

В. Говоруха

Доцент, канд. фіз.-мат. наук

В. Лобода

Професор, д-р фіз.-мат. наук

Дніпропетровський національний
університет імені Олеся Гончара,
м. Дніпропетровськ

УДК 539.3

МІЖФАЗНА ТРІЩИНА ЗІ СКІНЧЕННОЮ ЕЛЕКТРИЧНОЮ ПРОНИКНІСТЮ У П'ЄЗОКЕРАМІЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Розглянута плоска задача електропружності для п'єзокерамічного біматеріалу з частково електропроникною міжфазною тріщиною, береги якої знаходяться в умовах гладкого контакту. Розв'язок задачі побудовано в замкненій формі методами теорії функцій комплексної змінної. Отримано рівняння для визначення довжини зони контакту та вирази для основних параметрів руйнування поблизу вершини тріщини.

п'єзокерамічний матеріал, міжфазна тріщина, зона контакту

Вперше модель міжфазної тріщини, в якій враховується контакт берегів біля вершин тріщини була запропонована в [1] з метою ліквідувати фізично некоректні осцилюючі особливості в полях напружень та переміщень, що виникають у привершинних зонах тріщини при розв'язанні задачі в рамках моделі тріщини з повністю відкритими берегами. У подальшому в працях [2 — 4] були отримані аналітичні розв'язки для міжфазної тріщини відповідно до моделей гладкого та фрикційного контактів. У [5] запропоновано й аналітично обґрунтовано модель міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту, яка дала змогу ефективно проводити аналіз композитних тіл скінченних розмірів. Для п'єзокерамічних композитних матеріалів точні розв'язки задач для міжфазної тріщини з зонами контакту отримано в [6, 7].

Слід зазначити, що у згаданих вище працях, як і в багатьох інших, під час аналізу використовувалися моделі електропроникної або електроізолюваної тріщини. Однак найреалістичнішим і узагальненим варіантом електричних умов можна вважати умови для частково електропроникної тріщини [8], в яких врахована електрична проникність середовища, що заповнює тріщину. Але, незважаючи на те, що частково електропроникна тріщина найбільш реалістична, можна виділити лише незначну

кількість праць, в яких ця модель досліджувалася раніше [9 — 11]. Нижче, в рамках моделі міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту, у замкненому вигляді подається розв'язок задачі для частково електропроникної тріщини, яка розміщена на межі поділу двох півпросторів з різних п'єзокерамічних матеріалів.

Постановка задачі. Вихідні співвідношення. У прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ розглянемо простір, складений з двох різних п'єзокерамічних півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$. Матеріали цих півпросторів мають клас симетрії bmm і попередньо поляризовані у напрямі осі Ox_3 (рис. 1).

Вважатимемо, що у смузі $b_1 < x_1 < b_2$, $x_3 = 0$ області розмежування півпросторів розташована частково електропроникна ненавантажена тріщина, а поза тріщиною півпростори жорстко зчеплені між собою вздовж своєї межі $x_3 = 0$. На нескінченності задані однорідні поля механічних зусиль та електричної індукції.

Розглянемо задачу для випадку плоскої деформації, тобто вважатимемо, що всі характеристики електромеханічного поля не залежать від координати x_2 .

Згідно з [1] введемо біля правої вершини тріщини штучну зону гладкого (безфрикційного) контакту $a < x_1 < b_2$. Розташування точки a , що визначає довжину

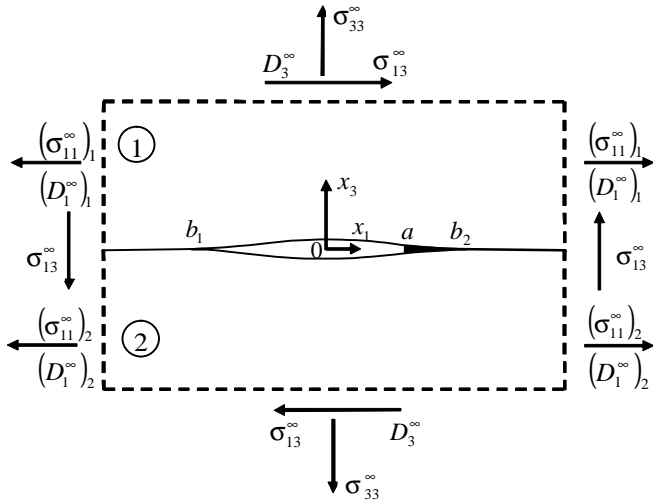


Рис. 1. П'єзокерамічний біматеріал із міжфазною тріщиною

зони контакту, поки що є довільним і буде визначене далі з додаткових умов.

Відкриту частину тріщини позначимо через $M = (b_1, a)$, зону контакту — $L = (a, b_2)$, а ділянки жорсткого зчеплення матеріалів — через U . Тоді умови на межі поділу матеріалів можемо записати у такому вигляді:

$$[[\sigma_{13}]] = 0, [[\sigma_{33}]] = 0, [[D_3]] = 0, x_1 \in U \cup M \cup L; \quad (1)$$

$$[[u_1]] = 0, [[u_3]] = 0, [[\varphi]] = 0, x_1 \in U; \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = 0, [[u_3]] = 0, [[\varphi]] = 0, x_1 \in L; \quad (3)$$

$$\sigma_{13} = 0, \sigma_{33} = 0, D_3 [[u_3]] = -\varepsilon_a [[\varphi]], x_1 \in M, \quad (4)$$

де σ_{ij} , D_i , u_i , φ — механічні напруження, електрична індукція, переміщення та електричний потенціал відповідно; $\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0$; ε_r — відносна електрична проникність; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Символ $[[\cdot]]$ тут і надалі означає стрибок відповідної функції на межі поділу матеріалів.

Відповідно до методики [6] основні характеристики електромеханічного поля на межі поділу матеріалів можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, 0) + m_{j4} D_3(x_1, 0) + im_{j1} \sigma_{13}(x_1, 0) = \\ = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} n_{j1} [[u_1'(x_1)]] + in_{j3} [[u_3'(x_1)]] + in_{j4} [[\varphi'(x_1)]] = \\ = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \end{aligned} \quad (6)$$

де γ_j , m_{jl} , n_{jl} ($j, l = 1, 3, 4$) — дійсні сталі, які залежать від характеристик матеріалу [6]. При цьому $\gamma_4 = 1$, $m_{41} = 0$, $n_{41} = 0$.

Функції $F_j(z)$ ($j = 1, 3, 4$) є аналітичними у всій комплексній площині за винятком області тріщини. Їх поведінка на нескінченності визначається умовою [6]

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\sigma_{33}^\infty + m_{j4} D_3^\infty + im_{j1} \sigma_{13}^\infty}{1 + \gamma_j}. \quad (7)$$

Слід зазначити, що електропроникна $D_3^+(x_1, 0) = D_3^-(x_1, 0)$, $\varphi^+(x_1, 0) = \varphi^-(x_1, 0)$ та електроізолювана $D_3^+(x_1, 0) = D_3^-(x_1, 0) = 0$ тріщини можуть розглядатися як граничні випадки частково електропроникної тріщини, коли $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ або $\varepsilon_r \rightarrow 0$ відповідно.

Метод розв'язування. Припустимо, що на відкритих берегах тріщини виконується умова

$$D_3^+(x_1, 0) = D_3^-(x_1, 0) = D,$$

де D — деяка дійсна стала.

Тоді, вводячи нову функцію

$$\Phi_j(z) = F_j(z) - \frac{m_{j4} D}{1 + \gamma_j}, \quad j = 1, 3, 4$$

і задовольняючи за допомогою співвідношень (5), (6) граничні умови (3) та перші дві умови (4), отримаємо комбіновану однорідну задачу Діріхле — Рімана:

$$\Phi_k^+(x_1) + \gamma_k \Phi_k^-(x_1) = 0, \quad x_1 \in M; \quad (8)$$

$$\text{Im } \Phi_k^\pm(x_1) = 0, \quad x_1 \in L \quad (9)$$

і задачу Гільберта

$$\Phi_4^+(x_1) + \Phi_4^-(x_1) = 0, \quad x_1 \in M \quad (10)$$

для функцій $\Phi_k(z)$ ($k = 1, 3$) та $\Phi_4(z)$, які є аналітичними у всій комплексній площині за винятком областей $x_1 \in M \cup L$ та $x_1 \in M$ відповідно.

Поведінку функцій $\Phi_j(z)$ на нескінченності, згідно з (7), можна подати як

$$\Phi_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \hat{\sigma}_j - i \hat{\tau}_j, \quad (11)$$

$$\text{де } \hat{\sigma}_j = \frac{\sigma_{33}^\infty + m_{j4} [D_3^\infty - D]}{1 + \gamma_j}, \quad \hat{\tau}_j = -\frac{m_{j1} \sigma_{13}^\infty}{1 + \gamma_j}.$$

Числовий аналіз показав, що $m_{14} = m_{34}$, $m_{11} = -m_{31}$, $\gamma_3 = \gamma_1^{-1}$. Це дає змогу отримати розв'язок задачі (8), (9) у випадку $k = 3$ на основі розв'язку для $k = 1$. Виходячи з цього, розглянемо задачу Діріхле — Рімана (8), (9) тільки для функції $\Phi_1(z)$. Її загальний розв'язок має вигляд [12]

$$\Phi_1(z) = P(z) X_1(z) + Q(z) X_2(z), \quad (12)$$

де

$$P(z) = C_0 + C_1 z, \quad Q(z) = D_0 + D_1 z,$$

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\phi(z)}}{\sqrt{(z-b_1)(z-b_2)}}, \quad X_2(z) = \frac{e^{i\phi(z)}}{\sqrt{(z-b_1)(z-a)}},$$

$$\phi(z) = 2\varepsilon_1 \ln \frac{\sqrt{(b_2-a)(z-b_1)}}{\sqrt{l(z-a) + \sqrt{(a-b_1)(z-b_2)}}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_1, \quad l = b_2 - b_1,$$

причому C_0, C_1, D_0, D_1 є дійсними коефіцієнтами, які визначаються з поведінки функції $\Phi_1(z)$ на нескінченності (11) і мають такий вигляд:

$$C_1 = -\hat{\tau}_1 \cos \beta - \hat{\sigma}_1 \sin \beta, \quad D_1 = \hat{\sigma}_1 \cos \beta - \hat{\tau}_1 \sin \beta,$$

$$C_0 = -\frac{b_1 + b_2}{2} C_1 - \beta_1 D_1, \quad D_0 = \beta_1 C_1 - \frac{a + b_1}{2} D_1,$$

де $\beta = \varepsilon_1 \ln \frac{\lambda}{(1 + \sqrt{1 + \lambda})^2}$, $\beta_1 = \varepsilon_1 \sqrt{l(a - b_2)}$, $\lambda = \frac{b_2 - a}{l}$.

Розв'язок задачі Гільберта (10), враховуючи поведінку функції $\Phi_4(z)$ на нескінченності (11), знайдемо на підставі [13] у вигляді

$$\Phi_4(z) = \frac{\omega_1}{2\sqrt{(z - b_1)(z - a)}} \left(z - \frac{a + b_1}{2} \right), \quad (13)$$

де $\omega_1 = \sigma_{33}^\infty + m_{44}[D_3^\infty - D]$.

Використовуючи розв'язки (12), (13), а також співвідношення (5), (6), отримаємо системи двох лінійних алгебричних рівнянь для визначення механічних напружень, електричної індукції, а також похідних від стрибків переміщень та електричного потенціалу на різних ділянках межі поділу матеріалів:

— для $x_1 \in M$

$$\begin{aligned} n_{11} [[u'_1(x_1)]] + in_{13} [[u'_3(x_1)]] + in_{14} [[\varphi'(x_1)]] = \\ = \frac{2\sqrt{\alpha} e^{i\phi(x_1)}}{\sqrt{x_1 - b_1}} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b_2 - x_1}} - \frac{iQ(x_1)}{\sqrt{a - x_1}} \right], \\ n_{43} [[u'_3(x_1)]] + n_{44} [[\varphi'(x_1)]] = \\ = -\frac{\omega_1}{\sqrt{(x_1 - b_1)(a - x_1)}} \left(x_1 - \frac{a + b_1}{2} \right); \end{aligned} \quad (14)$$

— для $x_1 \in L$

$$\begin{aligned} [[u'_1(x_1)]] = \frac{2}{n_{11}\sqrt{x_1 - b_1}} \left[\frac{P(x_1)ch\tilde{\phi}(x_1)}{\sqrt{b_2 - x_1}} + \frac{Q(x_1)sh\tilde{\phi}(x_1)}{\sqrt{x_1 - a}} \right], \\ \sigma_{33}(x_1, 0) + m_{14}D_3(x_1, 0) = \frac{P(x_1)(e^{\tilde{\phi}(x_1)} - \gamma_1 e^{-\tilde{\phi}(x_1)})}{\sqrt{(x_1 - b_1)(b_2 - x_1)}} + \\ + \frac{Q(x_1)(e^{\tilde{\phi}(x_1)} + \gamma_1 e^{-\tilde{\phi}(x_1)})}{\sqrt{(x_1 - b_1)(x_1 - a)}} + m_{14}D, \\ \sigma_{33}(x_1, 0) + m_{44}D_3(x_1, 0) = \\ = \frac{\omega_1}{\sqrt{(x_1 - b_1)(x_1 - a)}} \left(x_1 - \frac{a + b_1}{2} \right) + m_{44}D; \end{aligned} \quad (15)$$

— для $x_1 > b_2$

$$\sigma_{33}(x_1, 0) + m_{14}D_3(x_1, 0) + im_{11}\sigma_{13}(x_1, 0) =$$

$$\begin{aligned} = \frac{(1 + \gamma_1)e^{i\phi(x_1)}}{\sqrt{x_1 - b_1}} \left[\frac{iP(x_1)}{\sqrt{x_1 - b_2}} + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1 - a}} \right] + m_{14}D, \\ \sigma_{33}(x_1, 0) + m_{44}D_3(x_1, 0) = \\ = \frac{\omega_1}{\sqrt{(x_1 - b_1)(x_1 - a)}} \left(x_1 - \frac{a + b_1}{2} \right) + m_{44}D, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\phi^*(x_1) = 2\varepsilon_1 \ln \frac{\sqrt{(b_2 - a)(x_1 - b_1)}}{\sqrt{l(a - x_1) + \sqrt{(a - b_1)(b_2 - x_1)}}},$$

$$\tilde{\phi}(x_1) = 2\varepsilon_1 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(a - b_1)(b_2 - x_1)}{l(x_1 - a)}}, \quad \alpha = \frac{(1 + \gamma_1)^2}{4\gamma_1}.$$

Співвідношення (14) дають можливість записати асимптотичні вирази для похідних від стрибків переміщення та електричного потенціалу при $x_1 \rightarrow a - 0$ у такій формі:

$$[[u'_3(x_1)]] = \frac{n_{14}\omega_1(a - b_1) - 4\sqrt{\alpha}n_{44}Q(a)}{2\Delta_\Theta \sqrt{(a - x_1)(a - b_1)}},$$

$$[[\varphi'(x_1)]] = -\frac{n_{13}\omega_1(a - b_1) - 4\sqrt{\alpha}n_{43}Q(a)}{2\Delta_\Theta \sqrt{(a - x_1)(a - b_1)}},$$

де $\Delta_\Theta = n_{13}n_{44} - n_{43}n_{14}$.

Інтегруючи останні вирази і беручи до уваги останню з умов (4), отримаємо вираз для нормальної складової вектора електричної індукції при $x_1 \in M$:

$$D = \frac{\varepsilon_a(n_{13}\sqrt{\gamma_1(1 - \lambda)}\omega_1 + 2\varepsilon_1 n_{43}\omega_2 - n_{43}\sqrt{1 - \lambda}\omega_3)}{n_{14}\sqrt{\gamma_1(1 - \lambda)}\omega_1 + 2\varepsilon_1 n_{44}\omega_2 - n_{44}\sqrt{1 - \lambda}\omega_3},$$

де

$$\omega_2 = (\sigma_{33}^\infty + m_{14}[D_3^\infty - D])\sin \beta - m_{11}\sigma_{13}^\infty \cos \beta,$$

$$\omega_3 = (\sigma_{33}^\infty + m_{14}[D_3^\infty - D])\cos \beta + m_{11}\sigma_{13}^\infty \sin \beta.$$

Оскільки ω_1, ω_2 та ω_3 лінійно залежать від D , останнє співвідношення можна подати у вигляді квадратного рівняння

$$\eta_1 D^2 + \eta_2 D + \eta_3 = 0, \quad (17)$$

де

$$\eta_1 = m_{14}n_{44}(\sqrt{1 - \lambda} \cos \beta - 2\varepsilon_1 \sin \beta) - m_{44}n_{14}\sqrt{\gamma_1(1 - \lambda)},$$

$$\eta_2 = (n_{14}\chi_1 + \varepsilon_a m_{44}n_{13})\sqrt{\gamma_1(1 - \lambda)} - n_{44}(\sqrt{1 - \lambda}\chi_3 - 2\varepsilon_1\chi_2) -$$

$$- \varepsilon_a m_{14}n_{43}(\sqrt{1 - \lambda} \cos \beta - 2\varepsilon_1 \sin \beta),$$

$$\eta_3 = \varepsilon_a n_{43}(\sqrt{1 - \lambda}\chi_3 - 2\varepsilon_1\chi_2) - \varepsilon_a n_{13}\chi_1\sqrt{\gamma_1(1 - \lambda)},$$

$$\chi_1 = \sigma_{33}^\infty + m_{44}D_3^\infty,$$

$$\chi_2 = (\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty)\sin \beta - m_{11}\sigma_{13}^\infty \cos \beta,$$

$$\chi_3 = (\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty)\cos \beta + m_{11}\sigma_{13}^\infty \sin \beta.$$

Як показує числовий аналіз, лише один з коренів рівняння (17) фізично коректний, і саме він однозначно визначає значення сталої D .

Введемо далі такі коефіцієнти інтенсивності напружень та електричної індукції:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \sigma_{33}(x_1, 0), \\ K_2 &= \lim_{x_1 \rightarrow b_2+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b_2)} \sigma_{13}(x_1, 0), \\ K_4 &= \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} D_3(x_1, 0). \end{aligned} \quad (18)$$

Перейшовши у виразах (15) до граничних значень при $x_1 \rightarrow a + 0$, а у виразах (16) — до граничних значень при $x_1 \rightarrow b_2 + 0$ і скориставшись (18), отримаємо:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{m_{44} - m_{14}} \sqrt{\frac{\pi l}{2\alpha}} \left\{ m_{44} (\omega_3 \sqrt{1-\lambda} - 2\varepsilon_1 \omega_2) - \right. \\ &\quad \left. - m_{14} \sqrt{\alpha(1-\lambda)} \omega_1 \right\}, \\ K_2 &= -\frac{1}{m_{11}} \sqrt{\frac{\pi l}{2}} [\omega_2 + 2\varepsilon_1 \omega_3 \sqrt{1-\lambda}], \\ K_4 &= -\frac{1}{m_{44} - m_{14}} \sqrt{\frac{\pi l}{2\alpha}} \left\{ \omega_3 \sqrt{1-\lambda} - 2\varepsilon_1 \omega_2 - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\alpha(1-\lambda)} \omega_1 \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Вирази для напружень та електричної індукції, а також для стрибків переміщень та електричного потенціалу в околі правої вершини тріщини за допомогою коефіцієнтів K_1 , K_2 та K_4 подамо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}(x_1, 0) &= \frac{K_2}{\sqrt{2\pi(x_1 - b_2)}}, \quad \sigma_{33}(x_1, 0) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x_1 - a)}}, \\ D_3(x_1, 0) &= \frac{K_4}{\sqrt{2\pi(x_1 - a)}}, \\ [[u_1(x_1)]] &= \sqrt{\frac{2(b_2 - x_1)}{\pi}} \Theta_{22} K_2, \\ [[u_3(x_1)]] &= \sqrt{\frac{2(a - x_1)}{\pi}} \{\Theta_{11} K_1 + \Theta_{14} K_4\}, \\ [[\varphi(x_1)]] &= \sqrt{\frac{2(a - x_1)}{\pi}} \{\Theta_{41} K_1 + \Theta_{44} K_4\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \Theta_{11} &= (n_{44} \sqrt{\alpha/\gamma_1} - n_{14}) / \Delta_\Theta, \quad \Theta_{22} = -\frac{2m_{11}}{n_{11}(1 + \gamma_1)}, \\ \Theta_{14} &= \frac{m_{14} n_{44} \sqrt{\alpha/\gamma_1} - m_{44} n_{14}}{\Delta_\Theta}, \quad \Theta_{41} = \frac{n_{13} - n_{43} \sqrt{\alpha/\gamma_1}}{\Delta_\Theta}, \\ \Theta_{44} &= \frac{(m_{44} n_{13} - m_{14} n_{43} \sqrt{\alpha/\gamma_1})}{\Delta_\Theta}. \end{aligned}$$

Швидкість вивільнення енергії для правої вершини частково електропроникної тріщини можна подати так [14]:

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_a^{a+\Delta l} \sigma_{33}(\tau, 0) [[u_3(\tau - \Delta l)]] d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_a^{a+\Delta l} D_3(\tau, 0) [[\varphi(\tau - \Delta l)]] d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{b_2}^{b_2+\Delta l} \sigma_{13}(\tau, 0) [[u_1(\tau - \Delta l)]] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Підставляючи вирази (20) у формулу (21) і обчислюючи відповідні інтеграли, отримаємо

$$G = \frac{1}{4} [\Theta_{11} K_1^2 + \Theta_{22} K_2^2 + \Theta_{44} K_4^2 + (\Theta_{14} + \Theta_{41}) K_1 K_4].$$

Отримані вище результати справедливі для довільного розташування точки a або параметра $\lambda = (b_2 - a)/l$, який визначає відносну довжину зони контакту. Для визначення реального значення цього параметра ($\lambda = \lambda_0$) потрібно, щоб виконувалися такі умови [1]:

$$\sigma_{33}(x_1, 0) \leq 0 \text{ для } x_1 \in L, \quad [[u_3]] > 0 \text{ для } x_1 \in M.$$

Чисельно-аналітичний аналіз показує [6], що обидві ці умови виконуються, якщо λ максимальний корінь з проміжку (0,1) рівняння

$$K_1 = 0. \quad (22)$$

Використовуючи формулу (19), рівняння (22) можна записати у вигляді

$$\omega_3 - \sqrt{\alpha} \frac{m_{14}}{m_{44}} \omega_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{1-\lambda}} \omega_2. \quad (23)$$

Рівняння (23) в загальному випадку розв'язується чисельно. Однак слід зазначити, що для реальних п'єзокерамічних матеріалів значення λ_0 дуже мале і визначити його числовими методами дуже складно. Тому при $\lambda_0 \ll 1$, вважаючи $1 + \lambda_0 \approx 1$, отримаємо таку асимптотичну формулу:

$$\lambda_0^{(asym)} = 4 \exp \left(\frac{1}{\varepsilon_1} [\psi - (-1)^n \arcsin(\zeta) - \pi n] \right),$$

$$\text{де } \cos \psi = (2\varepsilon_1 \hat{\sigma}_1 + \hat{\tau}_1) / \tilde{\Delta}, \quad \sin \psi = (\hat{\sigma}_1 - 2\varepsilon_1 \hat{\tau}_1) / \tilde{\Delta},$$

$$\zeta = \sqrt{\alpha} \frac{m_{14} \omega_1}{m_{44} \tilde{\Delta}}, \quad \tilde{\Delta} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1 (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\tau}_1^2)}, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = 1 + 4\varepsilon_1^2, \text{ а ціле}$$

число n слід вибирати так, щоб $\lambda_0^{(asym)}$ було максимально можливим значенням з проміжку (0, 1).

Аналіз результатів. Для ілюстрації отриманих результатів було проведено числові розрахунки для біматеріального композиту, складеного з п'єзокераміки

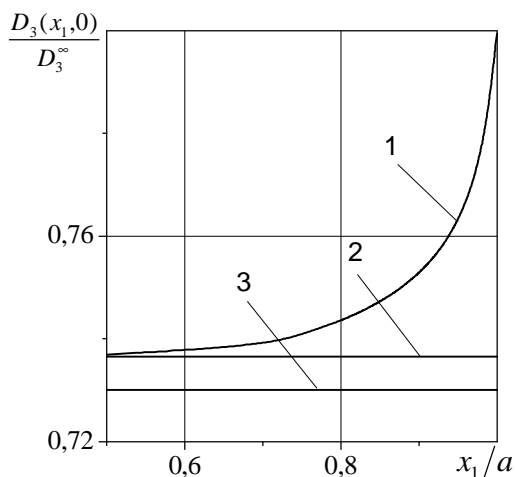


Рис. 2. Розподіл електричної індукції $D_3(x_1,0)$ на відкритих частинах берегів міжфазної тріщини

Таблиця 1

Залежність основних параметрів руйнування від електричної проникності середовища тріщини: $l = 0,02$ м, $D_3^\infty = 0,01$ Кл/м², $\sigma_{33}^\infty = 10$ МПа, $\sigma_{13}^\infty = -20$ МПа

	Електроізолювана тріщина	Частково електропроникна тріщина ($\epsilon_r = 1$)	Електропроникна тріщина
K_{20}	$-0,5072 \cdot 10^7$	$-0,3814 \cdot 10^7$	$-0,3814 \cdot 10^7$
K_{40}	$0,1993 \cdot 10^{-2}$	$0,9606 \cdot 10^{-8}$	$0,8441 \cdot 10^{-8}$
G_0	$0,9982 \cdot 10^{-2}$	$0,1450 \cdot 10^3$	$0,1450 \cdot 10^3$

PZT-5 (верхній матеріал) та PZT-4 (нижній матеріал). Характеристики цих матеріалів наведено в [9]. Розглядалися різні електричні умови: електропроникна тріщина, частково електропроникна тріщина з різними значеннями ϵ_r та електроізолювана тріщина. Слід зазначити, що для фізично реальних заповнювачів тріщини параметр ϵ_r завжди більший або дорівнює одиниці.

На рис. 2 подано розподіл $D_3(x_1,0)$ на відкритих берегах тріщини при $\lambda = 0,01$, $l = 0,02$ м, $\sigma_{33}^\infty = 10$ МПа, $\sigma_{13}^\infty = -20$ МПа, $D_3^\infty = 0,01$ Кл/м². Крива 1 відповідає електропроникній тріщині; 2 — частково електропроникній ($\epsilon_r = 400$); 3 — частково електропроникній ($\epsilon_r = 81$). Для електроізолюваної тріщини нормальна складова вектора електричної індукції при $x_1 \in M$ дорівнює нулю. З отриманих результатів видно, що зі зростанням ϵ_r усі криві наближаються до випадку електропроникної тріщини і лише в досить малому лівому околі точки a між ними спостерігається деяка відмінність. Це підтверджує наше припущення щодо сталого розподілу нормальної складової електричної індукції на відкритих частинах берегів частково електропроникної тріщини.

Для різних видів зовнішнього навантаження в табл. 1, табл. 2 наведено значення основних параметрів руйну-

Залежність основних параметрів руйнування від електричної проникності середовища тріщини: $l = 0,02$ м, $D_3^\infty = 0,01$ Кл/м², $\sigma_{33}^\infty = 10$ МПа, $\sigma_{13}^\infty = -200$ МПа

	Електроізолювана тріщина	Частково електропроникна тріщина ($\epsilon_r = 1$)	Електропроникна тріщина
K_{20}	$-0,3564 \cdot 10^8$	$-0,3548 \cdot 10^8$	$-0,3548 \cdot 10^8$
K_{40}	$0,1993 \cdot 10^{-2}$	$0,1322 \cdot 10^{-5}$	$0,3254 \cdot 10^{-6}$
G_0	$0,1250 \cdot 10^5$	$0,1254 \cdot 10^5$	$0,1254 \cdot 10^5$

вання $K_{20} = K_2(\lambda_0)$, $K_{40} = K_4(\lambda_0)$, $G_0 = G(\lambda_0)$, які знайдено для реальної довжини зони контакту λ_0 . Розмірність усіх фізичних величин подано в системі СІ.

Видно, що електрична проникність середовища тріщини, особливо за малих значень розтягуючих зусиль, істотно впливає на коефіцієнти інтенсивності та швидкість вивільнення енергії. Значення цих параметрів для частково електропроникної тріщини лежать між двома граничними значеннями, які відповідають електропроникній та електроізолюваній тріщинам, і тому не можуть бути замінені одним з цих граничних випадків.

Література

1. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1977. — Vol. 44. — P. 631—636.
2. *Симонов И. В.* Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композитных материалов. — 1985. — 6. — С. 969—976.
3. *Антипов Ю. А.* Трещина на линии раздела между упругими средами с учетом сухого трения // Прикл. математика и механика. — 1995. — 59. — С. 290—306.
4. *Острик В.И., Улитко А.Ф.* Трещина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — 43, №2. — С. 119—126.
5. *Лобода В.В.* Об одном эффекте в теории межфазной трещины // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1989. — 8. — С. 39—43.
6. *Herrmann K.P., Loboda V.V., Govorukha V.B.* On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial // Int. J. Fract. — 2001. — Vol. 111. — P. 203—227.
7. *Говоруха В.Б., Геррманн К.П., Лобода В.В.* Электрически проницаемая трещина с зонами контакта между двумя пьезоэлектрическими материалами // Прикл. механика. — 2008. — 3. — С. 66—74.
8. *Hao T.H., Shen Z.Y.* A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications // Eng. Fract. Mech. — 1994. — 47. — P. 793—802.
9. *Говоруха В.Б.* Дослідження частково електропроникної тріщини на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів // Машинознавство. — 2005. — №1 (91). — С. 12—16.
10. *Govorukha V.B., Loboda V.V., Kamlah M.* On the influence of the electric permeability on an interface crack in

a piezoelectric bimaterial compound // Int. J. Solids Structures. — 2006. — 43. — P. 1979—1990.

Отримана 27.05.09

11. Li Q., Chen Y.H. Solution for a semi-permeable interface crack between two dissimilar piezoelectric material // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 2007. — 74. — P. 833—844.

V. B. Govorukha, V. V. Loboda

An interface crack with a limited electrical permeability in a piezoelectric bimaterial

Dnipropetrovsk National University, Dnipropetrovsk

12. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения // Прикл. математика и механика. — 1988. — 52. — С. 284—293.

The plane strain problem for an interface crack between two bonded piezoelectric semi-infinite spaces under remote electromechanical loading is considered. Mechanically frictionless and electrically permeable contact zone is assumed at the right-hand side crack tip and remaining part of the crack is considered as electrically limited permeable with a certain permeability of the crack medium. This problem is reduced to a combination of combined Dirichlet-Riemann and Hilbert boundary value problems which are solved analytically. Distributions of the electric displacement along the crack region as well as the stress and electric intensity factors and the energy release rate are found for different electromechanical loads and crack permeability.

13. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.

14. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электро-магнитоупругость пьезоэлектрических и электро-проводных тел. — М.: Наука, 1988. — 472 с.

21 01 01 2009

ТРЕТЯ МІЖНАРОДНА КОНФЕРЕНЦІЯ

ДЕФОРМАЦІЯ І РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ І НАНОМАТЕРІАЛІВ DFMN2009

12 — 15 жовтня 2009 р.

Інституті металургії і матеріалознавства ім. А. А. Байкова РАН,
м. Москва, Росія

Тематика конференції:

Загальні закономірності процесів деформації і руйнування конденсуючих середовищ на нано- мікро- і макрорівнях.

Взаємозв'язок фізичних, термофізичних і електрофізичних властивостей матеріалів з процесами деформації і руйнування.

Розробка і оптимізація технологій обробки і виробництва матеріалів, заснованих на процесах пластичної деформації і руйнування.

Нові конструкційні сталі і сплави.

Міцність і пластичність перспективних матеріалів (композиційних і градієнтних матеріалів, покриттів, гетероструктур, фуллеренів, високотемпературних надпровідників, аморфних і наноматеріалів, високоміцних керамік, інтерметаллідів, піноматеріалів і стільникових структур).

Процеси деформації і руйнування в трібосистемах.

Деформація і руйнування будівельних, природних і біомедичних матеріалів.

Оцінка ресурсу деталей машин, механізмів, конструкцій приладів, технології, що дозволяють попередити процеси руйнування, способи боротьби з катастрофічним руйнуванням.

Нові ефективні методи дослідження пластичної деформації і руйнування.

Комп'ютерне моделювання і математичні методи опису структури і механічної поведінки матеріалів.

Контакти:

119991, Росія, Москва, Ленінський прспект 49, ІМЕТ РАН,
Лабораторія міцності і пластичності металевих і композиційних матеріалів і наноматеріалів;

телефони для довідок:

8 (499) 135-44-91, 135-44-77, 135-96-62

+7 (495) 788-55-23

<http://dfmn-imetran.narod.ru>