

С. Рябоконт

Аспірант,
Дніпропетровський національний
університет імені Олеся Гончара,
м. Дніпропетровськ

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО- ПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРОЕКЦІЙНО- ІТЕРАЦІЙНОЇ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для прямокутної пластини з еліптичним отвором на основі проекційно-ітераційного варіанту методу скінченних елементів розроблено алгоритм розв'язання задачі про пружно-пластичний напружено-деформований стан. Для врахування пластичних деформацій застосовано метод змінних параметрів пружності. Проведено порівняльний аналіз отриманих розв'язків з відомими.

пружно-пластичний стан, еліптичний отвір, метод скінченних елементів, проекційно-ітераційна схема

Дослідження конструкцій з отворами, які спричинюють концентрацію напружень, є актуальною проблемою у багатьох галузях техніки. Цій тематиці присвячена велика кількість праць вітчизняних і зарубіжних учених. Охарактеризуємо деякі з них. В [1] розглянуто задачі концентрації напружень біля отвору з криволінійним контуром, у [2] — навколо двох однакових кругових отворів, у [3, 4] — навколо двох неоднакових кругових отворів у нескінченній пружній ізотропній площині. Розв'язки цих задач побудовані у вигляді рядів. У [5] розв'язано задачу про взаємодію двох еліптичних отворів у пружній ізотропній площині методом сингулярних інтегральних рівнянь, в [6] отримано розв'язок задачі для нескінченної пружної площини з декількома взаємодіючими отворами, зокрема з двома круговими, методом мультипольного розкладу.

При високих рівнях навантаження в елементах конструкції виникають пластичні деформації, що істотно ускладнює відповідні дослідження напружено-деформованого стану. Аналітичний розв'язок при цьому можливо знайти лише в окремих випадках. Розв'язання таких задач

часто потребує застосування ефективних числових методів, зокрема методу скінченних елементів (МСЕ). Істотне покращання ефективності МСЕ з точки зору економії часу розрахунків на ПК пов'язане з використанням проекційно-ітераційних схем його числової реалізації [7 — 11].

Нижче розглянуто пружно-пластичну задачу деформації прямокутної пластини з еліптичним отвором. Для розв'язування такої задачі застосовано модифікований варіаційний метод [12, 13], на основі якого будуються спеціальні ітераційні процеси, на кожному кроці яких розв'язується відповідна задача теорії пружності проекційно-ітераційним варіантом методу скінченних елементів.

Розглянемо задачу про напружено-деформований стан ізотропної прямокутної пластини з еліптичним отвором у її центрі. На пластину діє розподілене навантаження P_1 , що зумовлює появу пластичних деформацій (на рис. 1 зображена $\frac{1}{4}$ частина пластини).

У процесі розв'язання задачі потрібно визначити неоднорідний напружено-деформований стан пластини, межу між зонами пружного і пластичного деформування.

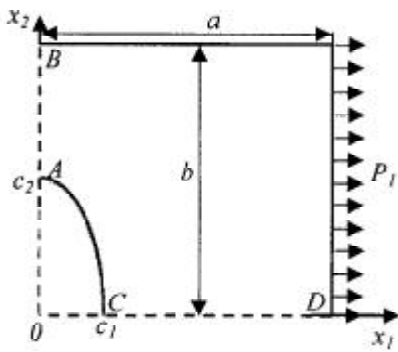


Рис. 1. Геометрія пластини

Застосуємо модифікований варіаційний метод [12, 13] з використанням методу змінних параметрів пружності та побудовою відповідних схем послідовних наближень [14]. Для кожного наближення маємо неоднорідну задачу теорії пружності, при цьому знаходиться мінімум функціоналу [12, 13]

$$\Pi = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[\frac{\bar{G}}{1-\bar{\nu}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\bar{G}}{1-\bar{\nu}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{2\bar{G}\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\bar{G}}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx_2 dx_1 - \int_{-b}^b P_1 u_1 dx_2, \quad (1)$$

де \bar{G} , $\bar{\nu}$ — змінні модуль зсуву і коефіцієнт Пуасона.

Для початкового наближення $\bar{G} = G$, $\bar{\nu} = \nu$, а для всіх наступних наближень

$$\bar{G} = \frac{1}{2\psi}, \quad \bar{\nu} = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu},$$

де $\psi = 3\epsilon_i^e / (2\sigma_i)$, ϵ_i^e , σ_i — інтенсивності деформацій і напружень, які обчислюються на підставі розв'язку пружної задачі для попереднього наближення

$$\epsilon_i^e = \frac{2}{3} \left(\frac{1-\bar{\nu}+\bar{\nu}^2}{(1-\bar{\nu})^2} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})^2 - 3\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \frac{3}{4}\gamma_{12}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

і знаходяться з діаграми деформування. Процес триває до досягнення заданої точності між двома наближеннями. У виразі (1) \bar{G} і $\bar{\nu}$ знайдені на підставі деформаційної теорії пластичності. Вони визначені також і для теорії плинину [14]. При побудові схем, що враховують складне навантаження, яке спостерігається в задачах концентрації напружень, доцільно використовувати адаптивні сітки [11].

Для початкового наближення мінімізація (1) проводиться за проекційно-ітераційною схемою МСЕ [7 — 9], при цьому задача мінімізації (1) апроксимується за допомогою МСЕ послідовністю дискретних екстремальних задач для функцій багатьох змінних. При цьому використовується метод послідовної верхньої релаксації [15]

згідно з методикою [16], де не потрібно зберігати матрицю жорсткості в явному вигляді. Переміщення u та v у вузлі (i, j) обчислюються через вузлові значення переміщень чотирьох прилеглих до заданого вузла скінченних елементів [9]. Для всіх наступних наближень мінімізація (1) проводиться з використанням традиційного МСЕ і процесу послідовної верхньої релаксації.

Розрахунки проведені для двох задач з пластинами: перша, сторони $2a = 2b = 0,5$ м, півосі еліптичного отвору $c_1 = 0,02$ м та $c_2 = 0,03$ м; друга, сторони $2a = 2b = 0,2$ м, півосі еліптичного отвору $c_1 = 0,01$ м та $c_2 = 0,03$ м. Матеріал пластини — алюмінієвий сплав Д16Т. Навантаження P_1 змінювалися від 40 до 180 МПа.

В [1] отримано аналітичний розв'язок для нескінченної пружної пластини з еліптичним отвором ($c_1 = 0,02$ м та $c_2 = 0,03$ м). Розміри першої пластини з отвором дають змогу порівнювати аналітичний розв'язок [1] і отриманий з використанням проекційно-ітераційної схеми МСЕ (різниця складає не більше 5 %). Під час дослідження встановлено, що при навантаженні P_1 , меншому за 47 МПа, відбувається пружна деформація пластини, а при більшому — пружно-пластична.

Дослідження напружено-деформованого стану другої пластини показали, що зони пластичного деформування в ній виникають вже при $P_1 = 40$ МПа. На рис. 2 показано розвиток зон пластичності (позначені сіткою) зі збільшенням навантажень.

На рис. 3 показано розподіл напружень σ_1 та σ_2 в характерних перерізах пластини (лінія \blacklozenge — при $P_1 = 140$ МПа, лінія \blacksquare — при $P_1 = 160$ МПа, лінія \blacktriangle — при $P_1 = 180$ МПа).

Таким чином, у статті розроблена методика розв'язування плоскої задачі про пружно-пластичне деформування пластини з центральним еліптичним отвором з використанням проекційно-ітераційної схеми реалізації МСЕ. Розроблені алгоритм і комплекс програм для комп'ютера можна застосовувати для розв'язування складніших пружно-пластичних задач для пластинчато-оболонкових конструкцій з отворами.

Література

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. — К.: Наук. думка, 1968. — 888 с.

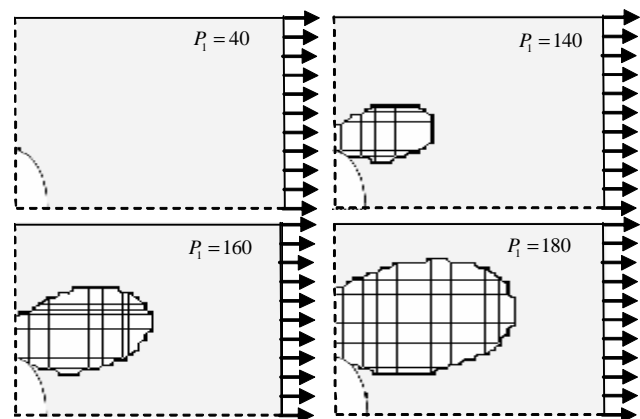


Рис. 2. Розвиток зон пластичності

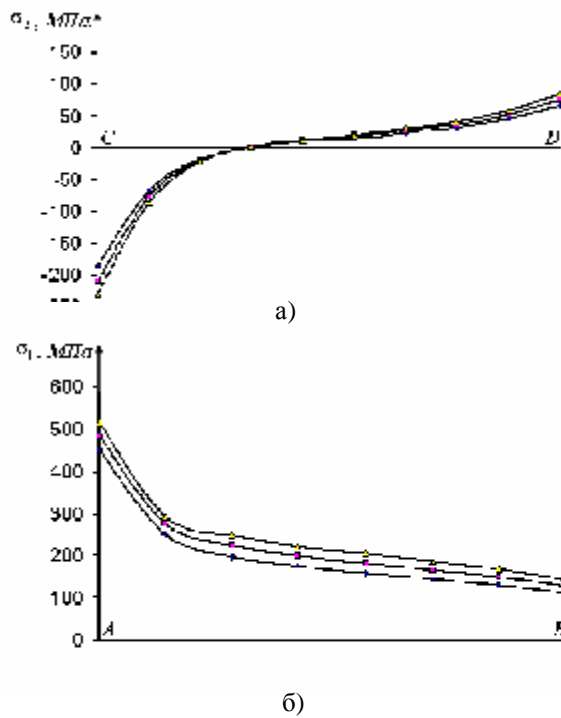


Рис. 3. Розподіл напружень у характерних перерізах

2. Ling C.-B. The stresses in a plate containing an overlapped circular hole / C.-B. Ling // J. Appl. Phys. — 1948. — 19, No. 4. — P. 405—411.

3. Підстригач Я. С. Напруження в площині, ослабленій двома нерівними круговими отворами // Доп. АН УРСР. — 1953. — № 6. — С. 456—460.

4. Підстригач Я. С. Вибрані праці / Я. С. Підстригач. — К.: Наук. думка, 1995. — 460 с.

5. Панасюк В. В. До питання про визначення концентрації напружень у розтягнутій пластині з двома отворами. / В. В. Панасюк, М. П. Саврук // Мат. методи та фіз.-мех. поля — 2008. — 51, № 2. — С. 112—123.

6. Мокряков В. В. Метод мультипольных разложений в задачах теории упругости для плоскости с круговым отверстием: Дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матем. наук / В. В. Мокряков. — М., 2008. — 136 с.

7. Гарт Э. Л. Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей / Э. Л. Гарт, И. В. Борисовская // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. — Д.: Вид-во ДНУ, 2004. — Вип. 8. — Т. 2. — С. 44 — 51.

8. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах те-

рии упругости / Э. Л. Гарт // Доп. НАН України. — 2008. — № 6. — С. 56—61.

9. Гарт Э. Л. Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению задачи Кирша / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконт // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2008. — Вип. 12. — С. 34—42.

10. Гудрамович В. С. Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению упруго-пластических задач для пластин с отверстиями / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконт // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. — Д., 2009. — Вип. 10. — С. 76—83.

11. Гудрамович В. С. Повышение вычислительной эффективности проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов при использовании адаптивных сеток / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконт // Theoretical Foundation of Civic Engineering. — Warsaw, 2009. — № 17. — P. 99 — 104.

12. Качанов Л. М. Вариационные методы в теории пластичности / Л. М. Качанов // Механика твердого тела. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. — М.: Наука, 1966. — Вып. 3. — С. 177—190.

13. Угодчиков, А. Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек / А. Г. Угодчиков, Ю. Г. Коротких. — К.: Наук. думка, 1971. — 220 с.

14. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. — М.: Наука, 1975. — С. 51—73.

15. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. ? М.: Наука, 1978. — 592 с.

16. Кузьменко В. И. Трёхмерные контактные задачи для многослойного упругопластического пакета / В. И. Кузьменко // Изд. АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1984. — № 4. — С. 105—112.

Отримана 25.05.09

S. Rjabokon

Reserch of the elastoplastic state for plate with elliptic hole using projective-iterative schemes of finite element method

Dnepropetrovsk National University, Dnepropetrovsk

Algorithm for solution of elastoplastic problem for rectangular plate with elliptic hole on the basis of projective-iterative variant of finite elements method is developed. Plastic deformation of material was taken into account with use of the variable parameters of elasticity method. Comparative analysis for obtained results with known solutions is realized.