

О. Гачкевич

Професор, д-р фіз.-мат. наук.
Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів, Україна;
Політехніка Опольська,
м. Ополь, Польща

М. Гачкевич

Ст. наук. співр., канд. фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів, Україна

Є. Ірза

Ст. наук. співр., канд. фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів, Україна

Б. Тріщ

Доцент, канд. фіз.-мат. наук,
Львівський національний
університет імені Івана Франка,
м. Львів, Україна

А. Козіарська

Ад'юнкт, канд. фіз.-мат. наук,
Політехніка Опольська,
м. Ополь, Польща

УДК 539.3

ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ І НАПРУЖЕННЯ В СКЛЯНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБОЛОНКАХ ОБЕРТАННЯ ЗА ОДНОРІДНОГО НАГРІВАННЯ ЗОВНІШНІМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Досліджено температурні поля і напруження в кусково-однорідних скляних оболонках за однорідного нагрівання зовнішнім середовищем стосовно режимів їх термообробки.

термпературні напруження, кусково-однорідні оболонки, температурні поля

У багатьох технологіях термооброблення кусково-однорідних оболонок обертання, виготовлених з матеріалів з близькими тепловими характеристиками, здійснюють нагрівання конвективним способом (при малих коефіцієнтах Біо) за однорідної температури зовнішнього середовища, яка є функцією часу [1 — 3]. З метою розроблення оптимальних режимів за різними критеріями (функціональними і міцнісними) такого нагрівання є важливим аналіз особливостей термопружного стану в областях стику складових частин, в яких виникають найбільші рівні напружень.

Мета статті — дослідити ці особливості з використанням кубічної апроксимації температури за товщиною

координатою в кожній зі складових частин за однорідного нагрівання зовнішнім середовищем.

Постановка задачі і її розв'язок. Розглянемо тонкі кусково-однорідні скляні оболонки. Врахуємо, що для таких оболонок (отриманих за допомогою різних способів з'єднання складових частин) за їх експлуатації при підвищених температурах різниця коефіцієнтів теплового розширення компонентів в околі спаю не повинна перевищувати 10 % [4, 5].

На основі аналізу властивостей (наведених у літературі [4, 6]) з'єднаних скляних матеріалів отримуємо, що їхні коефіцієнти температуропровідності й теплопровідності близькі між собою за величиною.

За модельний елемент нашої оболонки приймемо тонку кусково-однорідну циліндричну оболонку радіуса R , товщини $2h$, що складається з двох різнорідних частин. Нехай внутрішня поверхня такої оболонки теплоізолювана, а на зовнішній задана однорідна змінна в часі температура $t^+(\tau)$. Вважаємо, що температурне поле за товщиною оболонки змінюється за кубічним законом [7], математичний вираз якого в безрозмірних координатах можна записати так:

$$t^{(k)}(x, \gamma, \tau) = \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{a_{10}^2}{R^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{h^2} \right) \frac{\partial^2 T_1^{(k)}}{\partial x^2} + h\gamma \left(\frac{1}{5} - \frac{\gamma^2}{3h^2} \right) \frac{a_{10}^2}{R^2} \frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial x^2} - a_{(k)}^2 h^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{h^2} \right) \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial \tau} - h\gamma a_{(k)}^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{\gamma^2}{3h^2} \right) \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial \tau} + 2 \left(T_1^{(k)} + \frac{\gamma}{h} T_2^{(k)} \right) \right], \quad (1)$$

де $T_1^{(k)} = \frac{1}{2} \int_{-h}^h t^{(k)} d\gamma$, $T_2^{(k)} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \gamma t^{(k)} d\gamma$ —

усереднена за товщиною оболонки температура і температурний «момент», γ — товщинна координата,

$$x = \frac{a_{10}z}{R}, \quad z - \text{осьова координата, } a_{10} = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2},$$

$$a_{(k)} = \frac{\lambda_{(k)}}{c_{(k)}\rho_{(k)}} - \text{коєфіцієнт температуропровідності,}$$

$\lambda_{(k)}$ — коєфіцієнт теплопровідності, $c_{(k)}$ — питома теплоємність, $\rho_{(k)}$ — питома густина, ν — коєфіцієнт Пуасона, $k=1,2$ — індекс, введений для позначення областей однорідності.

При цьому характеристики $T_1^{(k)}$, $T_2^{(k)}$ повинні задовольняти таку систему диференціальних рівнянь [7]:

$$\begin{aligned} & -\frac{a_{10}^2 h^2}{3R^2} \left(\frac{\partial^2 T_1^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial x^2} \right) + \frac{a_{(k)}^2 h^2}{3} \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial \tau} + \\ & + \frac{a_{(k)}^2 h^2}{15} \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial \tau} + T_1^{(k)} + T_2^{(k)} = t^+, \\ & \frac{h^2 a_{10}^2}{R^2} \left(\frac{\partial^2 T_1^{(k)}}{\partial x^2} - \frac{2}{5} \frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial x^2} \right) - a_{(k)}^2 h^2 \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial \tau} + \\ & + \frac{2}{5} a_{(k)}^2 h^2 \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial \tau} + T_2^{(k)} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо при $\tau=0$ $t^+ = t_p$, то з (1), (2) отримаємо такі початкові умови на функції $T_1^{(k)}$, $T_2^{(k)}$:

$$\frac{\partial^2 T_i^{(k)}(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_i^{(k)}(x, 0)}{\partial \tau} = 0, \quad T_2^{(k)}(x, 0) = 0,$$

$$T_1^{(k)}(x, 0) = t_p, \quad i=1,2; \quad k=1,2, \quad (3)$$

Нехай у місці з'єднання різнорідних частин оболонки виконуються умови ідеального теплового контакту, які мають вигляд [3, 7]:

$$\begin{aligned} T_i^{(k)}(x_k - 0, \tau) &= T_i^{(k+1)}(x_k + 0, \tau), \\ \lambda_{(k)} \frac{\partial T_i^{(k)}(x_k - 0, \tau)}{\partial x} &= \lambda_{(k+1)} \frac{\partial T_i^{(k+1)}(x_k + 0, \tau)}{\partial x}, \\ i &= 1,2; \quad k=1, \end{aligned} \quad (4)$$

де x_k — значення координати x у перерізі спряження.

Приймаємо, що граничні перерізи оболонки теплоізовані, тобто виконуються такі умови:

$$\frac{\partial T_i^{(k)}(x_i, \tau)}{\partial x} = 0 \quad (i=1,2; \quad k=1,2). \quad (5)$$

Тут x_i — координата x граничних перерізів.

Тоді для визначення температурного поля $t^{(k)}(x, \gamma, \tau)$ при заданих умовах (3) — (5) на $T_1^{(k)}$, $T_2^{(k)}$ потрібно розв'язати систему рівнянь (2). Розв'язок цієї системи знаходимо різницевим методом, використовуючи неявну різницеву схему подання похідних, а саме [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_i^{(k)}}{\partial x^2} &= \frac{T_{i,n+1}^{(k),m+1} - 2T_{i,n}^{(k),m+1} + T_{i,n-1}^{(k),m+1}}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial T_i^{(k)}}{\partial x} &= \frac{T_{i,n+1}^{(k),m+1} - T_{i,n}^{(k),m+1}}{\Delta x}, \\ \frac{\partial T_i^{(k)}}{\partial \tau} &= \frac{T_{i,n}^{(k),m+1} - T_{i,n}^{(k),m}}{\Delta \tau}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $x_n = n\Delta x$, $0 \leq n \leq N$, $\tau_m = m\Delta \tau$, $0 \leq m \leq M$; Δx , $\Delta \tau$ — кроки сітки за змінними x, τ . Тут N — вибрана кількість вузлів за координатою x , M — кількість вузлів за часовою координатою τ .

Підставляючи (6) у (2), (4), (5) і виконавши відповідні перетворення, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих $T_{i,n-1}^{(k),m+1}$, $T_{i,n}^{(k),m+1}$,

$T_{i,n+1}^{(k),m+1}$, яку розв'язуємо методом прогону [8]. В резуль-

таті отримуємо дискретні значення $T_i^{(k)}$ вздовж оболонки в точках розбиття за поздовжньою координатою x на кожному часовому шарі τ . Використовуючи подання (1), після заміни похідних їхнім різницевим аналогом, отримаємо розподіл температури за товщиною оболонки (в будь-якому перерізі розбиття за x і для довільного часового шару за τ).

Для визначення термонапруженого стану розглянутого модельного елемента скористаємося рівняннями квазі-статичної термопружності при залежних від температури коєфіцієнтах теплового розширення [9] (яку часто вико-

ристовують для опису механічної поведінки скляних оболонкових конструкцій).

Нехай на краях оболонки виконуються умови вільного закріплення, які в зусиллях і моментах запишуться [2, 9] так:

$$N_1^{(k)}(\pm b) = 0, \frac{\partial w^{(k)}(\pm b)}{\partial z} = 0, w^{(k)}(\pm b) = e_t^{(k)}, k = 1; 2, (7)$$

де $\pm b$ – координата z країв оболонки (початок координат розміщений у місці контакту різнорідних оболонок), $N_1^{(k)}$ – осьове зусилля, $w^{(k)}$ – прогин оболонки.

Тоді напружено-деформований стан оболонки характеризується відмінним від нуля зусиллям $N_2^{(k)}$, згинними моментами $M_1^{(k)}$, $M_2^{(k)}$ і компонентами тензора деформації $\varepsilon_1^{(k)}$, $\varepsilon_2^{(k)}$, $\kappa_1^{(k)}$ серединної поверхні. При цьому меридіональні $\sigma_1^{(k)}$ і кільцеві $\sigma_2^{(k)}$ температурні напруження на зовнішній ($\sigma_1^{(k)+}$, $\sigma_2^{(k)+}$) і внутрішній ($\sigma_1^{(k)-}$, $\sigma_2^{(k)-}$) поверхнях оболонки визначаються за формулами [1, 3, 9]:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(k)\pm} &= \mathbf{m} \frac{E^{(k)} h a_{10}^2}{(1-\nu^2) R} \left[\frac{\partial^2 w_0^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu) R}{a_{10}^2 h} e_t^{(k)*} \right] + \\ &+ \frac{E^{(k)}}{1-\nu} \left(e_t^{(k)} \pm e_t^{(k)*} - \Phi^{(k)\pm} \right); \\ \sigma_2^{(k)\pm} &= E_k \left[w_0^{(k)} - e_t^{(k)} \mathbf{m} \frac{a_{10}^2 h}{(1-\nu^2) R} \left(\nu \frac{\partial^2 w_0^{(k)}}{\partial x^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{(1+\nu) R}{a_{10}^2 h} e_t^{(k)*} \right) \right] + \frac{E^{(k)}}{1-\nu} \left(e_t^{(k)} \pm e_t^{(k)*} - \Phi^{(k)\pm} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

де $w_0^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{R}$, $E^{(k)}$ – модуль пружності,

$$e_t^{(k)} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \Phi^{(k)} d\gamma, \quad e_t^{(k)*} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \gamma \Phi^{(k)} d\gamma,$$

$$\Phi^{(k)}(t) = \int_{t_p}^{t_k} \alpha_t^{(k)}(\xi) d\xi, \quad \Phi^{(k)\pm} - \text{значення } \Phi^{(k)}(t) \text{ на}$$

зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки,

$a_{10}^4 = 3(1-\nu^2) R^2 / (4h^2)$ $\alpha_t^{(k)}$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення складових частин оболонки.

Функція прогинів $w_0^{(k)}(x, \tau)$ визначається з ключового рівняння [10]

$$\frac{\partial^4 w_0^{(k)}}{\partial x^4} + 4 \left(w_0^{(k)} - e_t^{(k)} \right) = - \frac{(1+\nu) R}{a_{10}^2 h} \frac{\partial^2 e_t^{(k)*}}{\partial x^2} = 0, \quad (9)$$

яка задовольняє умови на краях оболонки

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0^{(1)}(-b)}{\partial x} = 0, \frac{\partial w_0^{(2)}(b)}{\partial x} = 0, w_0^{(1)}(-b) = e_t^{(1)}, \\ w_0^{(2)}(b) = e_t^{(2)}, \pm b = \frac{a_{10} b}{R} \end{aligned} \quad (10)$$

і умови механічного спряження в місці контакту різнорідних частин оболонки:

$$\begin{aligned} w_0^{(1)}(0) = w_0^{(2)}(0); \\ \frac{\partial w_0^{(1)}(0)}{\partial x} = \frac{\partial w_0^{(2)}(0)}{\partial x}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} \frac{\partial^3 w_0^{(1)}(0)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_0^{(2)}(0)}{\partial x^3},$$

$$\begin{aligned} \frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} \frac{\partial^2 w_0^{(1)}(0)}{\partial x^2} + \left(\frac{E^{(1)}(1+\nu)}{E^{(2)} a_{10}} e_t^{(1)*} - \frac{(1+\nu)}{a_{10}} e_t^{(2)*} \right) \frac{R}{h} = \\ = \frac{\partial^2 w_0^{(2)}(0)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

За відомих значень $e_t^{(k)}$, $e_t^{(k)*}$ розв'язок рівняння (9) при умовах (10) – (11) шукаємо різницевою методом, замінивши похідні їхнім різницевою аналогом, використовуючи такий шаблон [8]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4};$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2\Delta x^3};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad (12)$$

де Δx – крок розбиття за змінною x , $x_n = n\Delta x$, $0 \leq n \leq N$, N – вибрана кількість вузлів за координатою x , i – номер точки розбиття по осі оболонки, що відраховується зліва направо.

Підставляючи (12) у (9) – (11) і виконавши відповідні перетворення, отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь (на кожному часовому шарі $\tau_m = m\Delta\tau$) відносно невідомих значень w_i , яку розв'язуємо ітераційним методом. Тут $0 \leq m \leq M$, $\Delta\tau$ – крок сітки за змінною τ , а M – вибрана кількість вузлів за часовою координатою τ .

У результаті отримуємо дискретні значення $w_0^{(k)}(x, \tau)$ вздовж оболонки в точках розбиття за поздовжньою координатою x на кожному часовому шарі τ_m . Використаємо подання (8), після заміни похідних їхнім різницевою аналогом знайдемо розподіл напружень на поверхнях оболонки (у будь-якому її перерізі розбиття за x і для довільного часового шару за τ).

Зауважимо, що за знехтування зміною температури в осьовому напрямі кубічний закон розподілу температури

за товщиною оболонки (1) і система рівнянь теплопровідності (2) значно спрощуються (отримуються з вищенаведених прирівняння до нуля похідних за x від $T_1^{(k)}, T_2^{(k)}$). Розв'язок такої системи рівнянь для знаходження інтегральних характеристик температури за товщиною оболонки при початкових умовах виду (3) знайдено методом найменших квадратів при скінченноелементній дискретизації закону зміни температури на поверхні за часом [1 – 3, 10] (як раціональнішим з погляду економії машинного часу і пам'яті компютера в порівнянні з різницеvim).

Результати розрахунку і їх аналіз. Числові дослідження проведені для модельного елемента — оболонки радіуса $R = 0,25$ м і товщиною $2h = 0,014$ м, складові частини якої виготовлені з різних типів скла (скло С94-1 і скло С95-3) з такими фізико-механічними характеристиками [1 – 3]: $E^{(1)} = 65,4$ ГПа; $E^{(2)} = 63,3$ ГПа; $\lambda_{(1)} = 1,63$ Вт/мК; $\lambda_{(2)} = 0,74$ Вт/мК; $c_{(1)} = 795$ Дж/кгК; $c_{(2)} = 736$ Дж/кгК; $\rho_{(1)} = 2560$ кг/м³; $\rho_{(2)} = 2800$ кг/м³; $\nu = 0,215$.

Залежність коефіцієнтів лінійного теплового розширення від температури складових частин оболонки наведена на рис. 1 [2, 3, 11].

На рис. 2 показано зміну в часі усереднених температур T_1 з врахуванням теплопередачі в осьовому напрямі (штрихова лінія – 2) і без врахування (суцільна лінія – 1) у приконтатному перерізі різнорідних оболонок при нагріванні температурою $t^+(\tau)$ (за закону зміни її в часі, характерного для термооброблення неоднорідних скляних оболонок [1, 3]) (штрих-пунктирна лінія – 3). Як видно, максимальні відхилення між відповідними значеннями температури складають близько 3 °С.

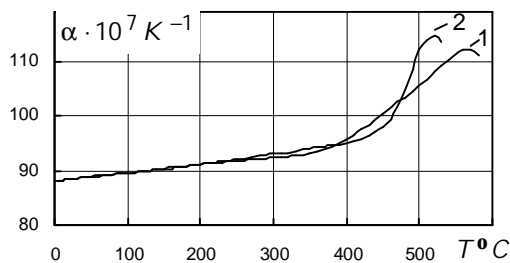


Рис. 1

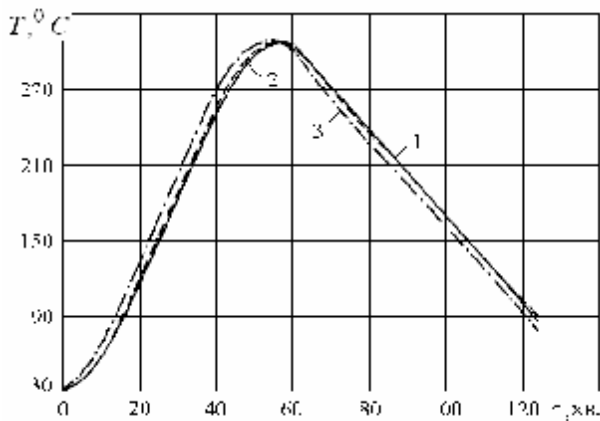


Рис. 2

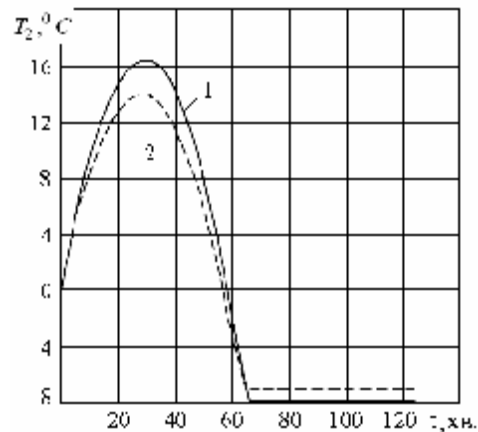


Рис. 3

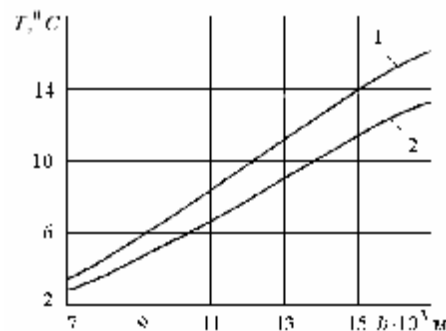


Рис. 4

На рис. 3 наведено зміну в часі температурних моментів T_2 з врахуванням теплопередачі в осьовому напрямі (штрихова лінія – 1) і без врахування (суцільна лінія – 2) у приконтатному перерізі різнорідних оболонок при нагріві температурою $t^+(\tau)$ (проілюстрованою на рис. 2). Як видно, максимальні відхилення між T_2 складають близько 2 °С.

На рис. 4 показано зміну в приконтатному перерізі оболонки максимальних відхилень між величинами T_1 (лінія 1), порашованими з врахуванням теплопередачі в осьовому напрямі і без врахування, та такими самими величинами T_2 (лінія 2) в залежності від товщини оболонки. Аналіз числових розрахунків показав, що зі збільшенням товщини оболонки ці відхилення зростають, а при віддаленні від контактуючого перерізу — зменшуються.

На рис. 5 проілюстровано зміну температури за товщиною оболонки при врахуванні теплопередачі від одної частини оболонки до друглі (лінія — 2) і за її відсутності (лінія — 1) у фіксований момент часу $\tau = \tau_*$ при максимальному градієнті температури $t^+(\tau)$ на зовнішній поверхні оболонки. Максимальна різниця сягає 5 °С.

Виконано розрахунки температури в різних перерізах оболонки приконтатної області. Вони показали, що впливом теплопередачі в осьовому напрямі на зміну температурного поля при віддаленні від контактуючого перерізу можна знехтувати.

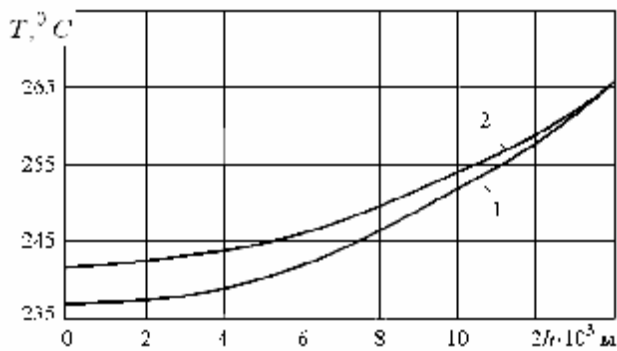


Рис. 5

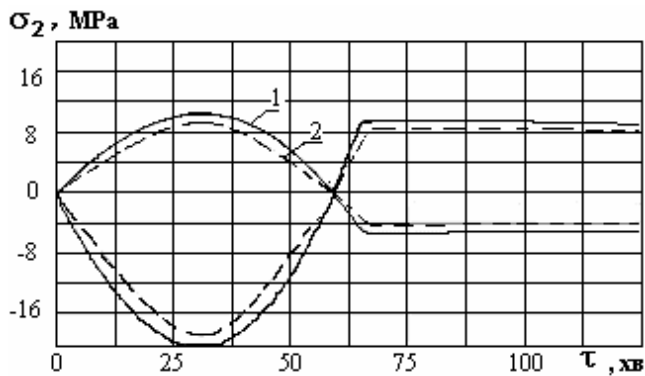


Рис. 6

З числових досліджень напружено-деформованого стану встановлено, що різниця між відповідними напруженнями (знайденими на основі рівнянь незв'язаної квазістатичної термопружності оболонок при залежних від температури коефіцієнтах теплового розширення матеріалу з врахуванням теплопередачі в осьовому напрямі і без врахування) ϵ в межах точності теорії оболонок ($\leq 5\%$). На рис. 6 показано зміну в часі максимальних розрахункових напружень (кільцевих) при врахуванні теплопередачі від однієї частини оболонки до іншої (суцільна лінія) і без такого врахування (штрих-пунктирна лінія) на верхній і нижній поверхні оболонки при нагріванні температурою $t^+(\tau)$, характер зміни якої в часі показано на рис. 2. Зазначимо, що при нагріванні від початкової температури до максимальної температурні напруження розтягу виникають на внутрішній поверхні, а при охолодженні — на зовнішній.

Висновки. Для скляних кусково-однорідних оболонок, які працюють за підвищених температур, при практично всіх реальних їхніх товщинах збуренням температури в околі перерізів спряження можна знехтувати (з точністю прийнятою в теорії оболонок) і задачу теплопровідності розглядати як одномірну, що істотно спрощує отримання розв'язку відповідної задачі термопружності. Ці результати можуть бути використанні

в алгоритмах числової оптимізації режимів технологічного нагрівання зовнішнім середовищем тонких кусково-однорідних скляних оболонок, де потрібне багатократне розв'язування прямих задач.

Література

1. Гачкевич А., Гачкевич Н., Казарян К., Касперский З. Оптимальный технологический нагрев внешней средой и источниками тепла стеклянной кусочно-однородной цилиндрической оболочки сопряженной с конической. Известия НАН Армении (Proceedings of National Academy of Sciences. Mechanics). — 55, №1. — 2002. — С. 40—54.
2. Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Шимура С.Р. Оптиміальні теплові режими ситалоцементного з'єднання оболоноквих конструкцій за врахування термочутливості допустимих напружень // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. — 2008. — Вип. 1. — С. 150—156.
3. Гачкевич А.Р., Гачкевич Н.Г. Оптимальный нагрев внешней средой кусочно-однородных оболочек вращения при наличии внутренних источников тепла. Прикладная механика. — 1995. — Том 31. — №11. — С. 51—57.
4. Стекло. Справочник / Под ред. д. т. н. Н. М. Павлушкина. — М.: Стройиздат, 1973. — 487с.
5. Эспе В. Технология электровакуумных приборов. — М.: Энергия, 1968. — Т. 2. — 448 с.
6. Роус Б. Стекло в электронике. — М.: Советское радио, 1969. — 355 с.
7. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. — К.: Наук. думка, 1979. — 364 с.
8. Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J. Metody numeryczne. — Wyd. 3, Warszawa, WNT 1995. — 384 s.
9. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. — К.: Наук. думка, 1981. — 344 с.
10. Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1983. — 489 с.
11. Барановський В.И., Гусев Б.Н., Иванов В.Н. и др. Производство цветных кинескопов / Под ред. В. И. Барановського. — М.: Энергия, 1978. — 368 с.

Отримана 24.05.09

A. Hachkevych¹, N. Hachkevych¹, E. Irza, M. Trich, A. Koziarska
Temperature fields and stresses in glass piecewise-homogeneous shells of revolution under uniform heating by surroundings

¹Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine;

²Lviv National University, Lviv, Ukraine;

³Politechnika Opolska, Opole, Poland

Temperature fields and stresses in piecewise-homogeneous glass shells under uniform heating by the surroundings has been studied.