З. Стоцько

Професор, д-р техн. наук

Б. Сокіл

Професор, д-р техн. наук

В. Топільницький

Доцент, канд. техн. наук

М. Сокіл

Канд. техн. наук

Національний Університет
«Львівська політехніка»,
м. Львів

УДК 534.111

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ОДНОВИМІРНИХ ТІЛ ПРИ ЇХ ПОЗДОВЖНЬОМУ РУСІ

Узагальнено методику дослідження нелінійних коливань одновимірних тіл, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, на нові класи їхніх математичних моделей. Вона базується на ідеї подання процесу в об'єктах дослідження у вигляді накладання хвиль різних довжин однакових частот і асимптотичних методах Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ).

хвильовий процес, дисперсійні співвідношення, амплітудно-частотна характеристика, асимптотичні методи

Коливні процеси, які відбуваються в одновимірних пружних чи гнучких тілах (пристрої буріння, різнопланові системи транспортування — найрізноманітніші конвеєрні лінії та установки, підвісні дороги тощо), які характеризуються сталою чи змінною швидкостями руху, розглядались, наприклад, у працях [1 — 3]. Використовуючи різні підходи дослідження (аналітичні, експериментальні) у цих працях відзначено істотний вплив швидкості, фізико-механічних характеристик матеріалу, періодичних сил на амплітудно-частотну характеристику коливань. Проте розглянуті у вказаних працях підходи дослідження простотою не відзначаються або заздалегідь у них накладаються обмеження на крайові умови, що певним чином звужує межі використання методик при розв'язуванні багатьох прикладних задач.

Метою цієї статті є узагальнення методики аналітичного дослідження динамічних процесів рухомих нелінійних механічних систем [4, 5] на складніші системи. В її основу покладено ідею подання динамічного процесу в одновимірних механічних системах з поздовжнім рухом у вигляді накладання хвиль різних довжин, проте однакових частот. Такий підхід має обґрунтовану фізичну інтерпритацію і не суперечить методу Д'Аламбера побудови розв'язків рівнянь гіперболічного типу.

Постановка задачі. Математичною моделлю динамічних процесів одновимірних систем, які характеризуються сталою швидкістю руху за умови найпростіших законів взаємодії із зовнішнім середовищем, є диференціальне рівняння

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \left(\alpha^2 - V^2\right)u_{xx} + \gamma u = \varepsilon f\left(u, u_x, u_t\right), \qquad (1)$$

в якому $u(x,t)$ — переміщення перерізу рухомої частини механічної системи з координатою x у довільний момент часу t; α, γ — сталі, які виражаються через фізико-механічні й кінематичні параметри тіла і описують характер взаємодії із середовищем; V — швидкість поздовжнього руху; $f\left(u, u_x, u_t\right)$ — функція, яка враховує нелінійно пружні властивості матеріалу тіла, а також вплив сил опору і дисипативних сил на динаміку процесу (ε — малий параметр). Для вказаного рівняння розглянемо крайові умови:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0, \qquad (2,а)$$

$$u_x(x,t)\big|_{x=0} = u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0, \qquad (2,б)$$

які еквівалентні умовам відсутності поперечних переміщень тіл у фіксованих точках (крайові умови (2,а)) чи способу входження у вказані точки (крайові умови (2,б)). Зазначимо, що рівняння (1) досліджували для випадку $\gamma = 0$ (без врахування взаємодії із зовнішнім середовищем) у [4, 5], а для випадку $V = 0$ (воно має назву рівняння Клейна — Гордона) — у [6], і воно з достатньою точністю відображає динамічні процеси у сипких середовищах при їх вібротранспортуванні [7].

Методика дослідження. З врахування того, що ε є малим параметром, для побудови розв'язку крайових задач для рівняння (1) використаємо основну ідею побудови асимптотичних наближень диференціальних рівнянь, які містять малий параметр у правій частині [8]. Проте, на основі використання класичних методів Фур'є чи Д'Аламбера не вдається отримати навіть розв'язок незбуреного ($\varepsilon = 0$) лінійного рівняння, яке відповідає (1). Тому, розвиваючи загальну ідею праць [4, 5], розв'язок крайових задач для рівняння (1) шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду

$$u\left(x,t\right) = C_1 \cos\left(\kappa x + \omega t + \varphi\right) + \\ + C_2 \cos\left(\chi x - \omega t + \psi\right) + \sum_{i=1} \varepsilon^i U_i\left(a, x, \phi\right) \quad (3)$$

де, $U_i(a,x,\vartheta)$ — 2π-періодичні за ϑ функції, які задовольняють умови, що випливають з (2,а) чи (2,в), а a, φ, ψ, κ, χ, ω, C_1, C_2 — сталі, зміст і вигляд яких буде встановлено нижче.

Незбурене рівняння. Для встановлення зв'язку між параметрами φ, ψ, κ, χ, ω, C_1, C_2, які описують коливання лінійної моделі процесу, розглянемо незбурене рівняння, що відповідає (1). Воно дає змогу отримати дисперсійні співвідношення такого вигляду:

$$\left(\alpha^2 - V^2\right)\kappa^2 - \omega^2 - 2V\kappa\omega + \gamma = 0, \\ \left(\alpha^2 - V^2\right)\chi^2 - \omega^2 + 2V\chi\omega + \gamma = 0 . \quad (4)$$

Додаткові умови, які дають можливість знайти зв'язок між шуканими параметрами, знаходимо з крайових умов, які будуть виконуватись за таких тотожностей:

$$C_1 \cos(\omega t + \varphi) + C_2 \cos(\omega t - \psi) \equiv 0, \\ C_1 \cos(\kappa l + \omega t + \varphi) + C_2 \cos(\chi l - \omega t + \psi) \equiv 0 \quad (5,а)$$

— для випадку крайових умов (2,а) і

$$C_1 \kappa \sin(\omega t + \varphi) - C_2 \chi \sin(\omega t - \psi) \equiv 0, \\ C_1 \kappa \sin(\kappa l + \omega t + \varphi) + C_2 \chi \sin(\chi l - \omega t + \psi) \equiv 0 \quad (5,б)$$

— для випадку крайових умов (2,б).

З дисперсійних співвідношень (4) і тотожностей (5,а) чи (5,б) знаходимо хвильові числа прямої та відбитої хвиль, тобто κ, χ, їхню частоту ω:

$$\kappa = \frac{k\pi}{l} + \frac{V}{\alpha l}\sqrt{k^2\pi^2 + \frac{l^2\gamma}{\alpha^2 - V^2}}\ , \chi = \frac{k\pi}{l} - \frac{V}{\alpha l}\sqrt{k^2\pi^2 + \frac{l^2\gamma}{\alpha^2 - V^2}}\ ,$$

$$\omega = \frac{\alpha^2 - V^2}{\alpha l}\sqrt{k^2\pi^2 + \frac{l^2\gamma}{\alpha^2 - V^2}}\ , \quad (6)$$

а також зв'язок між початковими фазами $\varphi = -\psi$ та амплітудами вказаних хвиль: $C_1 = -C_2 = a$ — для крайових умов (2,а); $C_2 = C_1 \dfrac{\kappa}{\chi} = a$ — для крайових умов (2,б).

З урахуванням отриманого, одночастотний хвильовий процес незбуреного рівняння (1) для випадку крайових умов (2,а) чи (2,б) описується відповідно залежностями:

$$u(x,t) = a \cos\left[\frac{k\pi}{l} x + \rho\left(Vx + \left(\alpha^2 - V^2\right)t\right) + \varphi\right] - \\ - a \cos\left[\frac{k\pi}{l} x + \rho\left(Vx - \left(\alpha^2 - V^2\right)t\right) - \varphi\right] \quad (7,а)$$

та

$$u(x,t) = aos\left[\frac{k\pi}{l} x + \rho\left(Vx + \left(\alpha^2 - V^2\right)t\right) + \varphi\right] + \\ + \frac{\kappa}{\chi} \cos\left[\frac{k\pi}{l} x + \rho\left(Vx - \left(\alpha^2 - V^2\right)t\right) - \varphi\right] \quad , (7,б)$$

де

$$\rho = \sqrt{k^2\pi^2 + \frac{l^2\gamma}{\alpha^2 - V^2}}\ .$$

На рис. 1 і рис. 2 наведені залежності частоти коливань і хвильових чисел від швидкості руху тіл.

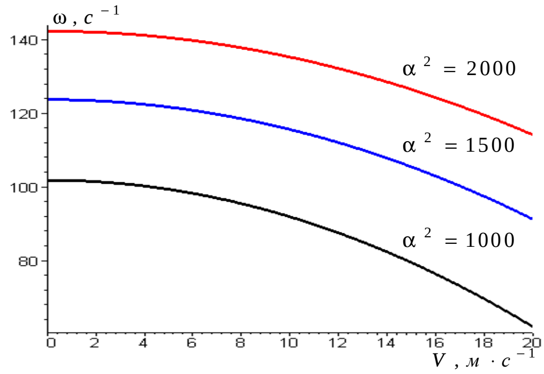

Рис. 1. Залежність частоти коливань від швидкості повздовжнього руху

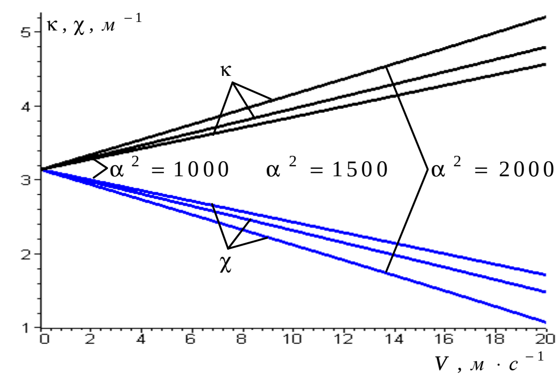

Рис. 2. Залежність хвильових чисел прямої та відбитої хвиль поздовжнього руху тіла від швидкості руху

Збурене рівняння. Якщо для незбуреного випадку параметри a і φ є сталими, то наявність різного роду нелінійних сил порушує, взагалі кажучи, це твердження, тобто для незбуреного випадку параметри a і φ будуть вже змінними величинами. Існує декілька гіпотез щодо характеру їх зміни. Так для «довгих» систем вважається, що амплітуда і фаза хвиль є функціями обидвох незалежних змінних. Такий підхід при дослідженні хвильових процесів одновимірних систем розглядався у [9]. Дещо простіший підхід (для «коротких» систем) розглянуто в [4, 5], де вважалося, що вказані параметри змінюються лише в часі. Нижче розгянемо саме цей випадок. Відповідно до основної ідеї асимптотичних методів КБМ [10, 11] закони зміни в часі амплітуди і частоти процесу можна задавати за допомогою диференціальних рівнянь виду

$$\dot{a}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_2(a)+\ldots,\quad \dot{\phi}=\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a)+\ldots, \qquad (8)$$

в яких праві частини, тобто функції $A_1(a)$, $A_2(a)$, ..., $B_1(a)$, $B_2(a)$, ... визначаються так, щоб асимптотичне подання (3) з потрібним ступенем точності задовольняло вихідне рівняння (1). Диференціюючи (3), з врахуванням вказаного вище, отримуємо:

$$u_{tt}(x,t)=-a\omega^2\left(cos(\kappa x+\phi)-\delta cos(\chi x+\phi)\right)-$$
$$-\left(\frac{d^2a}{dt^2}+2\omega a\frac{d\varphi}{dt}+a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\left(cos(\kappa x+\phi)-\delta cos(\chi x+\phi)\right)-$$
$$-2\omega\frac{da}{dt}\left(sin(\kappa x+\phi)+sin(\chi x-\phi)\right)+\varepsilon\left\{\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\right.$$
$$+\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial\phi^2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2+\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial a\partial\phi}\frac{da}{dt}\frac{d\phi}{dt}+$$
$$\left.+\frac{\partial U_1(a,x,\phi)}{\partial a}\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{\partial U_1(a,x,\phi)}{\partial\phi}\frac{d^2\phi}{dt^2}\right\}+\varepsilon^2, \qquad (9)$$

$$u_{xx}(x,t)=-a\left(\kappa^2 cos(\kappa x+\phi)-\chi^2\delta cos(\chi x-\phi)\right)+$$
$$\varepsilon\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial x^2}+\varepsilon^2\ldots,$$
$$u_{tx}(x,t)=-a\omega\left(\kappa cos(\kappa x+\phi)+\chi\delta cos(\chi x-\varphi)\right)-$$
$$-a\frac{d\varphi}{dt}\left(\kappa cos(\kappa x+\phi)+\chi\delta cos(\chi x-\varphi)\right)-$$
$$-\frac{da}{dt}\left(\kappa sin(\kappa x+\phi)-\chi\delta sin(\chi x-\phi)\right)+$$
$$\varepsilon\left\{\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial x\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial x\partial\phi}\frac{d\phi}{dt}\right\}+\varepsilon^2\ldots,$$

де $\phi=\omega t+\varphi$, $\delta=1$ — для крайових умов (2,а) і $\delta=\kappa/\chi$ — для крайових умов (2,б).

Підставляючи (9), (3), з врахуванням (8), у вихідне рівняння (3), після зрівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε отримуємо диференціальне рівняння, яке зв'язує невідомі функції $U_1(a,x,\phi)$, $A_1(a)$, $B_1(a)$:

$$\omega^2\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial\phi^2}+2V\omega\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial x\partial\phi}-\left(\alpha^2-V^2\right)\frac{\partial^2 U_1(a,x,\phi)}{\partial x^2}+$$
$$+\gamma U_1(a,x,\phi)=f_1(a,x,\phi)+\Delta_1(x)\left(A_1(a)cos\phi-aB_1 sin\phi\right)+$$
$$\Delta_2(x)\left(A_1(a)sin\phi+aB_1 sin\phi\right), \qquad (10)$$

де $\Delta_1(x)=(\omega+\kappa V)sin\,\kappa x+(\omega-\chi V)sin\,\chi x$,

$$\Delta_2(x)=(\omega+\kappa V)cos\,\kappa x-(\omega-\chi V)cos\,\chi x,$$

$$f_1(a,x,\phi)=f(u,u_x,u_t)\Big|_{\substack{u=a(cos(\kappa x+\phi)-cos(\chi x-\phi)),\\ u_x=-a(\kappa\, sin(\kappa x+\phi)-\chi\, sin(\chi x-\phi)),\\ u_t=-a\omega(sin(\kappa x+\phi)+sin(\chi x-\phi)).}}$$

— для крайових умов (2,а) і

$$\Delta_1(x)=(\omega+\kappa V)sin\,\kappa x+\kappa\left(V-\frac{\omega}{\chi}\right)sin\,\chi x,$$

$$\Delta_2(x)=(\omega+\kappa V)cos\,\kappa x-\kappa\left(V-\frac{\omega}{\chi}\right)cos\,\chi x,$$

$$f_1(a,x,f)=f(u,u_x,u_t)\Big|_{\substack{u=a(cos(\kappa x+\phi)-cos(\chi x-\phi)),\\ u_x=-a(\kappa\, sin(\kappa x+\phi)-\chi\, sin(\chi x-\phi)),\\ u_t=-a\omega(sin(\kappa x+\phi)+sin(\chi x-\phi)).}}$$

— для крайових умов (2,б).

Аналогічного вигляду отримуються і рівняння для другого й наступних наближень з тією лише різницею, що функції $f_2(a,x,\phi)$, $f_3(a,x,\phi)$, ... мають складніший вигляд. Для однозначного визначення функцій, які описують закони зміни в часі параметрів a та ϕ, накладемо на функції $U_1(a,x,\phi)$, $U_2(a,x,\phi)$,... додаткові умови, а саме: вказані функції не повинні містити у розкладах доданків, пропорційних головним гармонікам часової змінної. Вказане буде виконуватись, якщо справедливі співвідношення:

$$\int_0^{2\pi}U_1(a,x,\phi)cos\,\phi d\phi=0.\quad \int_0^{2\pi}U_1(a,x,\phi)sin\,\phi d\phi=0. \qquad (11)$$

З диференціального рівняння (10), враховуючи (11), отримуємо залежності, які визначають закони зміни амплітудно-частотної характеристики:

$$A_1(a)=\frac{\varepsilon}{2\pi l\left[(\omega+\kappa V)^2+(\omega-\chi V)^2\right]}\int_0^l\int_0^{2\pi}f_1(a,x,\phi)\{\Delta_1(x)cos\,\phi+\Delta_2(x)sin\,\phi\}d\phi dx, \qquad (12)$$

$$B_1(a)=\frac{\varepsilon}{a2\pi l\left[(\omega+\kappa V)^2+(\omega-\chi V)^2\right]}\int_0^l\int_0^{2\pi}f_1(a,x,\phi)\{\Delta_1(x)sin\,\phi-\Delta_2(x)cos\,\phi\}d\phi dx$$

Для визначення невідомої функції $U_1(a,x,\phi)$ її, а також відому функцію $f_1(a,x,\phi)$ подамо у вигляді рядів Фур'є:

$$U_1(a,x,\phi)=\sum_{\substack{m\\ m\neq k}}\sum_{\substack{n\\ n\neq k}}U_{1mn}(a)X_m(x)exp(in\phi), \qquad (13)$$

$$f_1(a,x,\phi)=\sum_{\substack{m\\ m\neq k}}\sum_{\substack{n\\ n\neq k}} f_{1mn}(a)X_m(x)exp(in\phi), \qquad (14)$$

де $f_{1mn}(a)$ — відомі коефіцієнти розкладу функції $f_1(a,x,\phi)$, тобто

$$f_{1mn}(a)=\frac{1}{\pi l}\int_0^l\int_0^{2\pi} f_1(a,x,\phi)X_m(x)exp(-in\phi)\,d\phi dx,$$

а $U_{1mn}(a)$ — невідомі коефіцієнти; $\{X_m(x)\}$ — відома повна система функцій, яка вибирається так, щоб виконувались крайові умови (2,а) чи (2,б). Найпростіше за систему функцій $\{X_m(x)\}$ вибрати функції $\left\{sin\frac{m\pi}{l}x\right\}$ для крайових умов (2,а) і $\left\{cos\frac{m\pi}{l}x\right\}$ — для умов (2,б).

Підставляючи (13) і (14) у рівняння (10), з врахуванням умов, накладених на невідому функцію $U_1(a,x,\phi)$, отримуємо

$$U_{1mn}(a)=\frac{f_{1mn}(a)}{2iVmn\omega-n^2\omega+\left(\alpha^2-V^2\right)m^2+\gamma}. \qquad (15)$$

На рис. 3, рис. 4, використовуючи викладену методику і числове інтегрування рівнянь у стандартному вигляді (12), подані закони змін в часі амплітуди коливань і частоти коливань одновимірних пружних чи гнучких тіл, що перебувають у поздовжньому русі для випадку:

$$f(u,u_x,u_t)=\delta u_t+\beta u_{xx}(u_x)^2.$$

Наведені залежності показують, що по-перше, амплітудно-частотна характеристика коливань одновимірних пружних чи гнучких тіл, що перебувають у поздовжньому русі, істотно залежить як від нелінійних сил, так і від швидкості поздовжнього руху; по-друге, за швидкості поздовжнього руху $V=\alpha$ відбувається зрив коливань у нелінійній моделі процесу; по-третє, значення критичної швидкості за якої відбувається зрив коливань у нелінійній моделі процесу залежить не тільки від фізико-механічних характеристик системи, але й від амплітуди коливань. Наведені результати особливо актуальні при дослідженні впливу періодичних збурюючих сил на процес коливань.

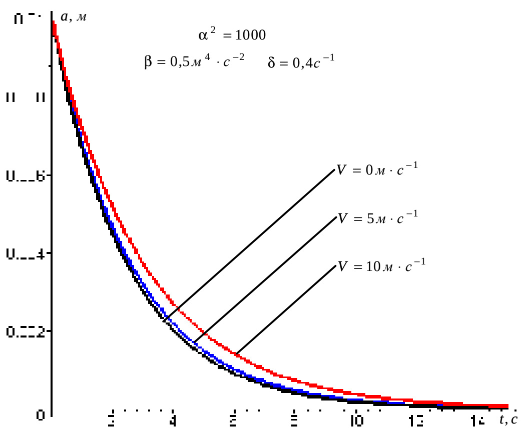

Рис. 3. Закон зміни в часі амплітуди коливань

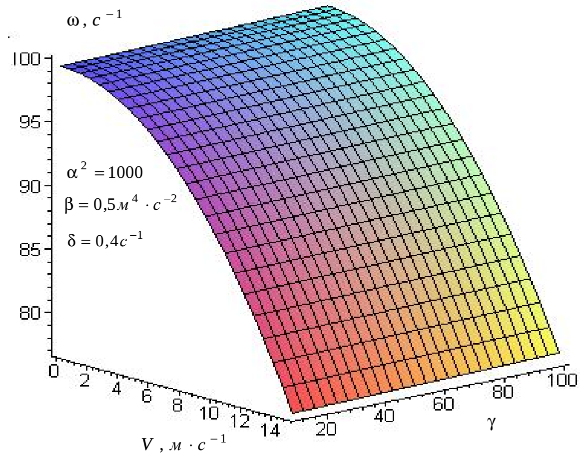

Рис. 4. Залежність частоти коливань від параметрів *V* і g

Висновки. Як видно з результатів проведених досліджень і отриманих графічних залежностей, у таких нелінійних задачах частота коливань одновимірних тіл нелінійно зменшується зі збільшенням швидкості їх поздовжнього руху, а амплітуда коливань стабілізується і зменшується в часі після початку руху тіла.

Розроблена методика дослідження динамічних процесів тіл, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, в основі якої лежить хвильова теорія руху та отримані розрахункові формули можуть бути базою для дослідження динамічних процесів широкого класу елементів машин. Її можна застосовувати (після нескладних доопрацювань) і для дослідження коливань сипких середовищ при їх вібротанспортуванні чи сепарації. Особливо актуальними результати, отримані у статті, можуть бути при дослідженні впливу періодичних збурень, зокрема резонансних явищ, які можуть виникати як небажані під час експлуатації машин, механізмів, пристроїв, що мають у своєму складі рухомі одновимірні тіла.

Література

1. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Ведение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. — К.: Наук. думка,1972. — 224 с.

2. *Доценко П.Д.* Колебание и устойчивость движущейся полосы // Машиноведение. — 1969. — №5. — С. 18—24.

3. *Башта О.Т.* Некоторые вопросы колебаний трубопроводовс протекающей житкостью / Сб. «Рассеяние энергии при колебании механических систем». — К.: Наук. думка, 1968. — С. 23—29.

4. *Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б.* Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. — Львів: УДЛТУ. — 2003. — Вип. 28. — С. 81—89.

5. *Харченко Є.В., Сокіл М.Б.* Вплив періодичного збурення на багаточастотні коливання одновимірних нелінійно пружних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом // Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. — Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». — Львів. — 2007. — №588. — С. 81—89.

6. *Митропольский Ю.А.* О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна — Гордона // Укр. мат. журн. — 1995. — 47, №9. — С. 1209 — 1216.

7. *Stotsko Z., Sokil B., Topilnytskiy V.* Complex mathematical model and optimization of vibration volumetric treatment for surfaces of machine parts // Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineerin. — 2007. — 24. — P. 283—290.

8. *Nayfe A.H.* Perturbation Methods. — New York: John Wiley and Sons, 1973. — 425 p.

9. *Рабинович М.И., Розенблюм Л.А.* Об асимптотических решениях нелинейных уравнений в частных производных // ПММ. — 1972. — 36. — №2.— С. 330—343.

10. *Bogolubov N.N., Mitropolsky Yu.A.* Asimptotische Methode in der Theori der nichtlinearen. — Schwindungen, Berlin: Acad. Verlag, 1965.— 453 s.

11. *Mitropolsky Yu. A.*and *Moseenkov B.I.* The Monofrequency Method in the Dynamic Analisys of Structures. — New York: A Special Research Report,1967. — 104 p.

Отримана 21.05.09

Z. Stotsko, B. Sokil, V. Topilnytskyj, M. Sokil
A mathematical design of vibrations of unidimensional bodies is at their longitudinal motion
National University «Lvivska Politechnika», Lviv

Generalized method of research of nonlinear vibrations of unidimensional bodies which are characterized the permanent rate of longitudinal movement, on new classes them mathematical models. It is based on the idea of presentation of process in the objects of research as imposition of waves of different lengths of identical frequencies and asymptotic methods of Krilova-bogolyubova-mitropol'skogo (KBM).

² íôîð ì àö³ÿ

MULTISCALE EFFECTS IN FATIGUE METALS

5 July 2010 - 9 July 2010
Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

The topics discussed during the colloquim are:

• *experimental complementarities* between TEM, SEM with EBSD, AFM and new opportunities offered by kinematic and/or thermal full-field measurements and acoustic emission at micrometric scales which enable the study of the forerunner signs of fatigue damage.

• *numerical tools* including Polycrystalline grain modelling and Discrete Dislocation Dynamic which are of great interests in crystalline plasticity for the definition of multiscale fatigue criteria.

• *multiscale fatigue criteria and structural computations*

The application of these models and techniques will be illustrated on different fatigue contexts: isothermal or non-isothermal, uniaxial or multiaxial loadings, contact and/or fretting fatigue, constant or variable amplitude loadings. Within the topics, a special attention will be accorded to complex cyclic loadings as well as to new metallic materials and/or structures.

Contact:
Dr. Andrei Constantinescu
CNRS Ecole Polytechnique
Laboratoire de Mécanique des Solides
91128 Palaiseau cedex, France
phone:+33 1 69 33 57 56
fax: +33 1 69 33 57 06
email: andrei.constantinescu@lms.polytechnique.fr