

УДК 539.3

К. Некислих

Аспірантка,
Сумський державний педагогічний
університет ім. А. С. Макаренка,
м. Суми

В. Острик

Доцент, д-р фіз.-мат. наук,
Інститут прикладної фізики
НАН України,
м. Суми

КОНТАКТ БЕРЕГІВ КРАЙОВОЇ ТРИЩИНИ У ПРУЖНОМУ КЛИНІ

Розглянуто задачу плоскої деформації пружного клина, до бічних граней якого прикладені зосереджені сили, з прямолінійною тріщиною на його осі симетрії. Враховано контакт берегів тріщини. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень, розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини та в області контакту, нормальні переміщення берегів тріщини.

крайова тріщина, пружний клин, напруження

Дослідженню рівноваги пружного клина з прямолінійною тріщиною при його вершині присвячені праці [2, 5, 8 — 12], огляд яких міститься у довіднику [4]. Контакт берегів тріщини при цьому не розглядався.

У цій статті з використанням методу Вінера – Гопфа і підходу з праці [1] знайдено аналітичний розв'язок задачі про рівновагу пружного клина з крайовою тріщиною на його осі симетрії при врахуванні контакту берегів тріщини.

Постановка задачі. Розглянемо плоску деформацію пружного клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$ ($\alpha < \pi/2$) з тріщиною $0 \leq r < l$, $\vartheta = 0$ довжини l , яка виходить з вершини $r = 0$ і знаходиться на лінії симетрії клина. У точках $r = r_0$, $\vartheta = \pm\alpha$ граней клина діють розтягуючі зосереджені сили P , нормальні до осі симетрії клина. Лінія дії зосереджених сил проходить на віддалі $d = r_0 \cos \alpha$ від вершини клина (рис. 1).

При розтязі пружного клина силами за умови $d_* < d < d'_*$ береги тріщини контактують в області $0 \leq r < l_1$, прилеглий до вершини клина (при $d = d_*$ береги тріщини контактують у вершині клина, при $d < d_*$ тріщина повністю розкрита, при $d > d'_*$ — повністю закрита, і задача стає еквівалентною задачі без тріщини). Розмір l_1 області контакту берегів тріщини заздалегідь невідомий і підлягає визначенню при розв'язуванні задачі.

Вказане вище можна пояснити розв'язком відповідної задачі розтягу зосередженими силами клина без тріщини

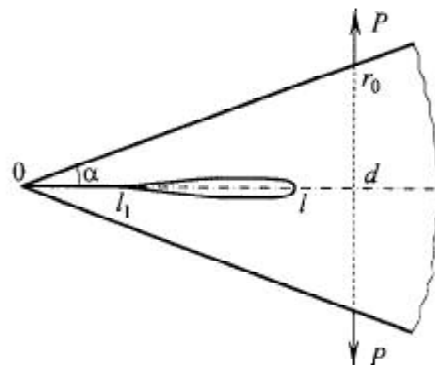


Рис. 1

[5], згідно з яким нормальні напруження на лінії симетрії клина є напруженнями розтягу в інтервалі $\zeta_1 d < r < \zeta_2 d$ ($0 < \zeta_1 < 1$, $\zeta_2 > 1$) і напруженнями стиску поза вказаним інтервалом. Отже, якщо на осі симетрії клина внести крайовий розріз $0 \leq r < l$ довжини $l > \zeta_1 d$, який виходить за межу зони стиску $0 < r < \zeta_1 d$, то його береги зімкнуться в області, прилеглий до вершини клина, а на іншій частині розрізу береги розійдуться. При цьому $d'_*/l = 1/\zeta$. Якщо ж довжина розрізу менша за розмір зони стиску, то береги розрізу залишаться притиснутими один до одного.

Оскільки напружено-деформований стан клина симетричний відносно його осі $\vartheta=0$, обмежимося розглядом верхнього півклина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$. Змішані крайові умови задачі запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} &= 0 \quad (l_1 < r < l), \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \\ u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} &= 0 \quad (0 \leq r \leq l_1, \quad l \leq r < \infty), \\ \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= P\delta(r-r_0)\cos\alpha, \\ \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= P\delta(r-r_0)\sin\alpha \quad (0 \leq r < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

де $\delta(r)$ — дельта-функція Дірака.

Інтегральне рівняння задачі. Введемо невідому функцію радіальної похідної нормальних переміщень верхнього берега тріщини

$$g(r) = \left. \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \right|_{\vartheta=0} \quad (l_1 \leq r \leq l). \quad (2)$$

Тоді, замінивши у крайових умовах (1) першу і третю умови змішаного типу однією:

$$\left. \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \right|_{\vartheta=0} = \begin{cases} g(r), & l_1 \leq r \leq l, \\ 0, & 0 \leq r < l_1, \quad l < r < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

перейдемо до крайової задачі з другою, четвертою та п'ятою умовами з (1) і умовою (3). Розв'язавши останню задачу з використанням інтегрального перетворення Меліна, отримаємо:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \right|_{\vartheta=0} &= -\frac{m}{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda(s)}{\Delta(s)} a(s) r^{-s-1} ds + \\ &+ \frac{P}{2Gr} \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda_1(s)}{\Delta(s)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-s} ds, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \right|_{\vartheta=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds, \quad a(s) = \int_{l_1}^l g(y) y^s dy,$$

$$\lambda(s) = \sin^2 s\alpha - s^2 \sin^2 \alpha, \quad \Delta(s) = \sin 2s\alpha + s \sin 2\alpha,$$

$$\lambda_1(s) = \sin s\alpha + s \sin \alpha \cos(s+1)\alpha, \quad (4)$$

де G — модуль зсуву; m — число Пуассона; c — будь-яке дійсне число з інтервалу $-1 < c < 0$.

Підставивши вираз для $a(s)$ у перше співвідношення (4) і виконавши заміни

$$s = -i\tau, \quad r = le^{-\xi}, \quad y = le^{-\eta}, \quad r_0 = le^{-\xi_0},$$

$$g(le^{-\eta})e^{-\eta} = \varphi(\eta) \quad (0 < \eta \leq a), \quad a = \ln(l/l_1), \quad (5)$$

отримаємо:

$$\left. \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \right|_{\vartheta=0} = -\frac{m}{m-1} e^{\xi} \int_0^a k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta +$$

$$+ \frac{P}{2\pi Gl} e^{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1(-i\tau)}{\Delta(-i\tau)} e^{-i\tau(\xi-\xi_0)} d\tau,$$

$$k(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau,$$

$$K(\tau) = \frac{\lambda(-i\tau)}{\Delta(-i\tau)}. \quad (6)$$

При цьому через відсутність полюсів функції $K(\tau)$ у смугі $|\text{Im}\tau| < 1$ контур інтегрування $-\infty + ic < \tau < \infty + ic$ зміщено на дійсну вісь ($c = 0$).

Задовольнивши першу крайову умову (1) за допомогою (6), для функції $\varphi(\eta)$ отримуємо інтегральне рівняння з різницеvim ядром на скінченному інтервалі:

$$\int_0^a k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta = f(\xi) \quad (0 < \xi < a),$$

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{m-1}{m} \frac{P}{2\pi Gl} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1(-i\tau)}{\Delta(-i\tau)} e^{-i\tau(\xi-\xi_0)} d\tau = \\ &= \frac{m-1}{m} \frac{P}{Gl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(-\delta_k)}{\Delta'(\delta_k)} e^{-\delta_k(\xi-\xi_0)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Права частина інтегрального рівняння (7) перетворена за теорією лишків, за умови $\xi_0 < 0$ ($r_0 > l$). Тут δ_k ($k=1, 2, \dots$) — корені рівняння $\Delta(s)=0$ з півплощини $\text{Re}s > 0$.

Розв'язання інтегрального рівняння. Інтегральне рівняння (7) розв'яжемо, використовуючи підхід з праці [1] із застосуванням метода Вінера – Гопфа [3].

Розповсюдимо інтегральне рівняння (7) на всю числову вісь, вважаючи $\varphi(\eta)=0$, якщо $\eta \leq 0$, $\eta > a$, і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Відносно невідомих функцій

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi+a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi^+(z) = -\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi-\eta)\varphi(\eta) d\eta,$$

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi-\eta)\varphi(\eta) d\eta, \quad (8)$$

аналітичних відповідно у півплощинах $\text{Im}z > c^+$, $\text{Im}z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$) комплексної площини, отримаємо систему функціональних рівнянь Вінера – Гопфа:

$$K(z)\Phi^+(z) + e^{iza}\Psi^+(z) - \Psi^-(z) = F(z),$$

$$\Phi^+(z) = e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+ < \text{Im}z < c^-) \quad (9)$$

з правою частиною:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a f(\xi) e^{iz\xi} d\xi = F_1^+(z) + F_2^+(z) e^{iza},$$

$$F_1^+(z) = -\frac{m-1}{m} \frac{P}{Gl} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(-\delta_k)}{\Delta'(\delta_k)} \frac{e^{\delta_k \xi_0}}{iz - \delta_k},$$

$$F_2^+(z) = \frac{m-1}{m} \frac{P}{Gl} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(-\delta_k)}{\Delta'(\delta_k)} \frac{1}{iz - \delta_k}. \quad (10)$$

Для розв'язання системи функціональних рівнянь (9) факторизуємо її коефіцієнт $K(z)$ у вигляді

$$K(z)/z = K^+(z)K^-(z), \quad (11)$$

де $K^\pm(z)$ — відмінні від нуля функції, аналітичні у верхній ($\text{Im } z > c^+$) та нижній ($\text{Im } z < c^-$) півплощинах відповідно. Факторизацію (11) здійснюємо у нескінченних добутках:

$$K^+(z) = K'(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{is_n} \right) \left(1 + \frac{z}{i\delta_n} \right)^{-1},$$

$$K^-(z) \equiv \frac{K^+(-z)}{K^+(0)}, \quad K'(0) = -i \frac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad (12)$$

де s_n ($n=1, 2, \dots; s_1=1$) — корені рівняння $\lambda(s)=0$ з півплощини $\text{Res} > 0$.

Систему функціональних рівнянь (9) з урахуванням (10), (12) переписемо у вигляді

$$zK^+(z)\Phi^+(z) + \frac{e^{iza}}{K^-(z)} (\Psi^+(z) - F_2^+(z)) - \frac{\Psi^-(z)}{K^-(z)} = \frac{F_1^+(z)}{K^-(z)},$$

$$zK^-(z)\Phi^-(z) - \frac{e^{-iza}}{K^+(z)} (\Psi^-(z) + F_1^+(z)) + \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} = \frac{F_2^+(z)}{K^+(z)}. \quad (13)$$

Другі складові лівої частини системи рівнянь (13) подамо у вигляді різниці аналітичних функцій:

$$\frac{e^{iza}}{K^-(z)} (\Psi^+(z) - F_2^+(z)) = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z),$$

$$\frac{e^{-iza}}{K^+(z)} (\Psi^-(z) + F_1^+(z)) = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z). \quad (14)$$

Розкладаючи відповідні інтеграли типу Коші [3] в ряд за теорією лишків, отримуємо:

$$\chi_1^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k + iz} (\Psi^+(is_k) - F_2^+(is_k)) e^{-s_k a},$$

$$\alpha_k = \frac{is_k \Delta(s_k) K^+(is_k)}{\lambda'(s_k)} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (15)$$

$$K'(0) \chi_2^+(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k - iz} (\Psi^-(is_k) + F_1^+(is_k)) e^{-s_k a}.$$

Аналогічно для правої частини системи рівнянь (13) маємо:

$$\frac{F_1^+(z)}{K^-(z)} = f_1^+(z) - f_1^-(z), \quad \frac{F_2^+(z)}{K^+(z)} = f_2^+(z),$$

$$f_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1^+(\xi)}{K^-(\xi)} \frac{d\xi}{(\xi - z)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{P}{Gl} \frac{m-1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(-\delta_k)}{\Delta'(\delta_k) K^-(-i\delta_k)} \frac{e^{\delta_k \xi_0}}{\delta_k - iz}. \quad (16)$$

При цьому права частина другого рівняння (13) є функція, аналітична у півплощині $\text{Im } z > c^+$.

У результаті проведених перетворень система функціональних рівнянь (9) набуде вигляду:

$$zK^+(z)\Phi^+(z) + \chi_1^+(z) - f_1^+(z) = \Psi^-(z)/K^-(z) + \chi_1^-(z) - f_1^-(z)$$

$$zK^-(z)\Phi^-(z) + \chi_2^-(z) = -\Psi^+(z)/K^+(z) + \chi_2^+(z) + f_2^+(z). \quad (17)$$

Обидві частини кожного рівняння (17) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і, отже, є довільною цілою функцією. З умов на нескінченності

$$K^+(z) \sim -i \sqrt{\frac{K'(0)}{2z}}, \quad K^-(z) \sim \frac{1}{\sqrt{-2K'(0)z}},$$

$$\Phi^+(z) = o(1), \quad \Phi^-(z) = o(z^{-1}), \quad \chi_1^-(z) = O(z^{-1}),$$

$$\chi_2^+(z) = O(z^{-1}), \quad f_{1,2}^+(z) = O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (18)$$

робимо висновок, що обидві частини першого рівняння (17) є константа, яку позначимо C , а обидві частини другого рівняння дорівнюють нулю.

Таким чином, розв'язок системи функціональних рівнянь (9) має вигляд:

$$\Phi^+(z) = \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z) + C}{zK^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = -\frac{\chi_2^-(z)}{zK^-(z)},$$

$$\Psi^-(z) = K^-(z) [f_1^-(z) - \chi_1^-(z) + C],$$

$$\Psi^+(z) = K^+(z) [\chi_2^+(z) + f_2^+(z)]. \quad (19)$$

Стала C визначається з умови аналітичності функції $\Phi^+(z)$ у точці $z=0$: $f_1^+(0) - \chi_1^+(0) + C = 0$. Враховуючи (14), (19), знаходимо

$$C = -f_1^+(0) + \chi_1^-(0) + K'(0) \chi_2^+(0). \quad (20)$$

Співвідношення (19), (20) не визначають повністю функції $\Phi^\pm(z)$, $\Psi^\pm(z)$, а виражають їх через невідомі значення $\Psi^+(is_k)$, $\Psi^-(is_k)$ ($k=1, 2, \dots$) з (15). Для визначення останніх у четвертій рівності (19) візьмемо $z=is_n$, а у третій — покладемо $z=-is_n$ ($n=1, 2, \dots$). Отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь:

$$z_n^+ + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k + s_n} z_k^- \lambda^k = 0,$$

$$z_n^- + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k + s_n} z_k^+ \lambda^k = g_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (21)$$

відносно невідомих

$$z_k^+ = \frac{1}{\beta_k} \left(\Psi^+(is_k) - F_2^+(is_k) \right) \left(\beta_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{P}{2Gl} \frac{m-1}{m} \right),$$

$$z_k^- = \frac{1}{\beta_k} \left(\Psi^-(is_k) + F_1^+(is_k) \right) \quad (k=1, 2, \dots), \quad (22)$$

у якій

$$\lambda = e^{-\pi a/(2\alpha)} = (l_1/l)^{\pi/(2\alpha)}, \quad \tilde{\alpha}_k = \alpha_k e^{(\pi k/(2\alpha) - s_k)a},$$

$$\beta_n = K^-(is_n), \quad g_n = K^-(is_n) \left(\frac{F_1^+(is_n)}{\beta_n K^-(is_n)} + \mathcal{C} \right)$$

$$(k, n=1, 2, \dots), \quad \mathcal{C} = C/\beta_k. \quad (23)$$

Розв'язок системи рівнянь (21) шукаємо у вигляді

$$z_k^{\pm} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{km}^{\pm} \lambda^m \quad (k=1, 2, \dots). \quad (24)$$

Підставляючи (24) у (21), методом невизначених коефіцієнтів знаходимо

$$\xi_{n0}^+ = 0, \quad \xi_{n0}^- = g_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (25)$$

і отримуємо рекурентні співвідношення

$$\xi_{nm}^+ = -\beta_n \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} \xi_{k, m-k}^-,$$

$$\xi_{nm}^- = -\beta_n \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} \xi_{k, m-k}^+ \quad (n, m=1, 2, \dots) \quad (26)$$

для визначення коефіцієнтів ξ_{nm}^{\pm} розвинень (24).

Права частина системи рівнянь (21) лінійна відносно \tilde{C} . Подавши її розв'язок у вигляді

$$z_k^{\pm} = \mathcal{J}_k^{\pm} + \tilde{C} z_k^{\pm}, \quad (27)$$

з (20) знаходимо

$$\mathcal{C} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k} \left(\mathcal{J}_k^+ - \mathcal{J}_k^- \right) \lambda^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(-\delta_k) e^{\delta_k \xi_0}}{\delta_k \Delta'(\delta_k) K^-(i\delta_k)} \right) \times$$

$$\times \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k} \left(\tilde{z}_k^+ - \tilde{z}_k^- \right) \lambda^k \right)^{-1}, \quad (28)$$

де $\mathcal{J}_k^{\pm}, \tilde{z}_k^{\pm}$ — розв'язки системи рівнянь (21) з правими частинами:

$$\mathcal{J}_n = K^-(is_n) \frac{F_1^+(is_n)}{\beta_n K^-(is_n)},$$

$$\mathcal{J}_n = K^-(is_n) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (29)$$

Для визначення невідомого розміру області контакту l_1 скористаємося умовою відсутності стрибка переміщень у вершині тріщини ($r=l$) і в точці $r=l_1$:

$$\int_{l_1}^l \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} dr = 0, \quad (30)$$

яка завдяки (2), (5), (8) еквівалентна рівності $\Phi^+(0) = 0$. Звідси, враховуючи перше співвідношення (19) і умову $f_1^+(0) - \chi_1^+(0) + C = 0$, отримуємо

$$\frac{d}{dz} [f_1^+(z) - \chi_1^+(z)]_{z=0} = 0, \quad (31)$$

що еквівалентно рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_k}{s_k^2} \left[z_k^+ + \left(1 - \frac{i\gamma s_k}{K'(0)} \right) z_k^- \right] \lambda^k + \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda_1(-\delta_k)}{\delta_k^2 \Delta'(\delta_k) K^-(i\delta_k)} \left(\frac{r_0}{l} \right)^{-\delta_k} \right\} = 0,$$

$$\gamma = iK'(0)(a + 2\gamma_0), \quad \gamma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta_n} - \frac{1}{s_n} \right). \quad (32)$$

Розподіл напружень і переміщення верхнього берега тріщини. Визначимо нормальні напруження на лінії продовження тріщини ($l < r < \infty, \vartheta=0$). Із (6), враховуючи (8), знаходимо

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{m}{m-1} e^{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \Phi^+(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau +$$

$$+ \frac{P}{2\pi Gl} e^{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1(-i\tau)}{\Delta(-i\tau)} e^{-i\tau(\xi - \xi_0)} d\tau. \quad (33)$$

Перетворивши інтеграли з (33) в ряд за теорією лишків при $\xi < 0$ і використовуючи рівності (19), (14), (22) та заміни (5), отримуємо

$$\sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_n)}{i\delta_n \Delta'(\delta_n) K^+(i\delta_n)} \left(\frac{r}{l} \right)^{-\delta_n - 1} \left\{ \mathcal{C} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_k z_k^+ \lambda^k}{s_k - \delta_n} - \frac{2\lambda_1(-\delta_k)}{\Delta'(\delta_k) K^-(i\delta_k) (\delta_k + \delta_n)} \left(\frac{r_0}{l} \right)^{-\delta_k} \right] \right\} +$$

$$+ \text{sign}(r_0 - r) \frac{2P}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(\text{sign}(r - r_0) \delta_n)}{\Delta'(\delta_n)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\delta_n \text{sign}(r_0 - r)}. \quad (34)$$

Застосовуючи до рівності (33) обернене перетворення Фур'є і враховуючи першу крайову умову (1), знаходимо

$$K(z)\Phi^+(z) = -\frac{m-1}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 + \int_a^{\infty} \right] e^{-z\xi} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} e^{iz\xi} d\xi + \frac{P}{Gl} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi_0 - \xi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(\text{sign}(\xi_0 - \xi)\delta_n)}{\Delta'(\delta_n)} e^{-\delta_n|\xi_0 - \xi|} \right] e^{iz\xi} d\xi. \quad (35)$$

Звідси, з використанням розв'язку (19), оцінок (18), а також леми Ватсона [7], отримуємо поведінку нормальних напружень поблизу вершини тріщини:

$$\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} \sim -\frac{P}{\sqrt{l}} \frac{\tilde{C}}{\sqrt{2\pi i K'(0)(r-l)}}, \quad r \rightarrow l+0. \quad (36)$$

З (36) визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_I = \lim_{r \rightarrow l+0} \sqrt{2\pi(r-l)} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = -\frac{P}{\sqrt{l}} \frac{\tilde{C}}{\sqrt{i K'(0)}}. \quad (37)$$

Нормальні напруження в області контакту ($0 < r < l_1$, $\vartheta = 0$) визначимо з (33). Після обчислення інтегралів за теорією лишків при $a < \xi < \infty$ отримаємо

$$\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \frac{P}{l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_n)}{i\delta_n \Delta'(\delta_n) K^+(i\delta_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k - \delta_n} z_k^- \lambda^k \left(\frac{r}{l_1} \right)^{\delta_n - 1}. \quad (38)$$

Знайдемо нормальні переміщення верхнього берега тріщини поза областю контакту ($l_1 < r < l$), виходячи з виразу

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = -\int_r^l \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} dr = -l \int_0^{\xi} \varphi(\xi) d\xi \quad (0 < \xi < a). \quad (39)$$

Застосовуючи до першої рівності (8) обернене перетворення Фур'є, знаходимо

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau. \quad (40)$$

Враховуючи (19), (14), (22), після обчислення інтеграла з (40) за теорією лишків отримуємо

$$\varphi(\xi) = \frac{m-1}{m} \frac{P}{2Gl} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\Delta(s_k)}{\lambda'(s_k)} \left(z_k^+ e^{-s_k(a-\xi)} + z_k^- e^{-s_k\xi} \right) + \frac{i}{K'(0)} \frac{\alpha_k}{s_k} z_k^- e^{-s_k a} \right]. \quad (41)$$

Підставивши цей вираз у (39) і використовуючи заміни (5), після перетворень матимемо

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \frac{m-1}{m} \frac{P}{2G} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{iK'(0)} \left[\frac{\alpha_k}{s_k} z_k^- \lambda^k \left(\gamma_0 - \ln \frac{r}{l} \right) + \frac{\alpha_k}{s_k^2} z_k^+ \lambda^k + \frac{2\lambda_1(-\delta_k)}{\delta_k^2 \Delta'(\delta_k) K^-(-i\delta_k)} \left(\frac{r_0}{l} \right)^{-\delta_k} \right] - \frac{\Delta(s_k)}{s_k \lambda'(s_k)} \left[z_k^+ \left(\frac{r}{l_1} \right)^{-s_k} - z_k^- \left(\frac{r}{l} \right)^{s_k} \right] \right\}. \quad (42)$$

Результати розрахунків. Обчислені безрозмірні напруження $\bar{\sigma} = (l/P)\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0}$ і переміщення $\bar{u} = (2G/P)u_{\vartheta}|_{\vartheta=0}$ у точках осі симетрії клина у випадку, коли клин є чвертьплощиною ($\alpha = \pi/4$, $m = 10/3$). Розподіл нормальних напружень в області контакту зображено на рис. 2, нормальні переміщення верхнього берега тріщини — на рис. 3 ($\rho = (r-l_1)/(l-l_1)$ — відносна координата області $l_1 < r < l$). Криві 1 — 6 відповідають значенням відносної координати точок прикладання зосереджених сил на гранях клина $r_0/l = 3,8; 4; 4,5; 5; 5,5; 6$.

Критичне значення відносної координати точок прикладання зосереджених сил, при якому береги тріщини змикаються лише у вершині клина, складає величину $r_0^*/l = 3,74$. Їй відповідає критичне значення

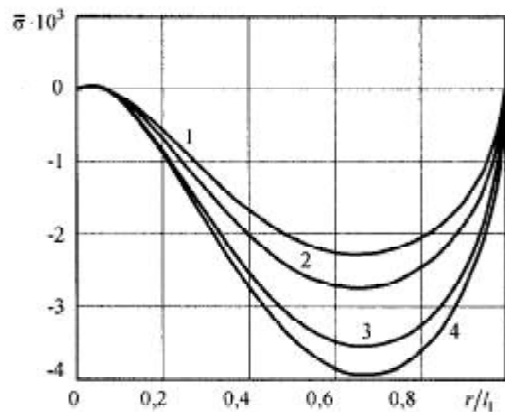


Рис. 2 Розподіл нормальних напружень в області контакту

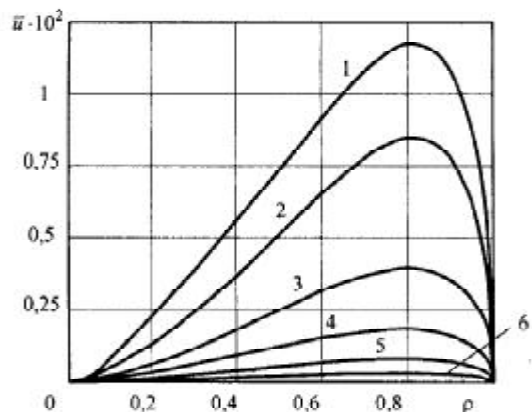


Рис. 3 Нормальні переміщення верхнього берега тріщини

Таблиця 1

Результати розрахунків

r_0/l	3,8	4	4,5	5	5,5	6
l_1/l	0,02	0,14	0,38	0,54	0,66	0,76
K_1	0,0396	0,0302	0,0158	0,0083	0,0041	0,0018

віддалі лінії дії зосереджених сил від вершини клина $d_* = r_0^* \cos \alpha = 2,65l$.

Напруження в області контакту $0 < r < l_1$ є напруженнями стиску ($\bar{\sigma} < 0$). Але у достатньо малій зоні $0 < r < \delta$ ($\delta = 0,06l_1$) контактні напруження стають додатними, що вказує на часткове відставання берегів тріщини поблизу вершини клина. Зрозуміло, що за наявності зони відставання потрібно переглянути постановку задачі, але завдяки малості цієї зони, її вплив на напружено-деформований стан пружного клина поза малим околom його вершини є незначним.

У табл. 1 наведені значення відносних розмірів області контакту l_1/l і безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень $K_1 = (\sqrt{l}/P)K_I$ для різних значень відносної координати прикладання зосереджених сил на гранях клина r_0/l .

Висновки. Із застосуванням метода Вінера – Гопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про рівновагу пружного клина з крайовою тріщиною на його осі симетрії при врахуванні контакту берегів тріщини. Показано, що при розтягу пружного клина зосередженими силами, прикладеними на певному інтервалі бокових граней клина, береги тріщини входять у контакт поблизу вершини клина з незначним відставанням у малому околi вершини клина.

Література

1. Антупов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливания кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1987. — №7. — С. 29—33.
2. Банцур Р. Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез // Докл. АН СССР. — 1966. — 167, №6. — С. 1256—1259.

3. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 280 с.

4. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов / Справ. пособие под ред. В.В. Панасюка. — К.: Наук. думка, 1988. — 2. — 620 с.

5. Сметанин Б. И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина // Прикл. матем. и механика. — 1968. — 32, вып. 4. — С. 708—714.

6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л.: Наука, 1968. — 402 с.

7. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.

8. Храпков А. А. Бесконечный треугольный клин с надрезом на биссектрисе под действием сосредоточенных сил, приложенных к берегам надреза // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1972. — №5. — С. 88—97.

9. Doran H. E. The wedge with a symmetric crack at the vertex in plane elastostatics // J. Inst. Math. and Appl. — 1969. — 5, №4. — P. 363—372.

10. Keer L., Mendelsohn D. A., Achenbach J. D. Crack at the apex of a loaded notch // Int. J. Solids and Struct. — 1977. — 13, №7. — P. 615—623.

11. Quchterlony F. Some stress intensity factors for self-similar cracks, derived from path-independent integrals // J. Elast. — 1978. — 8, №3. — P. 259—271.

12. Stone S. F., Westmann R. A. Stress intensity factors for cracked wedges // Int. J. Solids and Struct. — 1981. — 17, №3. — P. 345—358.

Отримана 22.05.09

K. Nekislykh¹, V. Ostriuk²

Contact of shores of crack in elastic wedge

¹Sумы National Pedagogical University, Sумы;

²Institute for Applied Physics of National Academy of Sciences of Ukraine, Sумы

The problem of plane deformation of elastic wedge with point forces on the lateral sides and with rectilinear crack on the axis of symmetry is solved. The contact of shores of the crack close is taken into account. Using the Wiener - Hopf method, the exact solutions of the task was obtained. The contact of shores of the crack is taken into account. The stress intensity factor, distribution of tensions on continuation of crack, distribution of tensions in contact domain and jump of displacements are found.

21 01 01 à 3y

BIOMECHANICS OF HUMAN MOTION. NEW FRONTIERS OF MULTIBODY TECHNIQUES
FOR CLINICAL APPLICATIONS

March 2010

Ponta Delgada, Azores, Portugal

Contact:

Prof. Jorge A.C. Ambrosio

IDMEC- Instituto Superior Tecnico

Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisbon Portugal.

Phone: +351 2184 17680; fax: +351 2184 17915.

mail: Jorge@dem.ist.utl.pt