Ю. Козуб

Доцент, канд. техн. наук

Г. Козуб

Канд. техн. наук

Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка,
м. Луганськ

УДК 539.3

АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Розглянуто числовий метод аналізу власних частот коливань шаруватих конструкцій з анізотропними шарами. Для моделювання поведінки конструкції розроблено новий шаруватий скінченний елемент.

шаруватий композит, власна частота коливань, метод скінченних елементів

У сучасних машинобудівних, будівельних аерокосмічних конструкціях все ширше застосовують шаруваті композитні матеріали. Анізотропія фізичних властивостей таких матеріалів дає змогу створювати раціональні конструктивні елементи з прогнозованими технологічними параметрами. Як правило, експлуатаційні режими навантаження таких конструкцій є нестаціонарними, зокрема циклічними. Проектування шаруватих конструкцій з анізотропними шарами потребує розроблення методів розв'язування задач динамічного деформування композитів.

На сьогоднішній день розроблено достатньо багато аналітичних і наближених методів розрахунку елементів конструкцій у двовимірній постановці. Ці методи можна поділити на такі, що враховують або не враховують зсувні деформації у шарах.

Для товстих анізотропних пластин, в яких не можна знехтувати зсувними деформаціями, використовують різні теорії зсувного деформування [1 — 4]. Ці теорії відрізняються одна від одної видом функції, що апроксимує зсувні деформації. Аналітичні розв'язки із застосуванням таких теорій обмежуються елементами конструкцій простої геометричної форми.

Розвиток числових методів аналізу напружено-деформованого стану, зокрема методу скінченних елементів, дає можливість уникнути гіпотез, які спрощують постановку задачі. Застосування методу скінченних елементів (МСЕ) у тривимірній постановці дає можливість сформулювати задачу й отримати результат на основі просторової теорії пружності. Для дослідження процесів динамічного деформування конструкцій використовують просторово-часові скінченні елементи з незалежною апроксимацією полів переміщень за просторовими координатами і часом [5, 6]. У шаруватих конструкціях, як правило, товщина кожного шару значно менша від розмірів самої конструкції. Скінченноелементне моделювання поведінки таких конструкцій потребує або густої розрахункової сітки, або розроблення нових скінченних елементів, що описують цілий пакет шарів. Основною вимогою при розробленні шаруватих скінченних елементів є забезпечення неперервності функції переміщень і швидкостей на межі поділу шарів.

Метою цієї статті є розроблення ефективної методики дослідження процесів деформування шаруватих конструкцій на основі методу скінченних елементів у тривимірній постановці.

Постановка і розв'язання задачі. Рівняння руху деформованої конструкції можна вивести на основі принципу Гамільтона:

$$\delta\int_{t^1}^{t_2}\left(U-T-W\right)dt\,, \tag{1}$$

де U — енергія деформування; T — кінетична енергія конструкції; W — робота зовнішніх сил.

У скінченноелементному формулюванні рівняння динаміки конструкцій мають вигляд

$$[M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\}+[C]\frac{\partial}{\partial t}\{u\}+[K]\{u\}=\{P\}, \qquad (2)$$

где M — матриця мас; C — матриця демпфування; K — матриця жорсткості; u — вектор вузлових переміщень; P — вектор вузлових сил.

Переміщення в межах скінченного елемента приймають у вигляді розкладу

$$u_k=\{N_i\}^T\left\{u_k^i\right\}, \qquad (3)$$

де u_k^i — вузлові переміщення; N_i — функції форми.

Для апроксимації поля переміщень по об'єму скінченного шаруватого елемента використовують кусково лінійні функції форми [7]

$$N_i\left(x^1,x^2,x^3\right)=\frac{1}{4}\left(1+x^1_{(i)}x^1\right)\left(1+x^2_{(i)}x^2\right)\varphi_i\left(x^3\right), \qquad (4)$$

де x^j — місцеві координати скінченного елемента.

Для l-го шару апроксимація переміщень здійснюється за допомогою функції

$$\varphi^{(l)\pm}_{(i)}=\frac{\left(\pm x^3 \mp x^{3(l)\mp}_{(i)}\right)}{h_l}, \qquad (5)$$

де h_l — товщина l-го шару.

У межах кожного шару переміщення можна подати у вигляді розкладу за степеневими функціями

$$u_k=\{\psi\}^T\{w_k\}, \qquad (6)$$

де $\psi^{(pqr)}=\frac{\left(x^1\right)^p}{p!}\frac{\left(x^2\right)^q}{q!}\frac{\left(x^3-x_0^{3(k)}\right)^r}{r!}$.

Функції форми та степеневі функції пов'язані співвідношенням

$$\{N\}=[A]\{\psi\}. \qquad (7)$$

Компоненти тензора деформацій також можна подати у вигляді розкладу

$$\varepsilon_{ij}=\left\{e_{ij}\right\}^T\left\{\psi_{(ij)}\right\}, \qquad (8)$$

Подамо коефіцієнти розкладу e_{ij} тензора деформацій ε_{ij}, що входять у (8), через коефіцієнти апроксимації переміщень w_k (6):

$$\left\{e_{ij}\right\}=\left[D_{ij}^k\right]\ \{\omega_k\}. \qquad (9)$$

Закон стану шару приймемо лінійним:

$$\sigma^{ij}=C^{ijnm}\varepsilon_{nm}. \qquad (10)$$

Матрицю жорсткості скінченного елемента обчислимо для початкового моменту часу за формулою

$$[K]=[A]^T\left[D_{ij}^s\right]^T\left[E^{ijkl}\right]\left[D_{kl}^t\right][A], \qquad (11)$$

де

$$\left[E^{ijkl}\right]=\iiint\limits_{V_{CE}}\left[C^{ijkl}\right]\left\{\psi_{(ij)}\right\}\left\{\psi_{(kl)}\right\}^T dv.$$

Матрицю мас обчислимо за формулою

$$[M]=\iiint\limits_{V_{CE}}[A]^T\{\psi\}\rho\{\psi\}^T[A]dv, \qquad (12)$$

де ρ — густина матеріалу.

Матрицю демпфування обчислимо за формулою

$$[C]=\iiint\limits_{V_{CE}}[A]^T\{\psi\}\mu\{\psi\}^T[A]dv, \qquad (13)$$

де μ — коефіцієнт в'язкості.

Для розв'язання задач динаміки використовують різні підходи. Одним з них є метод розкладання функції переміщень за гармонійним функціям. У цьому випадку диференціальні рівняння перетворюються на алгебричні рівняння. Власні частоти коливань конструкції можна отримати як розв'язок рівняння

$$\left([M]\omega^2+[C]\omega+[K]\right)\{u\}=0. \qquad (14)$$

У більшості випадків впливом демпфування на частоти і форми власних коливань можна знехтувати. Тоді рівняння для обчислення власних частот має вигляд

$$\left([M]\omega^2+[K]\right)\{u\}=0. \qquad (15)$$

Для розв'язання повної проблеми власних чисел можна використати різні методи, однак найбільшу практичну цінність мають нижні значення власних частот.

У тих випадках, коли матриця жорсткості має великий порядок, раціональнішим є використання наближених методів обчислення мінімальних власних значень. Одним з таких методів є степеневий алгоритм [8]

$$[K]\left\{u_{(n+1)}\right\}=[M]\left\{u_{(n)}\right\}. \qquad (16)$$

Вектор початкового наближення обирається з врахуванням кінематичних обмежень, що накладено на конструкцію.

Мінімальне власне значення можна отримати завдяки ітераційній процедурі

$$\omega_0^2\approx\omega_{(n)}^2=\frac{\left\{u_{(n)}\right\}^T[K]\left\{u_{(n)}\right\}}{\left\{u_{(n)}\right\}^T[M]\left\{u_{(n)}\right\}}. \qquad (17)$$

При цьому відповідна форма вільних коливань має значення

$$\{u_0\} \approx \{u_{(n)}\}. \qquad (18)$$

Використовуючи М-ортогональність власних векторів, можна скоротити порядок системи рівнянь та обчисли наступне власне значення.

Задача 1. Розглянемо задачу про власні частоти коливань квадратних багатошарових композитних плит ($a \times a$) в умовах шарнірного спирання. Плита складається з ортогонально армованих шаруватих композитів. Задачу розв'яжемо за допущення, що товщина і властивості матеріалу всіх шарів однакові. Фізичні характеристики шарів задовольняють такі співвідношення:

$$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0{,}6; G_{23}/E_2 = 0{,}5; \nu_{12} = \nu_{12} = 0{,}25.$$

Для порівняння результат обчислення подано у безрозмірній формі

$$\varpi = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}.$$

У табл. 1 наведено безрозмірну нижню власну частоту ϖ для плити, що складається з чотирьох шарів з ортогональним армуванням і вкладанням $\left[0^0/90^0/90^0/0^0\right]$ для різних розмірів та різних співвідношень E_1/E_2.

Для порівняння наведені результати інших авторів, отримані на основі теорій зсувного деформування для шаруватих пластин.

У табл. 2 наведені результати розв'язків для тришарової квадратної плити з вкладанням $\left[0^0/90^0/0^0\right]$. Характеристики матеріалу:

$$E_1/E_2 = 25, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0{,}5,$$
$$G_{23}/E_2 = 0{,}2,\ n_{12} = n_{12} = 0{,}25.$$

Таблиця 1

Власні частоти квадратних пластин

Метод	a/h $(E_1/E_2 = 40)$				
	4	10	20	50	100
[9]	9,2870	15,1048	17,6470	18,6720	18,8357
[10]	9,1988	15,07221	17,6369	18,6702	18,8352
[11]	9,6414	15,3849	17,7639	18,6944	18,8414
МСЕ	9,5964	15,6341	17,8321	18,6642	18,8823
	E_1/E_2 $(a/h = 5)$				
	3	10	20	30	40
[9]	6,5146	8,1482	9,4675	10,2733	10,8221
[12]	6,6815	8,2103	9,5603	10,2720	10,7520
[13]	6,5597	8,2718	9,5263	10,2720	10,7897
МСЕ	6,7213	8,5381	9,6892	10,7312	10,9645

Таблиця 2

Власні частоти квадратних пластин

Метод	a/h				
	5	10	20	50	100
[4]	9,090	12,527	14,377	15,081	15,191
[11]	8.414	11,974	14,146	15,036	15,179
МСЕ	9,156	12,634	14,612	15,423	15,232

Висновки. У статті отримано числовий розв'язок задачі власних частот коливання на основі запропонованого просторового скінченного елемента, що моделює поведінку шаруватого композиту. Результати добре узгоджуються з результатами розрахунків за різними теоріям деформування шаруватих плит. При цьому використання запропонованої методики скінченноелементного розв'язування задачі дає змогу уникнути використання різних гіпотез про врахування зсувних деформацій у шарі.

Застосування числової методики не обмежується формою конструкції і не потребує зменшення розмірності задачі, що свідчить про достатню універсальність запропонованого підходу.

Література

1. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. — 1945. — Vol. 12. — P. 69—77.
2. *Lo K.P., Christensen R.M., Wu E.M.* A higher order theory of plate deformation. Pt. I: Homogeneous plate // J. Appl. Mech. — 1977. — Vol. 44. — P. 663—668.
3. *Reddy J.N.* A simple higher order theory for laminated composite plates // J. Appl. Mech. — 1984. — Vol. 51. — P. 745—752.
4. *Khdeir A.A., Reddy J.N.* Free vibrations of laminated composite plates using a second-order shear deformation theory // Computers and Structures. — 1999. — Vol. 71. — P. 617—626.
5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 541с.
6. *Метод* конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / Под общ. ред. Киричевского В.В. — К.: Наук. думка, 2005. — 403 с.
7. *Толок В., Козуб Г., Грибанов В.* Розв'язання задач термопружності шаруватих конструкцій у тривимірній постановці // Машинознавство. — 2007. — №1. — С. 3—7.
8. *Метод* конечных элементов в механике твердых тел / Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др. — К.: Вища шк., 1982. — 480 с.
9. *Kant T., Swaminathan K.* Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory // Composite Structures. — 2001. — Vol. 53. — P. 73—85.
10. *Matsunaga H.* Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order theory // Composite Structures. — 2000. — Vol. 48. — C. 231—244.
11. *Акавчи С.С., Танрикулу А.Н.* Анализ потери устойчивости и свободных колебаний пластин из слоистых композитов на основе двух новых теорий гиперболического сдвигового деформирования // Механика композитных материалов. — 2008. — Т. 44, №2. — С. 217—230.
12. *Noor A.K.* Free vibration of multilayered composite plates // A.I.A.A.J. — 1972. — Vol. 11, No. 7. — P. 1038—1039.
13. *Phan N.D., Reddy J.N.* Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory // Int. J. Numerical Methods in Engineering. — 1985. — Vol. 21. — P. 2201—2219.

Отримана 20.05.09

Yu. Kozub, H. Kozub

The analysis of free vibration of layered anisotropic construction

Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk

The numerical method of analysis of free vibration frequency of laminated construction with anisotropic layers is considered. The new laminated finite element for modeling of behavior of constructions is developed.