УДК 539.3+539.4

ПРУЖНЕ ВКЛЮЧЕННЯ У ПЛАСТИНІ ПІД ДІЄЮ ДВОВІСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ І РІВНОМІРНОГО НАГРІВУ

М. Стадник

Професор, д-р техн. наук,
Національний лісотехнічний
університет України,
м. Львів

На основі математичної моделі тонкого включення задача зведена до розв'язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь. Для еліптичного включення отримано точний розв'язок рівнянь. Виведені формули для визначення напружень у пружному включенні й концентрації напружень у пластині біля нього. Показано, що для тріщини K_I залежить від типу навантаження. Для абсолютно жорсткого включення K_I набуває двох різних значень залежно від того, враховуються чи ні контактні нормальні напруження на кінцях включення.

включення, температура, жорсткість, деформація, напруження

Розглянемо ізотропну пластину з тонким включенням, яке обмежене гладкою кривою, симетричною відносно серединної лінії. Систему декартових координат Oxz розташуємо так, щоб серединна лінія довжиною $2a$ лежала на осі Ox, початок координат помістимо у її центрі, а точки кривої задовольняли рівняння $z = \pm h(x)$. На безмежності пластина розтягується взаємно перпендикулярним двовісним рівномірно розподіленим навантаженням p і q, з яких p — паралельне до осі Oz і зазнає рівномірного нагріву від температури $T^{(1)}$ до $T^{(2)}$. Вважаємо, що на межі середовищ існує жорстке зчеплення й ідеальний тепловий контакт. Задача полягає у визначенні напружень у включенні і концентрації напружень у матриці біля нього. Оскільки, включення вважається тонким (тобто $max\ h << a$; $\rho << a$, ρ — радіус кривини у вершині включення при $z = 0$), то наближений розв'язок задачі (за умови плоскої деформації) зводиться до такої системи інтегродиференціальних рівнянь [1]:

$$\frac{(\mu_1 + \varepsilon d_3)}{\pi d_1 d_4 \varepsilon} \int_{-a}^{a} \frac{[\tilde{u}_z]'_* dt}{t-x} + \frac{\mu_1 d_3 - \varepsilon\kappa}{2\pi d_1 d_4 G_1} \int_{-a}^{a} \frac{[\tilde{\sigma}_{zx}]_* dt}{t-x} +$$

$$+\frac{1}{G_1 h(x)} \int_{-a}^{x} [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \, dt = 2\left(\left(\mu\varepsilon - \mu_1\right) p - \varepsilon d_1 q + \right.$$

$$\left. +2\left(\alpha_1^0 - \alpha_0\right) G_1 T_0\right) / \left(G_1 d_4\right) + A_1; \qquad (1)$$

$$\frac{d_6 - \varepsilon\mu_1 d_3}{\pi\varepsilon d_1} \int_{-a}^{a} \frac{[\tilde{u}_z]'_* dt}{t-x} + \frac{d_3 d_6 + \mu_1 \kappa\varepsilon}{2\pi G_1 d_1} \int_{-a}^{a} \frac{[\tilde{\sigma}_{zx}]_* dt}{t-x} - \frac{2d_4}{h(x)} [\tilde{u}_z]_* =$$

$$= 2\left(p\left(\varepsilon\left(d_1 - \mu_1\right) - d_6\right) + \varepsilon q\left(\mu_1 - \mu\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left(\alpha^0 - \alpha_1^0\right) G_1 T_0\right) / G_1, \; |x| < a, \; z = 0$$

відносно похідної від стрибків зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ і дотичних напружень $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$ берегів тріщини $(-a \le x \le a)$, $z = \pm 0$, на яких діють напруження, знесені з поверхонь включення $z = \pm h(x)$. Тут $\alpha^0 = d_2\alpha$, $\alpha_1^0 = d_5\alpha_1$, $d_1 = (1-\mu)$, $d_2 = 1+\mu$, $d_3 = (1-2\mu)$, $d_4 = (1-\mu_1)$, $d_5 = 1+\mu_1$, $d_6 = 1-2\mu_1$, $\kappa = 3-4\mu$; μ, μ_1 — коефіцієнти Пуасона відповідно для матеріалу пластини і включення; A_1 — довільна стала; $T_0 = T^{(2)} - T^{(1)}$; $\varepsilon = G_1 / G$, G_1, G — відповідно модулі зсуву включення і пластини; α, α_1 —

відповідно коефіцієнти теплового розширення матеріалів пластини та включення; $\tilde{u}_z$, $\tilde{\sigma}_{zx}$ — збурені зміщення і напруження:

$$[u_z]_* = [\tilde{u}_z]_* + \left[u_z^0\right]_*;\ [\sigma_{zx}]_* = [\tilde{\sigma}_{zx}]_* + \left[\sigma_{zx}^0\right]_*, \qquad (2)$$

викликані наявністю у пластині включення; $\left[u_z^0\right]_*$, $\left[\sigma_{zx}^0\right]_*$ — стрибки зміщень і напружень на поверхнях $z = \pm h(x)$ в однорідній пластині. При отриманні рівнянь (1) враховано, що

$$\left(u_x^0\right)_* = u_x^{0+} + u_x^{0-} = x(qd_1 - p\mu)/G + 2x\alpha^0 T_0;$$

$$\left[u_z^0\right]_* = u_z^{0+} - u_z^{0-} = (pd_1 - q\mu)h(x)/G + 2\alpha^0 T_0 h(x);$$

$$\left(\sigma_{zz}^0\right)_* = 2p. \qquad (3)$$

Тут u_x^{0+}, u_x^{0-}, u_z^{0+}, u_z^{0-} — значення зміщень u_x^0, u_z^0 відповідно на поверхнях $z = \pm h(x)$.

У випадку плоского напруженого стану у наведених вище співвідношеннях потрібно відповідно замінити $\mu, \mu_1, \alpha^0, \alpha_1^0$ на $\mu/d_2, \mu_1/d_5, \alpha, \alpha_1$.

Розглянемо випадок еліптичного включення ($x^2/a^2 + z^2/c^2 \le 1$), тобто $h(x) = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Точний розв'язок системи рівнянь (1) знаходимо у вигляді

$$[\tilde{u}_z]_* = C_1\sqrt{a^2 - x^2};\ [\tilde{\sigma}_{zx}]_* = C_2 x/\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad (4)$$

де

$$C_1 = p[(\mu_1 d_3 - 2\lambda d_1 d_4 - \varepsilon\kappa)((d_1 - \mu_1 + \eta(\mu_1 - \mu))\varepsilon - d_6 + 2\left(\alpha^0 - \alpha_1^0\right) G_1 T_0/p) - (d_3 d_6 + \mu_1 \kappa\varepsilon)(\mu\varepsilon - \mu_1 + \eta(d_4 - d_1\varepsilon) + 2\left(\alpha_1^0 - \alpha^0\right)G_1 T_0/p)]/((2d_1 d_4 \varepsilon\left(1 + \lambda^2\right) + \lambda\left(d_6 - 2\mu_1 d_3 \varepsilon + \varepsilon^2\kappa\right))Gd_4);$$

$$(5)$$

$$C_2 = 2p[(\mu_1 + \varepsilon d_3)(\varepsilon(d_1 - \mu_1 + \eta(\mu_1 - \mu)) - d_6 + 2\left(\alpha_0 - \alpha_1^0\right) G_1 T_0/p) - (d_6 - \varepsilon(\mu_1 d_3 - 2\lambda d_1 d_4))(\mu\varepsilon - \mu_1 + \eta(d_4 - d_1\varepsilon) + 2\left(\alpha_1^0 - \alpha^0\right)G_1 T_0/p)]/(d_4\left(2d_1 d_4 \varepsilon\left(1 + \lambda^2\right) + \lambda\left(d_6 - 2\mu_1 d_3 \varepsilon + \varepsilon^2\kappa\right)\right)).$$

Тут $\lambda = a/c$, $\eta = q/p$; $A_1 = 2q/G_1$ — вибрано так, щоб задовольнялись часткові випадки задач: а) для однорідного тіла ($G_1 = G$, $\mu_1 = \mu$, $\alpha_1 = \alpha$) $[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = [\tilde{u}_z]_* = 0$; б) для порожнини ($\varepsilon = 0$) $[\sigma_{zx}]_* = [\tilde{\sigma}_{zx}]_* + \left[\sigma_{zx}^0\right]_* = 0 \ \Rightarrow\ [\tilde{\sigma}_{zx}]_* = -\left[\sigma_{zx}^0\right]_*$; в) для абсолютно жорсткого включення ($\varepsilon \to \infty$, $\alpha_1 = 0$) $[u_z]_* = [\tilde{u}_z]_* + \left[u_z^0\right]_* = 0 \ \Rightarrow\ [\tilde{u}_z]_* = -\left[u_z^0\right]_*$.

Напруження у включенні, виходячи з [1] і розв'язку (4), будуть такими:

$$\sigma_{zz} = p - GC_1/(2d_1) + d_3 C_2/(4d_1);$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2h(x)}\int_{-a}^{x}[\sigma_{zx}]_* dx = q + C_2\lambda/2,$$

$$|x| \le a,\ |z| \le h(x). \qquad (6)$$

Якщо $G_1 = G$, $\mu_1 = \mu$, $\alpha_1 = \alpha$, то з подань (5), (6) отримаємо, що $\sigma_{zz} = p$, $\sigma_{xx} = q$; для порожнини $(G_1 = 0)$ $\sigma_{zz} = \tilde{\sigma}_{zz} + p = 0$; $\sigma_{xx} = \tilde{\sigma}_{xx} + q = 0$; для $G_1 \to \infty$, $\alpha_1 = 0$

$$\sigma_{zz} = \left[pd_1(\lambda(3 - 2\mu) + 2d_1 - \eta(2\mu - d_3\lambda)) + GT_0\alpha^0(2d_1 + \lambda d_3)\right]/(\lambda\kappa)$$

$$\sigma_{xx} = \left[pd_1(d_3 - 2\lambda\mu + \eta(3 - 2\mu + 2\lambda d_1)) + 2GT_0\alpha^0(d_3 + 2\lambda d_1)\right]/\kappa,\ |x| \le a. \qquad (7)$$

Якщо у (7) покласти $p = q, \lambda = 1$, що відповідає круговому включенню, то отримаємо $\sigma_{zz} = \sigma_{xx}$. Це показує, що для такого типу навантаження пластини формули (6), (7) справедливі і для товстого ($c \sim a$) включення. Вони збігаються при $T_0 = 0$ з точним розв'язком [2], оскільки математична модель тонкого включення [1], для заданого типу навантаження, точно описує зв'язок між напруженнями і деформацією у включенні.

Розподіл напружень у пластині біля вершин включення задається поданням [1]

$$\sigma_{zz} = 2(\rho + l)K_I/\sqrt{\pi(\rho + 2l)^3} + \rho\sqrt{\rho}\tilde{\sigma}_{xx}/\sqrt{(\rho + 2l)^3} + p,$$

$$z = 0,\ 0 \le l, \rho << a; \qquad (8)$$

$$K_I = -\lim_{l \to -0}\sqrt{-2\pi l}\left(G[\tilde{u}_z]'_* + d_3[\tilde{\sigma}_{zx}]_*/2\right)/(2d_1),$$

де $\rho = c^2/a = c/\lambda$ — радіус заокруглення вершин включення в точках $x = \pm a$; $\tilde{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} - q$, $l = x - a$; $\tilde{\sigma}_{xx}$ — торцьові (контактні) напруження в точках $x = \pm a$; K_I — коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) для тріщини $(\varepsilon = 0, |x| \le a)$, на поверхнях якої $z = \pm 0$ діють напруження, знесені з берегів включення $z = \pm h(x)$.

Розглянемо детальніше КІН K_I. На основі співвідношень (4), (5), (8) отримуємо формулу

$$K_I = \sqrt{\pi a}(2GC_1 - d_3 C_2)/(4d_1) \qquad (9)$$

для визначення K_I через C_1 і C_2. Якщо у цій формулі покласти $c \to 0$, то, згідно з (5), маємо, що $K_I = 0$ для пружного ($0 < \varepsilon < \infty$) лінійного ($c = 0$) включення.

У випадку абсолютно жорсткого $(\varepsilon \to \infty)$ лінійного ($c \to 0$) включення, згідно з поданнями (5), (9), отримуємо співвідношення

$$K_I = \sqrt{\pi a}d_3\left(p(\mu - \eta d_1) - 2GT_0\alpha^0\right)/\kappa, \qquad (10)$$

яке при $T_0 = 0$ збігається з результатом [3] для КІН k_I, враховуючи, що між K_I і k_I існує залежність $K_I = d_3\sqrt{\pi}k_I/\kappa$.

Поклавши у виразі (8) $l=0$, матимемо

$$\tilde{\sigma}_{zz}=2K_I^{(1)}\big/\sqrt{\pi\rho}\ ,\qquad (11)$$

де

$$K_I^{(1)}=\sqrt{\pi\rho}\ \tilde{\sigma}_{zz}/2=K_I+\sqrt{\pi\rho}\,\tilde{\sigma}_{xx}/2\qquad (12)$$

— коефіцієнт інтенсивності напружень, який, на відміну від K_I, враховує дію торцьових контактних напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$ у точках $(\pm a,0)$; $\tilde{\sigma}_{zz}$ — коефіцієнт концентрації збуреного поля напружень у пластині в точках $(\pm a,0)$.

Підставивши $\tilde{\sigma}_{xx}$ і K_I з виразів (7), (10) у співвідношення (12) і перейшовши до границі $c\to 0$, отримаємо інше подання

$$K_I^{(1)}=\mu\sqrt{\pi a}\left(p(-\mu+d_1\eta)+2GT_0\alpha^0\right)/\kappa\qquad (13)$$

для обчислення КІН у випадку абсолютно жорсткого лінійного включення.

Порівнюючи значення КІН, що дають формули (10) і (13), бачимо, що $K_I^{(1)}\neq K_I$. Це зумовлено тим, що подання (10), яке, зокрема, можна також отримати з формули $K_I=\lim\limits_{(\varepsilon\to\infty,\rho\to 0,l\to 0)}\sqrt{2\pi l}\sigma_{zz}$, отримують переходом до границі таким способом, що спочатку $\varepsilon\to\infty$, потім $\rho\to 0$ і вкінці $l\to 0$. Співвідношення (13) отримане з формули (12), тобто $K_I^{(1)}=\lim\limits_{(\varepsilon\to 0,\rho\to\infty,l\to 0)}\sqrt{2\pi l}\tilde{\sigma}_{zz}/2$, у якій перехід до границі зроблено так: спочатку $l\to 0$, потім $\varepsilon\to\infty$ і тоді $\rho\to 0$. Таким чином, значення КІН, як границі концентрації напружень $\tilde{\sigma}_{zz}$, залежить від способу її отримання. Це означає, що така границя не існує, тобто КІН для лінійного абсолютно жорсткого включення може набувати два різні значення.

У випадку тріщини ($\varepsilon=0$, $\rho\to 0$, $\tilde{\sigma}_{xx}=-q$), як це випливає з виразу (12), $K_I^{(1)}=K_I$. Однак, ця рівність справедлива лише за умови, що тріщина після навантаження пластини не змінюється, тобто вона залишається лінійною ($\rho=0$).

Якщо $\varepsilon\to 0$, то згідно подань (4), (5) отримаємо співвідношення

$$[\tilde{u}_z]_*=(2pd_1-qcd_3/a)\sqrt{a^2-x^2}/G\,;$$

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_*=-2qcx/\left(a\sqrt{a^2-x^2}\right),\ |x|\le a\,,\qquad (14)$$

що виражають стрибки зміщень і напружень берегів тріщини $z=\pm 0$, на яких діють напруження, знесені з поверхонь $z=\pm h(x)$ еліптичної порожнини. Зі співвідношень (2), (4), (14) випливає, що $[\sigma_{zx}]_*=0$, незалежно від величини *c*, оскільки $[\sigma_{zx}^0]_*=2cqx/\left(a\sqrt{a^2-x^2}\right)$, тобто виконується умова відсутності на берегах еліптичної порожнини повного стрибка дотичних напружень $[\sigma_{zx}]_*$.

Аналіз виразів (14) для тріщини ($c=0$) показує, що коли вважати форму тріщини незмінною і після навантаження пластини, то $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*=0$ для довільного q, а $[\tilde{u}_z]_*$ не залежить від q. Однак $c=0$ лише тоді, коли $p=0$. Якщо $p>0$, то береги тріщини розходяться, тобто $c\neq 0$. У цьому випадку стрибок переміщень $[\tilde{u}_z]_*$, згідно з (14), стає залежним від q, а $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*\neq 0$, якщо $q\neq 0$.

Поклавши у співвідношенні (8) $l=0$ і підставивши у нього вирази (4), отримуємо подання

$$\sigma_{zz}=\lambda(2GC_1+\mu C_2)/(2d_1)+p\qquad (15)$$

для обчислення концентрації напружень у матриці біля пружного ($0\le\varepsilon<\infty$) включення. Бачимо, що для однорідної пластини $\sigma_{zz}=p$, для пластини з еліптичною порожниною ($\varepsilon=0$)

$$\sigma_{zz}=2\lambda p-q+p\,,\qquad (16)$$

а для пластини з абсолютно жорстким еліптичним включенням ($\varepsilon\to\infty$, $\alpha_1=0$)

$$\sigma_{zz}=p-p\left(2\mu^2\lambda+\kappa-\mu d_3\right)/\kappa+q\mu\left(2\lambda d_1^2+\kappa-\mu d_3\right)/(\kappa d_1)+$$
$$+2\alpha^0GT_0\left(\mu d_3-\kappa+2\lambda\mu d_1\right)/(d_1\kappa)\qquad (17)$$

Ілюстрація зміни концентрації напружень σ_{zz}/p від деяких значень параметрів $\varepsilon,\lambda,\eta,\mu,\mu_1,T_0=0$ (згідно з формулами (5), (15)) наведена у табл. 1 і табл. 2. Перші два рядки в обох таблицях обчислено за умови, що $\mu=\mu_1=0{,}3$; треті і четверті рядки — $\mu=0{,}3,\mu_1=0{,}05$; п'яті та шості рядки — $\mu=0{,}05$, $\mu_1=0{,}3$.

Аналіз даних у таблицях показує, зокрема, що коефіцієнти Пуасона μ та μ_1 істотно впливають на величину σ_{zz}/p.

Спрямувавши у рівності (15) $\lambda\to\infty$, отримаємо

$$\sigma_{zz}=p\ \left(d_4^2-(\mu_1-\varepsilon\mu)^2\right)/(d_1d_4\varepsilon)-q(\mu_1-\varepsilon\mu)/d_4+$$

Таблиця 1

Результати розрахунків ($\eta=0$)

λ	ε						
	0,1	0,5	1	5	10	100	∞
4	4,82	1,78	1	0,07	$\frac{-1,2}{10}$	$\frac{-3,1}{10}$	$\frac{-3,7}{10}$
10	6,43	1,86	1	$\frac{-0,8}{10}$	$\frac{-3,9}{10}$	$\frac{-8,6}{10}$	$\frac{-8,7}{10}$
4	5,65	2,22	1,21	0,08	$\frac{-1,1}{10}$	$\frac{-3,1}{10}$	$\frac{-3,7}{10}$
10	8,49	2,47	1,24	$\frac{-0,8}{10}$	$\frac{-3,9}{10}$	$\frac{-8,6}{10}$	$\frac{-8,7}{10}$
4	4,08	1,30	0,71	0,17	0,09	0,02	0,01
10	5,04	1,28	0,68	0,15	0,08	0,01	$\frac{-0,2}{100}$

Таблиця 2

Результати розрахунків $(\eta = 1)$

λ	ε						
	0,1	0,5	1	5	10	100	∞
4	4,11	1,50	1	0,83	0,89	0,99	1
10	5,85	1,61	1	0,98	1,22	1,71	1,8
4	5,07	2,18	1,42	0,90	0,91	0,99	1
10	8,10	2,50	1,48	0,99	1,17	1,69	1,8
4	3,39	0,89	0,43	0,17	0,17	0,19	0,21
10	4,46	0,87	0,35	0,13	0,20	0,36	0,41

$$+2GT_0\left(\alpha^0 - \alpha_1^0\right)(\varepsilon\mu - 1)/(d_1 d_4) \tag{18}$$

для обчислення величини концентрації напружень у пластині в точках $x = \pm a \pm 0$ біля лінійного пружного $(0 \le \varepsilon < \infty)$ включення. Якщо $\varepsilon \to 0$, $p > 0$, то $\sigma_{zz} \to +\infty$, тобто маємо сингулярність фізичного типу $1/\varepsilon$. За умови, що $\varepsilon \to \infty$, $p > 0$, $q = 0$, $T_0 = 0$ $\sigma_{zz} \to -\infty$, а якщо $\varepsilon \to \infty$, $p = 0$, $T_0 = 0$, $q > 0$, то $\sigma_{zz} \to +\infty$ і маємо сингулярність типу ε. Якщо $q = p\mu / d_1$, то $\sigma_{zz} = 0$ при $\varepsilon \to \infty$, $T_0 = 0$.

Частковий випадок задачі. Припустимо, що у пластині під дією навантаження p і q міститься щілина (нелінійна тріщина, $\varepsilon = 0$) довжиною $2a$. Треба знайти величину зовнішніх зусиль $p = p_*$, $q = q_*$, за яких пластина зі щілиною приходить у гранично рівноважний стан. Введемо позначення

$$c_0 = c_3 + c_4\,, \tag{19}$$

де $2c_3$ — початкова (до навантаження пластини) віддаль між берегами щілини при $x = 0$, яка для лінійної тріщини (далі за текстом тріщина) дорівнює нулю, однак, у дослідних зразках $c_3 \ne 0$, оскільки c_3 залежить від технології утворення початкової щілини; $2c_4$ — віддаль між берегами тріщини довжиною $2a$ при $x = 0$, яка обчислюється (або вимірюється) за умови, що на пластину діє лише зусилля $p > 0$, а дія q не враховується.

Якщо величину c_4 обчислювати в межах пружної деформації, то, згідно з поданням (14), тріщина (при $q = 0$) переходить в еліптичну порожнину:

$$x^2/a^2 + z^2/c_4^2 \le 1\,;\; c_4 = pd_1 a/G\,. \tag{20}$$

За умови пружно-пластичної деформації у вершині тріщини величину c_4 обчислюють згідно з [4], тобто

$$c_4 = b_1 \sigma_T a \, ln(1 + sin\beta)/(1 - sin\beta),\; \beta = \pi p/(2\sigma_T),$$
$$b_1 = d_1/(\pi G), \tag{21}$$

де σ_T — межа плинності матеріалу за одновісного розтягу. Зауважимо, що у цьому випадку тріщина при навантаженні пластини не переходить точно в еліптичну порожнину.

Таким чином, при обчисленні $[\tilde{u}_z]_*$, $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$ для щілини за дії зусиль p і q потрібно користуватись рівностями (14) з урахуванням подань (19), (20) або (19), (21), у яких треба покласти $c = c_0$.

Підстановка виразів (14) у подання (9) показує, що

$$K_I = p\sqrt{\pi a}\,, \tag{22}$$

тобто K_I не залежить від q, навіть за умови, якщо $c_0 \ne 0$, що відповідає одновісному розтягу пластини зусиллями p.

Користуючись співвідношенням (12), яке, на відміну від виразу (9), залежить від нормальних торцьових напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$ і, врахувавши, що при $\varepsilon = 0$, $\tilde{\sigma}_{xx} = -q$, $\rho = \rho_0 = c_{03}^2/a$, матимемо подання

$$K_I^{(1)} = p\sqrt{\pi a}\left(1 - c_{03}\eta/(2a)\right), \tag{23}$$

яке показує, що КІН для пластини зі щілиною (чи тріщиною $c_4 \ne 0$) при двовісному навантаженні залежить від q. Тут a і $c_{03} = c_3^{(1)} + c_4$ — півосі еліпса $x^2/a^2 + z^2/c_{03}^2 = 1$, $c_3^{(1)} = c_3(1 + pd_1/(2G))$, тобто, крім початкової величини c_3, враховуємо також зміщення у точці $x = 0$ берегів еліптичного контуру з півосями a, c_3 в однорідній пластині при розтязі зусиллями p, а величина c_4 обчислюється згідно з виразом (20) або (21).

Таким чином, при обчисленні $K_I^{(1)}$ вважається, що вихідним дефектом для зусиль p є тріщина довжиною $2a$ $(c_3 = 0)$, а для зусиль q — еліпс з півосями a, c_{03}. Бачимо, що формально співвідношення (23) можна отримати з подання (22) для K_I при одновісному розтязі, якщо у (22) замість тиску p на берегах тріщини покласти $p(1 - c_{03}\eta/(2a))$.

Зазначимо, що експериментальні дослідження [5, 6] гранично рівноважного стану пластини за двовісного навантаження, хоч і опосередковано, але також підтверджують вплив зусилля q на КІН, оскільки вказують на залежність критичного значення КІН від q.

Для визначення p_* і q_*, скористаємося критерієм Ірвіна [7]:

$$K_I^{(1)}\Big|_{\substack{p = p_* \\ q = q_*}} = K_c^{(1)}, \tag{24}$$

де $K_c^{(1)}$ — критичне значення КІН при двовісному навантаженні.

Зі співвідношень (23), (24) отримуємо рівність

$$p_* - c_{03*}q_*/(2a) = K_c^{(1)}/\sqrt{\pi a}\,, \tag{25}$$

з якої знаходимо p_* і q_*. Тут $c_{03*} = c_{3*}^{(1)} + c_{4*}$, $c_{3*}^{(1)} = c_3(1 + p_* d_1/(2G))$, а c_{4*} визначають на основі виразу (20) чи (21) за умови, що $p = p_*$. Оскільки рівність (25) зв'язує дві залежні величини p_* і q_*, то одній з них надається довільного допустимого значення, а інша визначається згідно з виразом (25).

Якщо пластина розтягується одновісним навантаженням p_1, перпендикулярним до лінії тріщини, то з виразів (22), (24) випливає, що

$$p_{1*} = K_c / \sqrt{\pi a}\,, \tag{26}$$

де K_c — критичне значення КІН за одновісного навантаження; p_{1*} — граничне значення p_1.

Очевидно виникає таке питання. Якщо у рівність (25) підставляти експериментально визначені критичні пари $p_{k*}^{(e)}$, $q_{k*}^{(e)}$ ($k = \overline{1,n}$) значень зовнішніх зусиль p і q, то змінюватиметься $K_c^{(1)}$ чи ні? Якщо припустити, що $K_c^{(1)}$ не змінюватиметься, то це означатиме, що $K_c^{(1)} = K_c$. У цьому випадку з виразів (25), (26) випливає співвідношення

$$p_* - c_{03*} q_* / (2a) = p_{1*}\,, \tag{27}$$

яке виражає діаграму зміни p_* і q_* за відомої величини p_{1*}.

У випадку крихкого руйнування вираз (27), з урахуванням (19), (20), переходить у співвідношення

$$p_* = \left(p_{1*} + c_{3*}^{(1)} q_* / (2a)\right) / \left(1 - d_1 q_* / (2G)\right), \tag{28}$$

яке в системі координат p_*, q_* при $c_3 = 0$ виражає одну з віток гіперболи: $0 < p_* < \sigma_T$, $-\sigma_T < q_* < \sigma_T$, $0 < p_{1*} < \sigma_T$.

Результати [6] показують, що зі збільшенням q_* величина p_* також зростає. Тому, якщо за двовісного навантаження пластини величину $K_c^{(1)}$ визначати (оскільки в літературі відсутні формули (23), (25)) згідно з формулою (26), в яку замість p_{1*}, K_c підставляти p_*, $K_q^{(1)}$, то $K_c^{(1)}$ зі зростанням q_* також зростатиме, тобто $K_c^{(1)} \neq K_c$, що і відзначено у працях [5, 6]. Однак, для знаходження $K_c^{(1)}$ при двовісному навантаженні пластини потрібно користуватись отриманим тут поданням (25). Це дасть можливість відповісти на питання: залежить чи ні $K_c^{(1)}$ від типу навантаження?

Аналіз співвідношень (23), (25), (28) показує, що за крихкого руйнування і при $c_3 = 0$ навантаження q мало впливає на $K_c^{(1)}$ і p_*, оскільки $d_1 q / (2G) << 1$. Якщо ж $c_3 \neq 0$, то вплив q на граничну рівновагу пластини збільшується. У випадку квазікрихкого руйнування вплив зусилля q_* на граничний стан пластини буде істотнішим, оскільки величина c_{4*} обчислюватиметься згідно з виразом (21), а не за поданням (20).

Література

1. *Стадник М.М.* Метод розв’язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1994. — №6. — С. 30—40.
2. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов. — М.: Наука, 1983. — 296 с.
3. *Бережницький Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. — К.: Наук. думка, 1983. — 288 с.
4. *Панасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — К.: Наук. думка, 1968. — 246 с.
5. *Лебедев А.А., Музыка Н.Р.* Несущая способность пластины с трещиной при двухосном растяжении // Пробл. прочности. — 2001. — №2. — С. 20—27.
6. *Іваницький Я.Л., Штаюра С.Т., Костів Р.Б.* Оцінка тріщиностійкості матеріалів при двовісному навантаженні // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. — Львів: Фіз. мех. ін-т ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2004. — С. 697—702.
7. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. — 1957. — **24**. — №3. — P. 361—364.

Отримана 14.05.09

Stadnyk M.

Elastic inclusion in plate under the influence of load biaxial and uniformly heated

National Forestry University of Ukraine, Lviv

Based on mathematical models of thin inclusion problem is reduced to solving a system of two singular integral equations. For elliptic inclusion exact solution of equations. Formulas for determining stresses in an elastic inclusion and stress concentration at the plate beside it. Shown that cracks K_I depends on the load. For absolutely hard inclusion K_I takes two different values depending on whether or not considered normal contact stress at the ends of inclusion.

² íôîðìàö³ÿ

BIOMECHANICS OF HUMAN MOTION.
NEW FRONTIERS OF MULTIBODY TECHNIQUES FOR CLINICAL APPLICATIONS

March 2010
Ponta Delgada, Azores, Portugal

Contact:

Prof. Jorge A.C. Ambrosio
IDMEC- Instituto Superior Tecnico
Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisbon Portugal.
Phone: +351 2184 17680; fax: +351 2184 17915.
mail: Jorge@dem.ist.utl.pt