтегралів Фур'є [4], відповідно до якого функцію $A(\xi)$ подамо узагальненим рядом Неймана:

$$\xi^2 A(\xi)\,\mathrm{I}_0(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)}{\xi^q}\,,\ 0{,}5<q<1 \qquad (15)$$

з невизначеними наперед коефіцієнтами a_n і параметром $0{,}5<q<1$.

Подальші дослідження базуватимуться на властивостях розривного інтеграла Фур'є:

$$\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(a\xi)\cos(b\xi)}{\xi^\lambda}d\xi=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right)}{2^\lambda a^{1-\lambda}\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+1}{2}\right)}\times F\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2};\frac{1-\lambda-\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{b^2}{a^2}\right);[0<b<a]\\ \dfrac{\sqrt{\pi}a^\nu\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right)}{2^\lambda b^{1-\lambda+\nu}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)}\times F\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2};\frac{2-\lambda+\nu}{2};\nu+1;\frac{a^2}{b^2}\right);[0<a<b]\end{array}\right\}$$

$$0{,}5<\lambda<\nu+1 \qquad (16)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(a\xi)\sin(b\xi)}{\xi^\lambda}d\xi=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{b\Gamma\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}\right)}{2^{\lambda-1}a^{2-\lambda}\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}\times F\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2};\frac{2-\lambda-\nu}{2};\frac{3}{2};\frac{b^2}{a^2}\right);[0<b<a]\\ \dfrac{\sqrt{\pi}a^\nu\Gamma\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}\right)}{2^\lambda b^{\nu-\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\nu}{2}\right)}\times F\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2};\frac{1-\lambda+\nu}{2};\nu+1;\frac{a^2}{b^2}\right);[0<a<b]\end{array}\right\}$$

$$0{,}5<\lambda<\nu+1 \qquad (17)$$

У виразах (16), (17) $\Gamma(x)$ — гамма-функція; $F\left(a;b;c;x^2\right)$ — гіпергеометрична функція Гауса, задана гіпергеометричним рядом

$$F\left(a;b;c;x^2\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)}\frac{x^{2k}}{k!} \qquad (18)$$

з одиничним радіусом збіжності при $c-a-b>0$, причому:

$$F(a;b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

$$F\left(a;b;c;x^2\right)=\left(1-x^2\right)^{c-a-b}F\left(c-a;c-b;c;x^2\right). \qquad (19)$$

Зауважимо, що при $a=-k$ або $b=-k$, де $k\in\mathbf{N_0}$ ряд (18) зводиться до полінома степеня $2k$, який можна виразити через поліноми Якобі [4].

Відзначимо такі властивості інтеграла Фур'є: інтеграли (16), (17) неперервні в точці $|\alpha|=1$ за умови $c-a-b>0$; інтеграли (16) і (17) тотожно дорівнюють нулю для всіх $|\alpha|>1$, якщо відповідно $1-\lambda-\nu=-2n$ і $\lambda+\nu=2n$, $n\in\mathbf{N_0}$.

Якщо ряд (15) підставити в інтегральне рівняння (14), поміняти порядок сумування та інтегрування і обчислити за формулою (17) відповідний інтеграл, то інтегральне рівняння (14) в області $0\le|\gamma|\le\gamma_0$ стане рядом за повною системою функцій:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma(n-q+2)\gamma}{2^{q-1}\gamma_0{}^{2-q}\Gamma(n+1)}\times F\left(n-q+2;-n;\frac{3}{2};\frac{\gamma_0{}^2}{\gamma^2}\right)=\gamma f\left(\gamma^2\right)$$

$$0\le|\gamma|\le\gamma_0\,, \qquad (20)$$

оскільки

$$F\left(n-q+2;-n;\frac{3}{3};\frac{\gamma_0{}^2}{\gamma^2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\ P_n^{\left(\frac{1}{2};-q+\frac{1}{2}\right)}\left(1-2\frac{\gamma_0{}^2}{\gamma^2}\right)$$

є поліномами Якобі, тому ряд (20) можна записати так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+2)\sqrt{\pi}P_n^{\left(\frac{1}{2};-q+\frac{1}{2}\right)}\left(1-2x^2\right)}{2^q \gamma_0^{2-q}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = f\left(\gamma_0 x^2\right)$$

і, внаслідок формули ортогональності [4] поліномів Якобі, знайдемо a_n коефіцієнти ряду (20):

$$a_n = \frac{2^{q+1}\gamma_0^{2-q}(2n+2-q)\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-q+\frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{-q+\frac{1}{2}} f\left(\gamma_0^2 x^2\right) P_n^{\left(\frac{1}{2},-q+\frac{1}{2}\right)}\left(1-2x^2\right)dx .$$

Тепер за відомими коефіцієнтами a_n, які за формулою (15) визначають функцію $A(x)$, можна за поданнями (8) — (12) обчислити всі характеристики напружено-деформованого стану в циліндрі, які залежатимуть від параметра $0{,}5 < q < 1$. Зокрема:

$$u_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)}{\xi^{q+1}\mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_1(\xi\alpha) sin\xi\gamma d\xi ; \qquad (21)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)}{\xi^{q}\mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_2(\xi\alpha) sin\xi\gamma d\xi ; \qquad (22)$$

$$\sigma_{\beta\gamma} = \mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)}{\xi^{q}\mathrm{I}_0(\xi)} \mathrm{I}_1(\xi\alpha) cos\xi\gamma d\xi . \qquad (23)$$

Зазначимо, що обмеження на параметр q, на відміну від розв'язку Тимпе, забезпечує існування всіх невласних інтегралів на поверхні циліндра $\alpha = 1$ і їхню неперервність у точці $\gamma = \gamma_0$.

Для підтвердження цього факту обчислимо за поданням (12) компоненту $\omega_\gamma(1,\gamma)$ в області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$. У результаті отримаємо такий інтеграл:

$$2\omega_\beta(1,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)}{\xi^q} sin\xi\gamma d\xi , \qquad (24)$$

значення якого в області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$ знайдемо за формулою (17) і запишемо так:

$$2\omega_\gamma(1,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma\left(n-q+\frac{3}{2}\right)}{2^r\Gamma(2n-q+3)\Gamma\left(-n+q-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\gamma_0^{2n-q+2}\sqrt{\pi}}{|\gamma|^{2n-2p+3}} F\left(n-q+\frac{3}{2}; n-q+2; 2n-q+3; \frac{\gamma_0^2}{\gamma^2}\right). \qquad (25)$$

Оскільки в області $0 \le |\gamma| \le \gamma_0$ компонента $\omega_\gamma(1,\gamma)$ задана крайовою умовою (13), а в області $\gamma_0 \le |\gamma| < \infty$ визначається рядом (25), то відповідно до гіпотези суцільності [6] на лінії $\gamma = \gamma_0$ зміни крайових умов повинна виконуватися гранична рівність:

$$\lim_{|\gamma|\to|\gamma_0|-\varepsilon} \omega_\gamma(1,\gamma) = \lim_{|\gamma|\to|\gamma_0|+\varepsilon} \omega_\gamma(1,\gamma), \qquad (26)$$

виконання якої забезпечує також виконання вимоги [5] неперервної залежності розв'язку крайової задачі від крайових умов. У цьому легко переконатися, якщо в рядах (20) і (25) обчислити за формулою (19) значення гіпергеометричної функції Гауса у точці $\gamma = \gamma_0$, яка існує тільки за умови $q > 0{,}5$, оскільки за виконання цієї умови гіпергеометричний ряд (18) є збіжним в точці $x = 1$.

Отже, в межах запропонованої моделі напружений стан циліндра визначається тільки дотичними напруженнями $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)$ і $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)$, причому зрізуючі напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)$ вздовж радіуса мають закон розподілу (23). Відповідно до цього закону вони рівні нулю на осі циліндра і, на відміну від моделі Кулона [1], нелінійно залежать від осьової координати γ.

Якщо у законі (22) розподілу дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)$ врахувати, що $\mathrm{I}_2(\xi\alpha) = -\frac{2}{\xi\alpha}\mathrm{I}_1(\xi\alpha) + \mathrm{I}_0(\xi\alpha)$, то його можна записати так:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_0(\xi\alpha)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)} sin\xi\gamma d\xi - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{\alpha}\int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_1(\xi)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)} sin\xi\gamma d\xi \right\}$$

і, зокрема, на поверхні циліндра $\alpha = 1$

$$\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma) = \mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)}{\xi^q} sin\xi\gamma d\xi - \right.$$

$$\left. -2\int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_1(\xi)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)} sin\xi\gamma d\xi \right\}. \qquad (27)$$

Зазначимо, що за умови $q > 0{,}5$ є справедливою формула підсумовування (19) гіпергеометричної функції Гауса. Оскільки у поданні (27) перший доданок збігається з сумою подання (24), то вираз закону розподілу дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma)$ в області $0 \le |g| \le 1$ є таким:

$$\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma) = \mu\left\{ \gamma f(\gamma^2) - \right.$$

$$\left. -2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_1(\xi)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)} sin\xi\gamma d\xi \right\} \qquad (28)$$

і відповідно в області $g_0 \le |g| < \infty$

$$\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma) = \mu\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\gamma_0^{2n-q+2}\Gamma\left(n-q+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2^q\Gamma(2n-q+3)\Gamma\left(-n+q-\frac{1}{2}\right)|\gamma|^{2n-2q+3}} \times$$

$$\times F\left(n-q+\frac{3}{2};n-q+2;2n-q+3;\frac{\gamma_0^2}{\gamma^2}\right)-$$

$$-2\mu\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)\mathrm{I}_1(\xi)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)}\sin\xi\gamma d\xi. \qquad (29)$$

Таким чином, дотичне напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma)$ на поверхні циліндра $\alpha=1$ і в області $\gamma_0\le|\gamma|<\infty$, відповідно до виразу (29), складається з двох нетотожних доданків, а тому ні за яких обставин не може дорівнювати нулю. Це дає можливість стверджувати наступне: при заданні компоненти $\omega_\gamma(1,\gamma)$ вектора локального жорсткого повороту $\Omega=0.5rot\vec{u}$ на на поверхні циліндра $\alpha=1$ в обмеженій області $0\le|\gamma|\le1$ в області $\gamma_0\le|\gamma|<\infty$ існують дотичні напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma)$, що є механічним проявом існування там межового шару зі зведеною характеристикою $1/2<q<1$.

Реалізація моделі. Як приклад застосування наведених вище результатів запропонуємо математичну модель заклинювання циліндричного вала в області $0\le\gamma\le\gamma_0$. Для цього ключовою функцією $Q^0=0.5\alpha^2\gamma$ за формулами (3) і (6) введемо основний напружено-деформований стан у півбезмежному циліндрі $0\le\gamma\le\gamma_0$:

$$u_\beta{}^0(\alpha,\gamma)=\alpha\gamma,\ 2\omega_\alpha{}^0(\alpha,\gamma)=-\alpha,\ 2\omega_\gamma{}^0(\alpha,\gamma)=\gamma,$$

$$\sigma_{\alpha\beta}{}^0(\alpha,\beta)=0,\ \sigma_{\beta\gamma}{}^0(\alpha,\gamma)=\mu\alpha, \qquad (30)$$

який визначає переміщення і кути локального жорсткого повороту у півбезмежному циліндрі, один торець якого защемлений, а на безмежно віддаленому торці задані дотичні напруження $\sigma_{\beta\gamma}{}^0$, що змінюються за лінійним законом вздовж радіуса циліндра.

За локалізованого защемлення циліндра в області $0\le\gamma\le\gamma_0$ у ньому виникне додатковий напружений стан, який визначається вимогою відсутності сумарного повороту на поверхні $\alpha=1$ циліндра у цій області:

$$\omega_\gamma(1,\gamma)+\omega_\gamma{}^0(\gamma)=0,\quad 0\le\gamma\le\gamma_0. \qquad (31)$$

Оскільки, відповідно до рівностей (30), $\omega_\gamma{}^0(\gamma)$ є непарною функцією змінної γ, то за поданням (12) і крайовою умовою (31) отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^{\infty}\xi^2A(\xi)\mathrm{I}_0(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi=-\gamma$$

$$0\le\gamma\le\gamma_0, \qquad (32)$$

для визначення функції $A(x)$, яке збігається з інтегральним рівнянням (14) за умови $f(\gamma^2)=-1$. Тому в цьому випадку з рівняння (20) знайдемо, що

$$a_0=-\frac{2^{q-1}\gamma_0{}^{2-q}}{\Gamma(2-q)},\ a_n\equiv0\quad\forall n\in N.$$

і за поданням (15) визначимо функцію $A(\xi)$:

$$xA(x)=-\frac{2^{q-1}g_0{}^{2-q}}{\Gamma(2-q)}\frac{J_{2-q}(xg_0)}{x^{q+1}\mathrm{I}_o(x)}, \qquad (33)$$

яка залежить від параметра $0,5<q<1$.

Тепер за поданням (21) — (24) можна обчислити усі характеристики напруженого стану в защемленому в області $0\le\gamma\le\gamma_0$ циліндрі. Зокрема, матимемо такі розрахункові формули:

$$u_\beta(\alpha,\gamma)=\alpha\gamma-\frac{2^{q-1}\gamma_0{}^{2-q}}{\Gamma(2-q)}\int_0^{\infty}\frac{J_{2-q}(\xi\gamma_0)}{\xi^{q+1}\mathrm{I}_0(\xi)}\mathrm{I}_1(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi; \qquad (34)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)=-\frac{2^{q-1}\mu\gamma_0{}^{2-q}}{\Gamma(\alpha=9.9-q)}\int_0^{\infty}\frac{J_{2-q}(\xi\gamma_0)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)}\mathrm{I}_2(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi; \qquad (35)$$

$$\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)=\mu\left[\alpha-\frac{2^{q-1}\gamma_0{}^{2-q}}{\Gamma(2-q)}\times\int_0^{\infty}\frac{J_{2-q}(\xi\gamma_0)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)}\mathrm{I}_1(\xi\alpha)\cos\xi\gamma d\xi\right]; \qquad (36)$$

$$2\omega_\gamma(\alpha,\gamma)=\gamma-\frac{2^{q-1}\gamma_0{}^{2-q}}{\Gamma(2-q)}\int_0^{\infty}\frac{J_{2-q}(\xi\gamma_0)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)}\mathrm{I}_0(\xi\alpha)\sin\xi\gamma d\xi; \qquad (37)$$

$$2\omega_\alpha(\alpha,\gamma)=-\alpha+\frac{2^{q-1}\gamma_0{}^{2-q}}{\Gamma(1-q)}\int_0^{\infty}\frac{J_{2-q}(\xi\gamma_0)}{\xi^q\mathrm{I}_0(\xi)}\mathrm{I}_1(\xi\alpha)\cos\xi\gamma d\xi; \qquad (38)$$

Аналіз розрахункових інтегралів у формулах (34) — (38) вказує на те, що за виконання нерівності $0,5<q<1$ на параметр q усі вони існують і є неперервними на лінії $a=1$, що розмежовує защемлену і незащемлену частини поверхні циліндра.

Таким чином, закон розподілу (9) визначає потрібне довантаження поверхні циліндра в області $\gamma_0\le\gamma<\infty$ дотичними напруженнями, яке здійснюється межовим шаром зі зведеною характеристикою $0,5<q<1$ для забезпечення існування фізично коректного розв'язку задачі з неперервним розподілом характеристик напруженого стану на лінії $\gamma=\gamma_0$ поверхні циліндра.

У постановці А. Тимпе за відсутності зовнішнього навантаження поверхні циліндра в області $\gamma_0\le\gamma<\infty$ вимагається рівність нулю дотичних напружень $\sigma_{\alpha\beta}(1,\gamma)$ у цій області. При цьому можна показати, що за такої вимоги крайова задача про кручення циліндра поверхневим навантаженням в обмеженій області є некоректною і її розв'язок не існує.

Числові результати та їх аналіз. На рис. 1 наведений розподіл дотичних напружень $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma)$ при фіксованих значеннях змінної α вздовж осі γ циліндра, який знайдений за поданням (35) при $q=0.75$. При цьому з'ясовано, що максимального значення ці напруження досягають на лінії $\gamma=\gamma_0$, яка розмежовує защемлення і вільну поверхню циліндра. Причому на цій лінії дотичні напруження стрибково змінюють знак і це може спричинити появу пластичних деформацій або крихке руйнування. На рис. 2 наведений розподіл зрізуючих дотичних напружень $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma)$ вздовж радіуса циліндра у чотирьох його перерізах $\gamma=0,\ \ \gamma=0.5,\ \gamma=1,\ \ \gamma=1.5$,

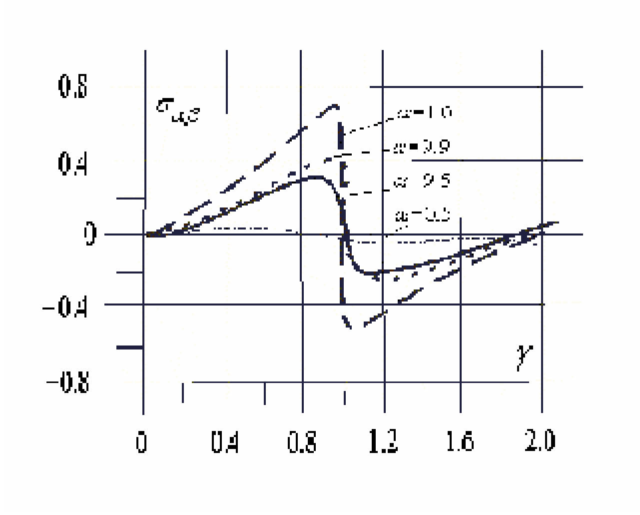

Рис. 1

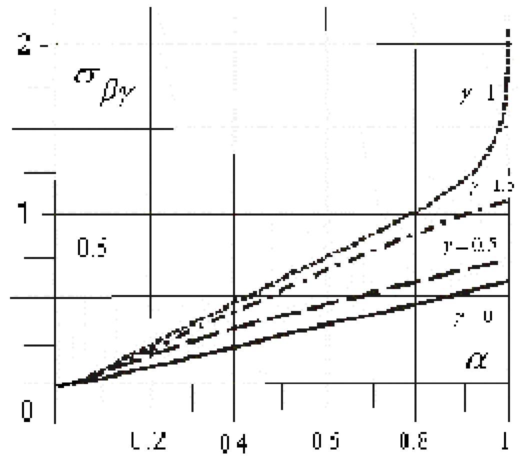

Рис. 2

який знайдений за поданням (36) при $q = 0.75$. При цьому з'ясовано, що максимального значення вони досягають у перерізі $\gamma = 1$ на поверхні циліндра $\alpha = 1$.

Література

1. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. — М.: ФМ, 1963. — 686 с.

2. *Грінченко В. Т., Улітко А.Ф.* О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 1998. — **41**, №1. — С. 12—34.

3. *Галазюк В.А., Сулим Г.Т.* Неклассическая модель деформирования тел с трещинами // Теор. и прикл. механика. — Харьков: Основа, 2001. — Вып. 33. — С. 63—75.

4. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

Отримана 22.10.08

O. Andreikiv, O. Halazuk

Mathematical model of axis symmetrical torsion by the surface loading of the cylinder in the case of existence of the boundary layer

Ivan Franko Lviv National University, Lviv

A new mathematical model of cylinder torsion providing existence of the boundary layer on its surface is proposed. The boundary layer is created by some technological process. Also, a numerical analysis of distribution of the tangential stress in cylinder torsion with restrained butt-end and the part of the surface of cylindrical zone is presented.

² í ôî ðì àö³ÿ

XVI INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS

May 24 — 28, 2010
Riga, Latvia

The present Conference follows the previous meetings in this series held in Riga from 1965 to 2008. The XVI International Conference intends to keep the customary themes of discussion. Traditionally on the Riga conferences, the number of participants is approximately 250 from many countries. So, the conference offers a good opportunity to meet colleagues from all over the world. The meeting history is avaliable on the Conference website.

CONFERENCE SCIENTIFIC SECRETARY:
Dr. K. Cirule, Institute of Polymer Mechanics,
University of Latvia
23 Aizkraukles St., Riga, LV 1006, Latvia
phone: +371-67543121,
mob. phone: +371-29662710,
fax: +371-67820467;
e-mail: cirule@pmi.lv
http://www.pmi.lv/html/Conflnf.htm.