



площина контакту в процесі деформування залишається плоскою; в процесі деформації по всій області  $S$  відомі напруження:

$$\sigma_{zz} = p(x, y); p \leq 0. \quad (1)$$

При  $z = 0$  в області  $S$ , де  $p < 0$ , відбулося зварювання і зварені ділянки можна розглядати як суцільний метал, а поза областю  $S$  утворюється непровар, який можна розглядати як тріщину. Припустимо, що після закінчення процесу зварювання і зняття прикладеної зовнішньої сили

$$P = \iint_S p(x, y) dx dy \quad \text{може відбуватися руйнування}$$

утвореного з'єднання під дією залишкових напружень розтягу. Очевидно, що таке руйнування відбудеться, якщо коефіцієнт інтенсивності напружень  $K$  досягне критичної величини  $K_c$ , яка залежить від властивостей металу, величини прикладеного тиску  $p(x, y)$  і схеми деформації. Значення  $K_c$  можна визначити експериментально.

У процесі розвантаження, коли  $P > 0$ , область зварювання зменшуватиметься від  $S$  до  $S_c$ . Розглянемо проміжний момент, коли сила  $P$  зменшилася до величини  $P_*$ , а область зварювання рівна  $S_*$ . Напруження в області  $S_*$  подамо у вигляді

$$\sigma_{zz} = p + p_*, \quad (2)$$

де  $p_*$  визначається з умови, що при  $z=0$  в області справджуються такі вирази:

$$W|_{(x,y) \in S_*} = c = const; \sigma_{zz}|_{(x,y) \in S-S_*} = -p; \quad (3)$$

$$P_* = \int_{S_*} (p - p_*) dx dy,$$

де  $W$  — нормальні переміщення.

З (3) видно, що для визначення сили  $P_*$  треба розв'язати контактну задачу теорії пружності для півпростору  $z \leq 0$ ; при  $(x, y) \in S_*$  діє штамп з плоскою межею; сумарна сила, прикладена до штампа, відома; поза штампом в області  $S-S_*$  діють нормальні напруження  $p(x, y)$ .

Припустимо, що область  $S$  є сукупністю кіл радіусом  $b$ , які розташовані періодично в площині  $z=0$ . Завдяки періодичності достатньо визначити напруження під одним штампом. Вибираємо гексагональне розташування штампів і зробимо припущення, що при розвантаженні форма кола не змінюється. Приймаємо, що ці кола мають центри в початку координат і точках:  $r_n = nl$ ;  $\theta_{m,n} = 2\pi m / 6n$ ,  $m=1, 2, 3 \dots 6$ ,  $n=1, 2, \dots$ , а величина сили, яка прикладена до одного кола в кінці процесу зварювання, дорівнює  $P_0$ .

Знайдемо радіус  $a$  зварної плями при умові, що сила, яка прикладена до штампа, дорівнює  $P_0^*$ ; ( $P_0^* < P_0$ ).

У цьому випадку контактна задача полягає у визначенні напружень під штампами з радіусом  $a$  при умові, що до кожного з них прикладена сила  $P_0^*$ , а поза штампами діє додаткове навантаження. Для штампів з центром у початку координат величина діючих там напружень визначається так:

$$\sigma_{zz} = -p \quad \text{при } a \leq r \leq b. \quad (4)$$

Згідно з [2], в таких задачах при визначенні напружень в області  $r < a$  допустимо замінити всі інші штампи з додатковими навантаженнями силами, які прикладені до їхніх центрів. У такому разі для напружень під штампом з центром у початку координат маємо:

$$\sigma_{zz} = \frac{Ec}{\pi(1-\mu^2)\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{P_1^*}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{6n} \frac{\sqrt{l_n^2 - a^2}}{r^2 - 2rl_n \cos(\theta - \theta_{n,m}) + l_n^2} - \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - r^2}} \times \quad (5)$$

$$\times \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho p(\rho, \varphi) \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2} d\rho d\varphi}{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta) + \rho^2}$$

де  $c$  — переміщення штампа;  $l_n = nl$ ;

$$P_1^* = P_0^* - \int_0^{2\pi} \int_a^b r \rho dr d\rho; \quad N — \text{ціле число, що прямує до без-}$$

межності;  $E$  — модуль Юнга;  $\mu$  — коефіцієнт Пуасона.

На підставі формули (5) для середніх за  $\theta$  напружень

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{zz} d\theta \quad \text{можна записати:}$$

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{Ec}{\pi(1-\mu^2)\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{6P_1^*}{\pi\sqrt{a^2-r^2}} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^N n \frac{\sqrt{l_n^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{2}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \int_a^b \rho p_0(\rho) \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2} d\rho}{\rho^2 - r^2}, \quad (6)$$

де  $p_0(\rho)$  — середній за  $\theta$  тиск.

Сталу  $c$  визначимо з умови, що головний вектор прикладених до штампа сил відомий (дорівнює  $P_0^*$ ). Звідси знаходимо

$$\sqrt{a^2 - r^2} \sigma_{zz} = \frac{P_0^*}{2a\pi} + \frac{6P_1^*}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \times$$

$$\times \left( \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} - \frac{\sqrt{l_n^2 - a^2}}{l_n^2 - r^2} \right) + \frac{2}{\pi} \times$$

$$\times \int_a^b \rho p_0(\rho) \left( \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} - \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho^2 - r^2} \right). \quad (7)$$

Прийmemo в подальшому, що  $p_0(\rho) = q = const$ . В такому разі середній за  $\theta$  коефіцієнт інтенсивності напружень  $K = \lim_{r \rightarrow a} \pi \sqrt{r - a} \sigma_{zz}^0$  дорівнюватиме

$$\sqrt{2a} K = \frac{P_0^*}{2a} + \frac{6P_1^*}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{n^2 - \alpha^2}} - \right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n^2 - \alpha^2}}) + qb \left( \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{\pi}{2} \beta \right), \quad (8)$$

де  $\alpha = a/l$ ,  $\beta = a/b$ .

З врахуванням, що в кінці розвантажування  $P_0^* = -\pi a^2 q$ ,  $P_1^* = -\pi b^2 q$ , визначимо кінцевий розмір  $a = r_K$ . Ряд, що входить у (8) при невеликих  $\alpha$  ( $\alpha$  завжди менше 0,5) шляхом розкладання його за степенями  $\alpha$  і підсумування рядів, що виникають, можна записати у такому вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{1}{\alpha} \arctg \frac{\alpha}{\sqrt{n^2 - \alpha^2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \alpha^2}} \right) = f(\alpha) = -0,548\alpha^2 - 0,325\alpha^4 - 0,127\alpha^6. \quad (9)$$

Цікавим є випадок, коли  $r_K = b$ . З (8) витікає, що для цього потрібно, щоб

$$|q| \sqrt{\frac{b}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + 6\alpha f(\alpha) \right]} \leq K_c. \quad (10)$$

Припустимо, що контакт є ідеальним і що напруження  $\sigma$  розподіляються в площині  $z=0$  рівномірно. З врахуванням, що в нашому випадку між  $q$  і  $\sigma$  існує

залежність  $|q| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma}{\pi \alpha^2}$ , замість умови (10) запишемо

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{2}} \sqrt{l} \sigma \left[ \frac{0,5\pi + 6\alpha f(\alpha)}{\alpha^{1,5}} \right] \leq K_c. \quad (11)$$

У праці [7] показано, що між розмірами тимчасової площі контакту  $S(t)$  і максимальним її значенням  $S_m$  існує наближена залежність

$$\frac{S(t)}{S_m} \approx 1 - e^{-x}; \quad x = \frac{4\sigma}{3\sigma_{0,2}}. \quad (12)$$

Для нашої моделі контакту маємо:

$$\frac{S(t)}{S_m} = \frac{2\pi\alpha^2}{\sqrt{3}}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{3}(1 - e^{-x})}{2\pi}}. \quad (13)$$

З (11) витікає, що в процесі розвантажування руйнування відбуватися не буде, якщо

$$\sqrt{l} F(\sigma) \leq K_c, \quad (14)$$

де  $F(\sigma) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{2}} \sigma \left[ \frac{0,5\pi + 6\alpha f(\alpha)}{\alpha^{1,5}} \right]$ .

Вираз (14) встановлює залежність між властивостями металів ( $K_c, \sigma_{0,2}$ ), величиною імовірних дефектів ( $l$ ) і можливістю руйнування зварного з'єднання під дією залишкових напружень.

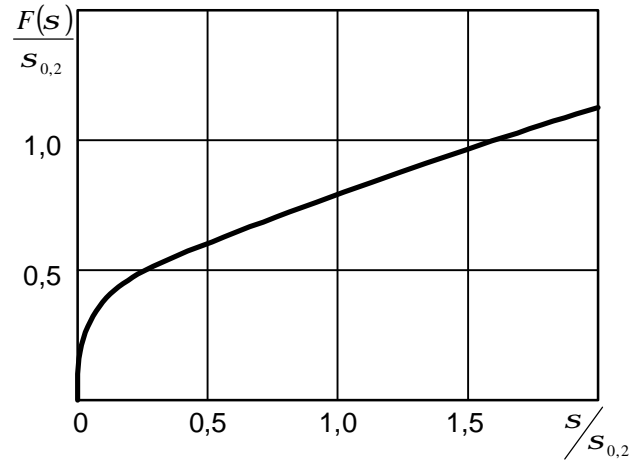


Рис. 2. Графік функції  $F(\sigma)$

Функція  $F(\sigma)$  монотонно зростає (рис. 2), тому

$$F(\sigma_{0,2}) = 0,8\sigma_{0,2}. \quad (15)$$

Небезпека руйнування зварних з'єднань, особливо малопластичних металів, збільшується у зв'язку з тим, що при дії нормальної сили  $P$  на межах плям контакту діаметром  $d_0$  і площею  $S_0$  виникають дотичні напруження  $\tau$ . Величина цих напружень залежить від величини максимального напруження в центрі області контакту і дорівнює [8]:

$$\sigma_{max} = \frac{3P}{2\pi d_0^2}; \quad (16)$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{3} \sigma_{max} (1 - 2\mu). \quad (17)$$

У зв'язку з тим, що  $P = \sigma_S S_0$ , маємо

$$\tau_{max} = 0,12\sigma_S (1 - 2\mu). \quad (18)$$

Величина цих напружень для малопластичних металів з високим значенням межі текучості ( $\sigma_S$ ) і низьким значенням коефіцієнта Пуасона ( $\mu$ ) може перевищувати міцність зварних з'єднань, руйнування відбудеться в процесі деформування.

**Висновки 1.** Залишкові напруження, які виникають при зварюванні тиском в результаті пружно-пластичного деформування, здатні зруйнувати утворені з'єднання.

2. Небезпека крихкого руйнування зварних з'єднань зростає у зв'язку з деформаційним зміцненням зони контакту і наявністю непроварів, які є гострими концентраторами напружень.

3. Запропанована модель утворення зварного з'єднання. Реалізація цієї моделі з використанням математичного апарату механіки руйнування дає змогу оцінити ймовірність руйнування з'єднань залишковими напруженнями в залежності від властивостей металів, наявності в з'єднанні непроварів і їхньої величини та схеми деформування при зварюванні.

## Література

1. Махненко В.И. Перспективы развития математического моделирования и информационных технологий в сварке и родственных процессах // Сб. тр. 1-ой Междунар. конф. «Математическое моделирование и информационные технологии в сварке и родственных процессах» — Киев: Изд. ИЭС им. Е. О. Патона, 2002. — С. 3—11.

2. Palotas B., Konkoly T. Computerized Design of Welding Technologies // IIW Doc. XII-1115-89.

3. Palotas B. Mathematical Modeling of Welding Phenomena // Proc. of 2-nd Int. Conf. «Mathematical Modeling and Information Technologies in Welding and Related Processes» — Kiev: Pub. Paton Electric Welding Inst., 2004. — p. 215—219.

4. Force Characteristics of Resistance Spot Welding in Steels / H.Tang, W.Hou, S.J.Hu, H.Zhang // Welding Journal. — 2000. — №7. — P. 175—183.

5. Sun X., Dong P. Analysis of Aluminum Resistance Spot Welding Processes Using Coupled Finite Element Procedures // Welding Journal. — 2000. — №8. — P.215—221.

6. Галин Л.Ф. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980. — 303 с.

7. Кочергин К.А. Сварка давлением. — Л.: Машиностроение. — 1970. — 215 с.

8. Timoshenko S.P., Goodier I.N. Theory of Elasticity. — New York, McGraw Hill, 1970. — 432 p.

Отримана 06.11.08

M. Bolshakov

**Influence of the residual stresses on fracture of the pressure welded joints**

Lviv Polytechnic National University, Lviv

*The model of the joints formation in pressure welding has been put forward. By the use of the fracture mechanics mathematical methods a problem in welded joints fracture under the action of the residual stresses was solved. It has been shown that the joints of the metals, inclinable to brittle fracture, can be destroyed during unloading. The quantity criterion that associates the possibility of such like fracture with mechanical properties of the metals, welding pressure and the size of a defect (lack of adhesion) has been established.*

---

21 ôîðì àöÿ

## 7th EUROPEAN SOLID MECHANICS CONFERENCE, ESMC7

7 September 2009 — 11 September 2009  
Instituto Superior Tecnico, Lisbon, Portugal

### Conference Topics

#### Continuum Mechanics

General theories; Elasticity; Plasticity; Homogenization & localization; Geomechanics; Micromechanics; Multiscale problems; Multifield problems; Contact mechanics

#### Material Mechanics

Damage and fracture; Fatigue; Viscoelastic materials; Composite materials; Smart materials; Material modelling; Biomaterials

#### Structural Mechanics

Beam structures; Plates & shells; Stability; Structural impact; Composite structures; Reliability and safety; Forming processes; Casting processes; Inverse problems; Biostructures

#### Dynamics

Noise and vibrations; Nonlinear dynamics; Kinematics; Multibody dynamics; Control of structures & mechanisms; Biomechanics of motion

#### Experimental Mechanics

Hybrid techniques; Experimental analysis; Non-destructive control; techniques; Noise and vibration; Instrumentation

#### Computational Mechanics

Finite elements; Boundary elements; Stochastic methods; Meshless methods; Optimization; High performance computing

#### Coupled Problems

Fluid-structures interaction; Thermomechanics; Aeroelastic problems; Earthquake & wind engineering; Magnetomechanical problems; Electromechanical problems

### Contact

Chairperson: Prof. Jorge Ambrosio

Conference Secretariat:

Mrs. Paula Jorge

IDMEC Instituto Superior Técnico

Av. Rovisco Pais 1

1049-001 Lisboa Portugal

Tel: +351 218419044 Fax: +351 218417915

e-mail: [esmcc2009@dem.ist.utl.pt](mailto:esmcc2009@dem.ist.utl.pt)