

УДК 539.3

## РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ У ТЕРМОПРУЖНІЙ НЕОДНОРІДНІЙ АНІЗОТРОПНІЙ КРУГОВІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

У. Жидик

Інженер-математик,  
Національний університет  
«Львівська політехніка»,  
м. Львів

*Досліджені вільні термопружні коливання анізотропної композитної оболонки з ортогональним і косокутним армуванням. Вихідна модель включає анізотропію фізико-механічних характеристик матеріалу у поперечному напрямі. Отримано частотне рівняння для пружних гармонічних коливань у нескінченій осесиметричній термопружній круговій циліндричній оболонці шаруватої структури. Числові результати фазових швидкостей у залежності від параметра довжини хвилі та від параметра анізотропії наведено для графітоепоксидного композиту. Для оцінення справедливості використаної теорії зроблено порівняння деяких з отриманих результатів з аналогічними результатами, отриманими на основі теорії пружності.*

**хвиля, частота, термопружність, неоднорідна анізотропна оболонка**

Розрахунок динамічних характеристик циліндричних оболонок, які працюють в умовах нестационарного температурного навантаження, є актуальною проблемою [1 — 4]. Більшість досліджень у цьому напрямі стосувались однорідних ізотропних [3 — 6] або ортотропних [4, 7 — 9] оболонок. Поведінка неоднорідних конструкцій має значно складніший фізичний характер [2, 10 — 12]. Динамічні задачі термопружності для неоднорідних оболонок розглядалися мало [2, 10]. Широке використання сучасних армованих волокнами композитних матеріалів вимагає проведення відповідних досліджень з використанням теорії термопружності неоднорідного анізотропного тіла [2, 13].

Мета статті — на основі рівнянь взаємозв'язаної термопружності дослідити динамічні процеси в шаруватих анізотропних кругових циліндричних оболонках.

**Постановка задачі і метод розв'язування.** Розглянемо неоднорідну анізотропну кругову циліндричну оболонку сталої товщини  $2h$ , віднесено до циліндричної системи координат  $x, \theta, z$ , які позначають відповідно осьову, колову та радіальну координати. Початок координат помістимо у серединній поверхні оболонки з радіусом  $R$ .

Нехай на оболонку діють силові навантаження, а через бокові поверхні  $z = \pm h$  відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем. Динамічну поведінку такої оболонки дослідимо на основі математичної моделі теорії взаємозв'язаної термопружності неоднорідних за товщиною анізотропних оболонок [10, 13], яка дає можливість врахувати всі фізико-механічні характеристики анізотропії, у тому числі й у поперечному напрямі, що дуже важливо для істотно анізотропних матеріалів. За вихідну візьмемо зв'язану систему рівнянь руху і рівнянь

теплопровідності в узагальнених переміщеннях  $u_j, \gamma_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) і характеристиках температури  $T_1, T_2$  [10]:

$$\sum_k^8 L_{rk} y_k = b_r \quad (r=1, 2, \dots, 6), \quad (1)$$

$$\sum_k^8 L_{lk} y_k = b_l \quad (l=7, 8), \quad (2)$$

де  $y_j = u_j, y_{3+j} = \gamma_j$  ( $j=1, 2, 3$ ),  $y_7 = T_1, y_8 = T_2$ ;  $L_{rk}$  ( $L_{rk} = L_{kr}$  для  $r, k=1, 2, \dots, 6$ ) — диференціальні оператори не вище другого порядку;  $b_r, b_l$  — вільні члени, які залежать від силового і температурного навантаження. Інші позначення тут і далі взяті з праці [10].

Якщо не враховувати термопружну взаємодію, то система (1), (2) стає незв'язаною. Рівняння руху (1) описуватимуть динамічну поведінку пружної оболонки для якої температурне поле визначається окремо з рівнянь теплопровідності (2).

Дослідимо розповсюдження гармонічних хвиль в осесиметричній термопружній циліндричній оболонці нескінченної довжини, яка виготовлена з неоднорідного композитного матеріалу. Для цього розв'язок системи рівнянь (1), (2) подамо у вигляді

$$\{u_j, \gamma_j, T_1, T_2\} = \{U_j^*, \Gamma_j^*, T_1^*, T_2^*\} \exp[i(sx - \omega t)], \quad (3)$$

де  $U_j^*, \Gamma_j^*, T_1^*, T_2^*$  — амплітуди хвиль; ( $j=1, 2, 3$ );  $i = \sqrt{-1}$ ;  $s$  — хвильове число;  $\tau$  — змінна часу;  $\omega$  — кругова частота.

Довжина хвилі  $L$ , хвильове число  $s$ , кругова частота  $\omega$  і швидкість розповсюдження хвиль  $c$  поєднані між собою відомими співвідношеннями  $\omega = 2\pi c/L$ ,  $s = 2\pi/L$ .

Підставляючи розв'язок (3) у систему однорідних рівнянь (1), (2), знайдемо характеристичне рівняння, ліву частину якого запишемо у вигляді детермінанта

$$\det(E_{rk}) = 0 \quad (r, k=1, 2, \dots, 8), \quad (4)$$

де  $E_{rk} = E_{kr}$  для  $r, k=1, 2, \dots, 6$ . Значення елементів  $E_{rk}$  можуть бути легко визначені, але тут не наведені через їхню громіздкість.

Нехтуючи термопружною взаємодією, з (4) отримаємо два рівняння:

$$\det(E_{rk}) = 0 \quad (r, k=1, 2, \dots, 6), \quad (5)$$

$$E_{77}E_{88} - E_{78}E_{87} = 0. \quad (6)$$

Рівняння (5) характеризує чисто пружні коливання неоднорідної циліндричної оболонки, а рівняння (6) визначає у ній періодичні зміни інтегральних характеристик температури.

Зазначимо, що для неоднорідної оболонки (на відміну від однорідної [5, 7, 8, 15]) при осесиметричних рухах змінні  $u_2$  і  $\gamma_2$  не дорівнюють нулю, а тому рівняння (4) має шістнадцятий порядок відносно хвильового числа  $s$  і чотирнадцятий — відносно частоти  $\omega$ , яку вважатимемо дійсною величиною. Корені рівняння (4) відносно  $s$  є комплексними. Дванадцять з них відповідають видозмі-

неним згасаючим пружним хвилям, а чотири — видозміненим тепловим хвилям. При цьому напрям розповсюдження хвилі визначається знаком дійсної частини комплексного кореня.

Фазова швидкість  $c$  і коефіцієнт згасання  $\delta$  пружних хвиль у термопружній оболонці визначаються формулами  $c = \omega/Re s$ ,  $\delta = Im s$ .

Введемо безрозмірні величини:  $b = Rc_s C^{(1)}/\Lambda_{33}^{(1)}$ ;  $\gamma_i = T_0 \alpha_{i1}^t A_{11}^t / C^{(1)}$  — коефіцієнт термопружної взаємодії, нульове значення якого відповідає незв'язаній задачі;  $c' = c/c_s$  — безрозмірна фазова швидкість, де

$$c_s = \sqrt{2hE_1/\rho^*}, \quad \rho^* = \int_{-h}^h \rho dz.$$

**Аналіз числових результатів.** Числові результати отримані для оболонки, яка складена з жорстко з'єднаних між собою композитних шарів однакової товщини, що армовані волокнами в одному напрямі. Властивості матеріалу кожного шару в напрямі волокон будемо позначати індексом 1, а в перпендикулярних до волокон напрямках — відповідно індексами 2 і 3. Розглядаються оболонки симетричної відносно серединної поверхні структури з ортогональним і косокутним армуванням. Оболонки з ортогональним армуванням складені з шарів так, що напрямом волокон армування кожного шару орієнтовані під кутами 0 або 90° до осей оболонки. Оболонки з косокутним армуванням складені з шарів так, що напрямом волокон армування орієнтовані під кутами +φ° або -φ° до осей оболонки. За фізико-механічні характеристики кожного шару взято такі, якими характеризуються високомодульні волокнисті матеріали, наприклад, графітоепоксидний композит [14]:  $\nu_{21} = \nu_{31} = 0,25$ ;  $\nu_{32} = 0,33$ ;  $G_{23} = 0,2E_3$ ;  $E_2 = E_3 = 0,025E_1$ ;  $G_{12} = G_{13} = 0,5E_3$ ;  $\alpha_{22}^t = \alpha_{33}^t = 2\alpha_{11}^t$ ;  $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 0,5\lambda_{11}$ . Іншим параметрам надано таких значень:  $h/R = 0,1$ ;  $b = 10^6$ .

На основі характеристичного рівняння (4) проведено обчислення і побудовано відповідні графіки для випадку значення коефіцієнта термопружної взаємодії рівного  $\gamma_i = 0,1$ . На рис. 1 і рис. 2 наведено криві шести типів безрозмірних фазових швидкостей  $c'$  (позначених  $c'_1, c'_2$ ,

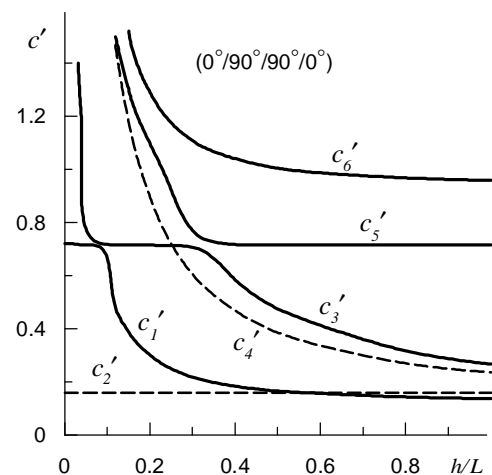


Рис. 1. Фазові швидкості ортогонально армованої оболонки в залежності від параметра довжини хвилі

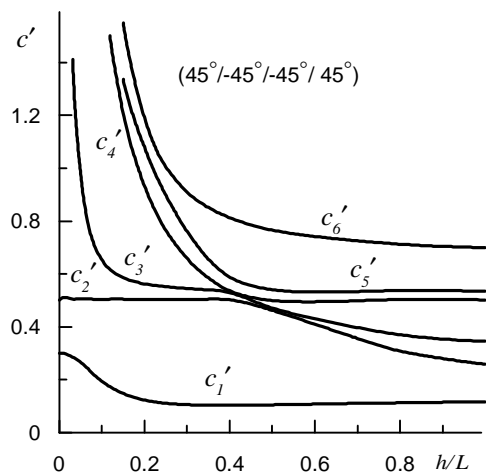


Рис. 2. Фазові швидкості косокутно армованої оболонки в залежності від параметра довжини хвилі

$c'_3, c'_4, c'_5, c'_6$ ) у залежності від параметра довжини хвилі  $h/L$  для чотиришарової оболонки симетричної структури з ортогональним армуванням ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) (рис. 1) і косокутним армуванням ( $45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ$ ) (рис. 2). Видно, що спосіб армування суттєво змінює картину поведінки дисперсійних кривих. При цьому слід зазначити, що для шаруватих оболонок з ортогональним армуванням, аналогічно як для однорідних оболонок [8], характеристичне рівняння (4) розпадається на два: одне описує чотири типи зв'язаних між собою поздовжніх і поперечних термопружних коливань (на рис. 1 суцільні лінії), а друге — два типи крутильних рухів, на які термопружний ефект не впливає (на рис. 1 — штрихові лінії). Для косокутного армування поздовжні, радіальні і крутильні рухи взаємозв'язані між собою і залежать від термопружного розсіювання (на рис. 2 криві фазових швидкостей не перетинаються).

Зі збільшенням довжини хвилі  $L$  швидкості нижчого згинного  $c'_1$  і нижчого крутильного  $c'_2$  типів коливань прямують до сталої величини, швидкості інших типів безмежно зростають. Зі зменшенням довжини хвилі величини швидкостей різних типів коливань наближаються до певних граничних значень. З числового аналізу випливає, що в термопружній оболонці ( $\gamma_t = 0,1$ ) фазові швидкості розповсюдження хвиль для всіх типів коливань у розглянутому діапазоні параметра довжини хвилі більші, ніж у пружній ( $\gamma_t = 0$ ).

Дослідження фазових швидкостей першого  $c'_1$  (суцільні лінії) і другого  $c'_2$  (штрихові лінії) типів коливань для чотиришарової косокутно армованої оболонки симетричної структури ( $\varphi^\circ/-\varphi^\circ/-\varphi^\circ/\varphi^\circ$ ) показано на рис. 3 і рис. 4.

Рис. 3 ілюструє вплив кута армування  $\varphi$  на фазові швидкості перших двох типів хвиль. Видно, що цей вплив істотний лише при значенні параметра довжини хвилі  $h/L$  близькому до нуля. Тоді фазова швидкість істотно збільшується зі зменшенням кута армування. Так, наприклад, фазова швидкість  $c'_1$  при  $\varphi = \pi/6$  більше, ніж у два рази перевищує таку швидкість при  $\varphi = \pi/3$ . Зі зменшенням довжини хвилі вплив кута армування стає неістотним.

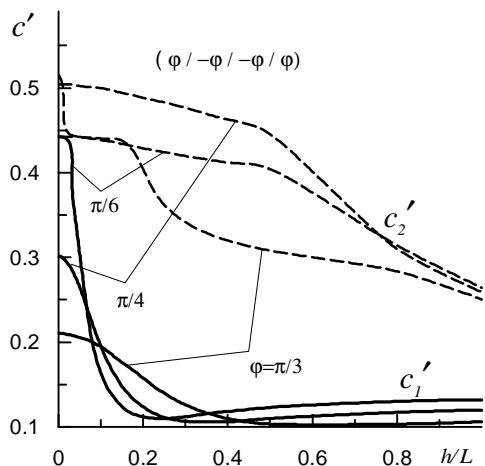


Рис. 3. Фазові швидкості  $c'_1$  і  $c'_2$  косокутно армованих оболонок в залежності від параметра довжини хвилі

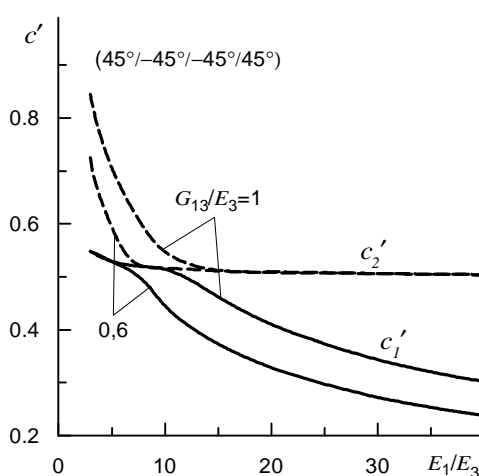


Рис. 4. Фазові швидкості  $c'_1$  і  $c'_2$  косокутно армованої оболонки в залежності від параметра анізотропії

Рис. 4 ілюструє вплив анізотропних властивостей матеріалу на фазові швидкості при  $\varphi = \pi/4$ . Видно, що зі збільшенням жорсткості у напрямі волокон, а також зі зменшенням зсувної жорсткості фазова швидкість  $c'_1$  істотно зменшується. Наприклад, швидкість  $c'_1$  для  $E_1/E_3 = 40$  порівняно з  $E_1/E_3 = 10$  зменшилася на 44 % при  $G_{13}/E_3 = 0,6$ , а для  $G_{13}/E_3 = 0,6$  порівняно з  $G_{13}/E_3 = 1$  — на 27 % при  $E_1/E_3 = 40$ . Фазові швидкості першого типу слабо чутливі до змін  $G_{13}/E_3$  при  $E_1/E_3 \leq 5$ , а фазові швидкості другого типу майже не змінюються при  $E_1/E_3 \geq 15$ .

Згасання вільних коливань нижчого типу внаслідок термопружного розсіювання енергії ілюструє рис. 5, на якому показана залежність логарифмічного декременту від відносної товщини шаруватої оболонки (штрихова лінія) і однорідної оболонки (суцільна лінія). Поведінка логарифмічного декременту, аналогічно, як і для ізотропного матеріалу [3, 6], свідчить, що згасання мале за низьких частот, потім зростає, досягаючи максимуму, а за високих частот знову падає. Це пояснюється тим, що за малих частот процес теплопровідності близький до

## Безрозмірні фазові швидкості

$h/L$	Теорія пружності [15]				Уточнена теорія оболонок			
	$c'_1$	$c'_2$	$c'_3$	$c'_4$	$c'_1$	$c'_2$	$c'_3$	$c'_4$
0,01	1,400	26,261	52,045	79,102	1,400	26,261	53,477	86,423
0,1	1,385	2,594	5,475	7,799	1,385	2,596	5,650	8,706
0,2	1,194	1,504	3,08	3,804	1,195	1,512	3,207	4,440
0,3	0,928	1,432	2,334	2,504	0,934	1,443	2,467	3,061
0,4	0,843	1,393	1,878	2,009	0,847	1,424	2,129	2,403
0,5	0,828	1,311	1,611	1,792	0,831	1,407	1,935	2,037

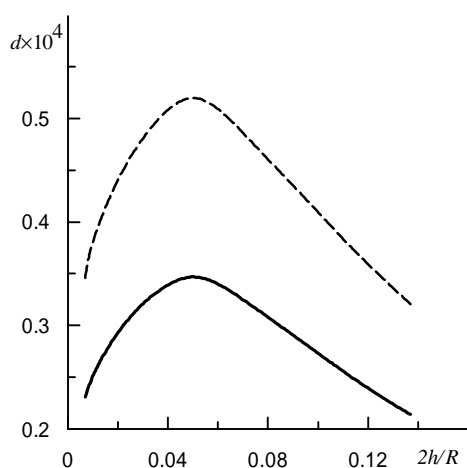


Рис. 5. Декремент згасання в залежності від відносної товщини

ізотермічного і тому майже повністю оборотний. За коливань, період яких приблизно рівний часу, який потрібний для розповсюдження тепла по товщині, відбувається необоротне перетворення механічної енергії у теплову. За коливань з високою частотою тепло не встигає розповсюдитись по товщині оболонки, тобто процес близький до адіабатичного і дисипація зменшується.

Результати, отримані вище базуються на наближених рівняннях теорії оболонок, виведених на основі гіпотез прямої лінії [13]. Тому для підтвердження правомірності використання наближених рівнянь при дослідженні вільних коливань, потрібно порівняти ці результати з точними, отриманими на основі рівнянь теорії пружності. Оскільки точні розв'язки відомі лише для випадку пружних коливань однорідних ортотропних оболонок [15], то саме для таких оболонок проведемо порівняльний аналіз. Розглянемо розповсюдження пружних хвиль в однорідній циліндричній оболонці нескінченної довжини, виготовленій з ортотропного матеріалу з такими пружними сталими [15]  $c_{ij} \times 10^5 \text{ кг/см}^2$ :  $c_{11} = 28,61$ ,  $c_{44} = 11,00$ ,  $c_{12} = 12,82$ ,  $c_{22} = 35,59$ ,  $c_{55} = 13,43$ ,  $c_{13} = 8,55$ ,  $c_{33} = 29,88$ ,  $c_{66} = 13,35$ ,  $c_{23} = 8,96$ .

У табл. 1 наведено значення безрозмірних фазових швидкостей чотирьох типів осесиметричних коливань (без крутильних) у залежності від різних значень параметра довжини хвилі  $h/L = 0,01 \div 0,5$  для нескінченної ортотропної циліндричної оболонки з відносною товщиною  $h/R = 0,5$ .

З табл. 1 видно, що навіть для товстих оболонок ( $h/R = 0,5$ ) результати, отримані на основі уточненої теорії оболонок, яка використовується тут, повністю узгоджуються з результатами, отриманими на основі теорії пружності (похибка для перших двох типів швидкостей не перевищує 7%). Зі зменшенням довжини хвилі похибка збільшується. Найбільша похибка між фазовими швидкостями спостерігається для четвертого типу коливань, який відповідає рухам розтягу-стиску у напрямі нормалі. Ймовірно це пояснюється тим, що переміщення у радіальному напрямі не є лінійними.

**Висновки.** Описана і проілюстрована методика розрахунку власних термопружних коливань композитних шаруватих анізотропних кругових циліндричних оболонок з ортогонально або косокутно армованими шарами. Для дослідження використано уточнену теорію оболонок, яка дає змогу врахувати всі фізико-механічні властивості анізотропного матеріалу.

Для підтвердження правомірності використання цієї теорії проведено порівняльний аналіз наближених розв'язків для однорідної ортотропної циліндричної оболонки з аналогічними точними розв'язками, отриманими на основі теорії пружності.

## Література

1. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
2. Подстригач Я. С., Ломакин Р. Н., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
3. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
4. Keene F.W., Hetnarsky R. B. Bibliography on thermal stresses in shells // J. Therm. Stresses. – 1990. – **13**, № 4. – P. 341–531.
5. Швец Р. Н. Осесимметричные термоупругие колебания цилиндрической оболочки // Прикл. механика. – 1969. – **5**, № 3. – С. 23–30.
6. McQuillen E. J., Brull M. A. Dynamic thermoelastic response of cylindrical shells // Trans. ASME. Ser. E. – 1970. – **37**, № 3. – P. 15–22.
7. Лунь Е. И. Швец Р. Н. Термоупругие колебания анизотропных цилиндрических оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига // Распространение

упругих и упруго-пластических волн. – Алма-Ата: Наука, 1973. – С. 245–251.

8. Швец Р. Н., Флячок В. М. Термоупругие колебания ортотропных цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1973. – 9, № 11. – С. 15–22.

9. Shirakawa K. Dynamic response of on orthotropic cylindrical shells to rapid heating // J. Sound and Vibr. – 1982. – 83, № 1. – P. 27–35.

10. Николишин М. М., Жидик У. В. Термопружні коливання неоднорідних анізотропних циліндричних оболонок // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – Т.44, № 2. – С. 33–40.

11. Донг С. Б., Нелсон Р. Б. О собственных колебаниях и волнах в слоистых ортотропных пластинках // Прикл. механика. Тр. амер. общ. инжен. механиков. – 1972. – №3. – С. 102–109.

12. Sun C.-T., Whitney J. M. Axisymmetric vibrations of laminated composite cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Am. – 1974. – 55, № 6. – P. 1238–1246.

13. Жидик У. В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних

оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72–75.

14. Композиционные материалы. Справочник. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

15. Mirsky I. Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis for Axisymmetric Vibrations of Orthotropic Shells / J. Acoust. Soc. Am. – 1965. – 12, № 5 – P. 549–555.

Отримана 20.12.09

U. Zhydyk

**Propagation of harmonic wave in a thermoelastic heterogeneous anisotropic circular cylindrical shell**

*National University «Lvivska Politechnika», Lviv*

*Natural thermoelastic vibration of anisotropic cross-ply and angle-ply composite shells are investigation A governing model includes anisotropy of physicomechanical properties in transverse direction.. Frequency equation for elastic harmonic axisymmetric vibrations of thermoelastic infinite laminated circular cylindrical shell is obtained. Numerical results of phase velocities versus wavelength for graphite-epoxy composites are given. The validity of the theory is assessed by comparing solutions obtained from the refined shell theory with the results of the exact theory.*

---

2í ôîðì àö³ÿ

## II INTERNATIONAL CONFERENCE ON TISSUE ENGINEERING (ICTE 2011),

an ECCOMAS Thematic Conference

Lisbon, Portugal

2nd to 4th June 2011

[http://www.cdr-sp.ipleiria.pt/index.php/TE\\_home.html](http://www.cdr-sp.ipleiria.pt/index.php/TE_home.html)

Tissue engineering is a multidisciplinary field that has seen intense development in the past few years. It combines efforts from biology, engineering and material science methods towards the development of biological substitutes to restore, maintain, or improve tissue functions. Mathematical and Computational methods have been intensely used to study tissue engineering issues, and the computational mechanics research community has demonstrated a special interest in this field.

Therefore, the ICTE 2011 will in focus on:

- \* Understanding the fundamentals of tissue engineering;
- \* Modelling and characterisation of scaffolds for tissue engineering;
- \* Modelling the inter-relationships between scaffolds and cell attachment, proliferation and differentiation;
- \* Design and development of scaffolds for tissue engineering;
- \* Fabrication and testing of scaffolds for tissue engineering;
  - \* Cell signalling;
  - \* Computational Bone Mechanics.