

УДК 539.3

## УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ ШАРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО НАСКРІЗНИМ ОТВОРОМ З ТОРЦЯМИ, ПОКРИТИМИ ДІАФРАГМОЮ (СИМЕТРИЧНИЙ ВИПАДОК)

Ю. Ковальов

Доцент, канд. фіз.-мат. наук,  
Сумський державний університет,  
м. Суми

*Розглянуто модельну задачу про симетричні коливання ізотропного шару, послабленого наскрізним отвором з торцями покритими діафрагмою. Крайова задача зведена до системи одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь другого роду. Результатом числового аналізу побудованого алгоритму є амплітудно-частотні характеристики, які встановлюють залежність відповідних «характеристичних» напружень на контурі отвору від частоти збурення.*

шар, коливання, отвір, напруження

Перспективними методами у просторовій динаміці пластин є метод суперпозиції [1] і метод однорідних розв'язків [2 — 4]. У праці [5] розглянуті динамічні змішані задачі теорії пружності для шару при змішаних умовах на частинах однойменних сторін. У [6] досліджено вплив анізотропії на динамічні характеристики вільних коливань скінченних циліндрів. Дослідженню особливостей спектра власних коливань транслопної дископодібної пластики в околі крайового резонансу присвячена праця [7]. У випадку «змішаних» умов на гранях шару (ковзне закріплення граней, або торці шару покриті діафрагмою жорсткою на розтяг і гнучкою на згин) гранична задача істотно простіша, ніж змішані задачі, розглянуті в [5].

Процедура розв'язання «змішаних» задач теорії пружності про усталені коливання шару з тунельними неоднорідностями була запропонована в праці [8]. Нижче ця методологія поширена на симетричну задачу.

**Постановка задачі.** Розглянемо пружний шар  $-h \leq x_3 \leq h$ ,  $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ , послаблений тунельними

вздовж осі  $0x_3$  наскрізними порожнинами-отворами, перетином яких є непересічні досить гладкі контури  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). На поверхнях порожнин діє пульсуючий тиск  $N = \operatorname{Re}(N_0 e^{-i\omega t})$ ,  $N_0 = C(h^2 - x_3^2)$ , ( $C = \text{const}$ ), а на нескінченності навантаження відсутнє.

**Побудова розв'язку.** Нехай механічні величини мають вигляд

$$u_i = \operatorname{Re}(U_i e^{-i\omega t}), \sigma_{ij} = \operatorname{Re}(\sigma_{ij}^0 e^{-i\omega t}) \\ (i, j = \overline{1,3}), \quad (1)$$

амплітуди компонентів заданого навантаження розвиваються в ряди Фур'є за координатою  $x_3$  на  $[-h, h]$ , а на гранях шару виконуються умови:

$$u_1(x_1, x_2, \pm h, t) = u_2(x_1, x_2, \pm h, t) = 0, \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h, t) = 0. \quad (2)$$

Запишемо амплітудні компоненти вектора переміщення у вигляді

$$U_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3 \quad (i=1,2),$$

$$U_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \quad (3)$$

де  $\gamma_k = (2k+1)\pi/2h$ .

Зображення амплітудних компонентів вектора переміщення (3) автоматично задовольняють умови (2) на гранях шару. Для опису стаціонарного хвильового процесу в ізотропному шарі будемо виходити з рівнянь руху

$$\sigma \operatorname{grad} \theta + \Delta \mathbf{u} = \frac{\rho}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad (4)$$

де  $\lambda, \mu$  – коефіцієнти Ламе,  $\nu$  – коефіцієнт Пуасона.

Підставляючи (1) і вирази (3) для амплітуд переміщень у рівняння руху, приходимо до системи

$$\kappa_k^{(2)} u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0 \quad (i=1,2),$$

$$\kappa_k^{(2)} u_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0. \quad (5)$$

де

$$\kappa_k^{(2)} = \nabla^2 - \beta_k^2, \quad (\beta_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_2^2, \quad \alpha_2 = \omega/c_2),$$

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k},$$

$$\partial_i = \partial/\partial x_i.$$

Безпосередньо з системи (5) знаходимо:

$$\kappa_k^{(1)} \theta_k = 0, \quad \kappa_k^{(1)} = \nabla^2 - (\gamma_k^2 - \alpha_1^2) \quad (\alpha_1 = \omega/c_1). \quad (6)$$

Введемо функцію  $\psi_k$  співвідношенням  $\theta_k = \kappa_k^{(2)} \psi_k$ . З (6) випливає, що  $\kappa_k^{(2)} \kappa_k^{(1)} \psi_k = 0$ . З урахуванням зв'язку між  $\theta_k$  і  $\psi_k$  інтегрування системи (5) дає:

$$u_{ik} = -\sigma \partial_i \psi_k + \omega_{ik}, \quad u_{3k} = -\sigma \gamma_k \psi_k + \omega_{3k},$$

$$\kappa_k^{(2)} \omega_{ik} = 0 \quad (i=1,2). \quad (7)$$

Задавши, щоб співвідношення  $\theta_k = \kappa_k^{(2)} \psi_k$  виконувалося фактично, приходимо до рівностей:

$$\omega_{1k} = \sigma \partial_2 \Omega_k, \quad \omega_{2k} = -\sigma \partial_1 \Omega_k,$$

$$\omega_{3k} = -\frac{1}{\gamma_k} (1 + \sigma) \kappa_k^{(1)} \psi_k, \quad (8)$$

де  $\Omega_k$  – довільний розв'язок рівняння  $\kappa_k^{(2)} \Omega_k = 0$ .

Враховуючи (7), (8) кінцево отримуємо:

$$u_{1k} - i u_{2k} = 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left( i \Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)} \right),$$

$$u_{3k} = -\sigma \gamma_k \Omega_k^{(1)} - \sigma \left[ \gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma \gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right] \Omega_k^{(2)}, \quad (9)$$

$$\theta_k = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Omega_k^{(1)}. \quad (9)$$

Тут  $\Omega_k^{(i)}$  – довільний розв'язок рівняння  $\kappa_k^{(i)} \Omega_k^{(i)} = 0$ ; функції  $\Omega_k$  визначають поворот елемента відносно осі  $Ox_3$ ;  $u_{ik}$  – амплітуди відповідних величин.

Інтегральні зображення функцій, які входять у (9), візьмемо у вигляді:

$$\Omega_k^{(1)} = \int_L p_{1k} K_0(\lambda_k r) ds +$$

$$+ \int_L p_{2k} \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\lambda_k r) d\zeta + \int_L p_{3k} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\lambda_k r) d\bar{\zeta},$$

$$\Omega_k^{(2)} = \int_L q_{1k} K_0(\beta_k r) ds +$$

$$+ \int_L q_{2k} \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\beta_k r) d\zeta + \int_L q_{3k} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\beta_k r) d\bar{\zeta}, \quad (10)$$

$$\Omega_k = \int_L f_{1k} K_0(\beta_k r) ds +$$

$$+ \int_L f_{2k} \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\beta_k r) d\zeta + \int_L f_{3k} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\beta_k r) d\bar{\zeta}. \quad (10)$$

де  $\lambda_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_1^2$ ,  $r = |\zeta - z|$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L = \cup L_j$ ,  $z = x_1 + ix_2$ ,  $K_0(\gamma r)$  – функція Макдональда нульового порядку;  $ds$  – елемент дуги контуру; щільності  $p_{ik}, q_{ik}, f_{ik}$  ( $i=1,3$ ) поки що невідомі.

Інтегральні зображення функцій (10) задовольняють умови випромінювання на нескінченності.

Крайові умови на  $L$  запишемо у формі:

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\Psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) = 2(N - iT),$$

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{-2i\Psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12}) = 2(N + iT),$$

$$(\sigma_{13} - i\sigma_{23}) e^{i\Psi} + (\sigma_{13} + i\sigma_{23}) e^{-i\Psi} = 2Z, \quad (11)$$

де  $\Psi$  – кут між зовнішньою нормаллю до контура  $L$  і віссю  $Ox_1$ .

Використовуючи закон Гука і формули (9), запишемо умови (11) у формі:

$$\frac{1}{\mu} (N_k - iT_k) = -\left[ \Lambda(1 - \sigma) + \sigma \lambda_k^2 \right] \Omega_k^{(1)} - \sigma \beta_k^2 \Omega_k^{(2)} +$$

$$+ 4\sigma e^{2i\Psi} \partial_{zz}^2 \left( i \Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)} \right),$$

$$\frac{1}{\mu} (N_k + iT_k) = -\left[ \Lambda(1 - \sigma) + \sigma \lambda_k^2 \right] \Omega_k^{(1)} - \sigma \beta_k^2 \Omega_k^{(2)} +$$

$$+ 4\sigma e^{-2i\Psi} \partial_{zz}^2 \left( -i \Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)} \right),$$

$$\frac{1}{\mu} Z_k = e^{i\psi} \partial_z \left( \mathcal{A}_k^* \Omega_k^{(1)} + \mathcal{B}_k^* \Omega_k^{(2)} + i \mathcal{D}_k^* \Omega_k \right) + e^{-i\psi} \partial_z \left( \mathcal{A}_k \Omega_k^{(2)} + \mathcal{B}_k \Omega_k^{(2)} - i \mathcal{D}_k \Omega_k \right), \quad (12)$$

де

$$\Lambda = \alpha_2^2 - \alpha_1^2, \quad \mathcal{A}_k^* = a_k - \sigma \gamma_k, \quad \mathcal{B}_k^* = b_k - \sigma \gamma_k, \quad \mathcal{D}_k^* = \sigma \gamma_k,$$

$$a_k = -\sigma \gamma_k, \quad b_k = -\sigma \left[ \gamma_k + \frac{1+\sigma}{\sigma \gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right].$$

Крайова задача (12) з урахуванням співвідношень (10) зводиться за допомогою звичайної процедури до системи, що складається з трьох сингулярних інтегральних рівнянь (для кожного фіксованого  $k$ ):

$$\frac{1}{\mu} (N_k - iT_k) = \int_L p_{1k} G_{1k}^* ds - p_{2k} r_{1k}^* + \int_L p_{2k} G_{2k}^* ds - p_{3k} r_{2k}^* + \int_L p_{3k} G_{3k}^* ds,$$

$$\frac{1}{\mu} (N_k + iT_k) = \int_L p_{1k} \mathcal{G}_{1k}^* ds - p_{2k} \mathcal{R}_{1k}^* + \int_L p_{2k} \mathcal{G}_{2k}^* ds - p_{3k} \mathcal{R}_{2k}^* + \int_L p_{3k} \mathcal{G}_{3k}^* ds,$$

$$\frac{1}{\mu} Z_k = -p_{1k} \mathcal{R}_{1k}^* + \int_L p_{1k} \mathcal{G}_{1k}^* ds + \int_L p_{2k} \mathcal{G}_{2k}^* ds + \int_L p_{3k} \mathcal{G}_{3k}^* ds, \quad (13)$$

де

$$if_{1k} - p_{1k} - q_{1k} = 0, \quad if_{1k} + p_{1k} + q_{1k} = 0,$$

$$\mathcal{A}_k p_{2k} + \mathcal{B}_k q_{2k} + i \mathcal{D}_k f_{2k} = 0, \quad -p_{2k} - q_{2k} + if_{2k} = 0,$$

$$\mathcal{A}_k p_{3k} + \mathcal{B}_k q_{3k} - i \mathcal{D}_k f_{3k} = 0, \quad p_{3k} + q_{3k} + if_{3k} = 0;$$

$$f_{1k} = 0, \quad q_{1k} = -p_{1k}, \quad f_{2k} = d_{1k}^* p_{2k}, \quad q_{2k} = \mathcal{A}_{1k}^* p_{2k},$$

$$f_{3k} = \bar{d}_{1k}^* p_{3k}, \quad q_{3k} = \mathcal{A}_{1k}^* p_{3k};$$

$$d_{1k}^* = -i(1 + \mathcal{A}_{1k}^*), \quad \mathcal{A}_{1k}^* = -\frac{d_{1k}}{d_{2k}}$$

$$d_{1k} = \mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k, \quad d_{2k} = \mathcal{B}_k^* + \mathcal{D}_k^*;$$

$$\sigma_0 = e^{2i\psi_0}, \quad r_{1k}^* = r_{1k} - \sigma_0 r_{3k}, \quad r_{2k}^* = r_{2k} - \sigma_0 r_{4k}$$

$$\mathcal{R}_{1k}^* = r_{1k} - \bar{\sigma}_0 r_{5k}, \quad \mathcal{R}_{2k}^* = r_{2k} - \bar{\sigma}_0 r_{6k},$$

$$\mathcal{R}_{1k}^* = e^{i\psi_0} r_{7k} + e^{-i\psi_0} r_{8k}, \quad r_{1k} = -(l_{1k} + l_{2k} \mathcal{A}_{1k}^*) l_5,$$

$$r_{2k} = -r_{1k},$$

$$r_{3k} = 4\sigma \{ l_6(\beta_k) - l_6(\lambda_k) \},$$

$$r_{4k} = 4\sigma \left\{ (1 + 2\mathcal{A}_{1k}^*) l_6(\beta_k) + l_6(\lambda_k) \right\},$$

$$r_{5k} = 4\sigma \left\{ (1 + 2\mathcal{A}_{1k}^*) l_7(\beta_k) - l_7(\lambda_k) \right\},$$

$$r_{6k} = 4\sigma \{ l_7(\beta_k) - l_7(\lambda_k) \}, \quad r_{7k} = (\mathcal{A}_k - \mathcal{B}_k) l_1,$$

$$r_{8k} = (\mathcal{A}_k - \mathcal{B}_k) \bar{l}_1;$$

$$l_{1k} = -\left[ \Lambda(1-\sigma) + \sigma \lambda_k^2 \right], \quad l_{2k} = -\sigma \beta_k^2;$$

$$l_5 = \frac{\pi i}{2}, \quad l_6(\lambda_k) = \frac{\pi i \lambda_k^2}{8} e^{-2i\psi_0},$$

$$l_6(\beta_k) = \frac{\pi i \beta_k^2}{8} e^{-2i\psi_0}, \quad l_7(\lambda_k) = -\frac{\pi i \lambda_k^2}{8} e^{2i\psi_0},$$

$$l_7(\beta_k) = -\frac{\pi i \beta_k^2}{8} e^{2i\psi_0};$$

$$G_{1k}^* = G_{1k} - \sigma_0 G_{4k}, \quad G_{2k}^* = G_{2k} - \sigma_0 G_{5k},$$

$$G_{3k}^* = G_{3k} - \sigma_0 G_{6k}, \quad \mathcal{G}_{1k}^* = G_{1k} - \bar{\sigma}_0 G_{7k},$$

$$\mathcal{G}_{2k}^* = G_{2k} - \bar{\sigma}_0 G_{8k}, \quad \mathcal{G}_{3k}^* = G_{3k} - \bar{\sigma}_0 G_{9k},$$

$$\mathcal{G}_{1k}^* = e^{i\psi_0} G_{10k} + e^{-i\psi_0} G_{13k},$$

$$\mathcal{G}_{2k}^* = e^{i\psi_0} G_{11k} + e^{-i\psi_0} G_{14k},$$

$$\mathcal{G}_{3k}^* = e^{i\psi_0} G_{12k} + e^{-i\psi_0} G_{15k},$$

$$G_{1k} = l_{1k} K_0(\lambda_k r) - l_{2k} K_0(\beta_k r),$$

$$G_{2k} = -\frac{i}{2} \left\{ l_{1k} \lambda_k K_1(\lambda_k r) + l_{2k} \mathcal{A}_{1k}^* \beta_k K_1(\beta_k r) \right\} e^{i(\psi - \alpha_0)},$$

$$G_{3k} = \frac{i}{2} \left\{ l_{1k} \lambda_k K_1(\lambda_k r) + l_{2k} \mathcal{A}_{1k}^* \beta_k K_1(\beta_k r) \right\} e^{-i(\psi - \alpha_0)},$$

$$G_{4k} = \sigma \left\{ \lambda_k^2 K_2^*(\lambda_k r) - \beta_k^2 K_2^*(\beta_k r) \right\} e^{-2i\alpha_0},$$

$$G_{5k} = 4i\sigma \left\{ K_3^{**}(\lambda_k r) - K_3^{**}(\beta_k r) \right\} e^{i(\psi - 3\alpha_0)},$$

$$G_{6k} = \frac{i\sigma}{2} \left\{ \lambda_k^3 K_1(\lambda_k r) + (1 + 2\mathcal{A}_{1k}^*) \beta_k^3 K_1(\beta_k r) \right\} e^{-i(\psi + \alpha_0)},$$

$$G_{7k} = \sigma \left\{ \lambda_k^2 K_2^*(\lambda_k r) - \beta_k^2 K_2^*(\beta_k r) \right\} e^{2i\alpha_0},$$

$$G_{8k} = -\frac{i\sigma}{2} \left\{ \lambda_k^3 K_1(\lambda_k r) + (1 + 2\mathcal{A}_{1k}^*) \beta_k^3 K_1(\beta_k r) \right\} e^{i(\psi + \alpha_0)},$$

$$G_{9k} = -4i\sigma \left\{ K_3^{**}(\lambda_k r) - K_3^{**}(\beta_k r) \right\} e^{-i(\psi - 3\alpha_0)},$$

$$G_{10k} = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{A}_k \lambda_k K_1(\lambda_k r) - \mathcal{B}_k \beta_k K_1(\beta_k r) \right\} e^{-i\alpha_0},$$

$$G_{11k} = \frac{i}{4} \left\{ -\mathcal{A}_k \lambda_k^2 K_2^*(\lambda_k r) - (\mathcal{B}_k \mathcal{A}_{1k}^* + i \mathcal{D}_k^* \mathcal{A}_{1k}^*) \beta_k^2 K_2^*(\beta_k r) \right\} e^{i(\psi - 2\alpha_0)},$$

$$G_{12k} = \frac{i}{4} \left\{ \mathcal{A}_k \lambda_k^2 K_0(\lambda_k r) + (\mathcal{B}_k \mathcal{A}_{1k}^* + i \mathcal{D}_k^* \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 K_0(\beta_k r) \right\} e^{-i\psi},$$

$$G_{13k} = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{A}_k \lambda_k K_1(\lambda_k r) - \mathcal{B}_k \beta_k K_1(\beta_k r) \right\} e^{i\alpha_0},$$

$$G_{14k} = -\frac{i}{4} \left\{ \beta_k^0 I_k^2 K_0(I_k r) + (\beta_k^0 d_{1k}^0 - i \beta_k^0 d_{1k}^*) b_k^2 K_0(b_k r) \right\} e^{i\psi},$$

$$G_{15k} = \frac{i}{4} \left\{ \beta_k^0 \lambda_k^2 K_2^*(\lambda_k r) + (\beta_k^0 d_{1k}^0 - i \beta_k^0 d_{1k}^*) \beta_k^2 K_2^*(\beta_k r) \right\} e^{-i(\psi - 2\alpha_0)},$$

$$d_{1k}^* = -i \left( 1 + d_{1k}^0 \right), K_3^{**}(\gamma r) = -\left( \frac{\gamma}{2} \right)^3 K_3(\gamma r) + \frac{1}{r^3},$$

$$K_2^*(\gamma r) = K_2(\gamma r) - \frac{2}{\gamma^2 r^2}, \zeta - \zeta_0 = r e^{i\alpha_0}.$$

**Результати числових розрахунків.** Як приклад розглянемо шар, послаблений порожниною еліптичного поперечного перерізу:  $\xi_1 = R_1 \cos \varphi$ ,  $\xi_2 = R_2 \sin \varphi$   $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  або квадратного поперечного перерізу (квадрат із заокругленими кутами):  $\xi_1 = a(\cos \varphi + c_0 \cos 3\varphi)$ ,  $\xi_2 = a(\sin \varphi - c_0 \sin 3\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $c_0 = 0,14036$ .

Для характеристики напруженого стану на поверхні порожнини розраховували амплітудні значення величини

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \quad \theta = \psi - \pi \quad (14)$$

у точці контуру  $\varphi = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

При числовій реалізації алгоритму систему інтегральних рівнянь методом механічних квадратур [9] зводили до лінійної системи алгебричних рівнянь.

Послідовність обчислень була така: спочатку чисельно розв'язували систему інтегральних рівнянь крайової задачі (13), далі визначали коефіцієнти Фур'є  $\sigma_{ij}^{(k)}$  тензора напружень, потім за формулами (14) розраховували напруження на поверхні порожнини.

Нехай на поверхні порожнини діє пульсуючий тиск, амплітудне значення якого визначається виразом

$$N_0 = C(h^2 - x_3^2) \quad (C = const).$$

На рисунках наведені розподіли відносного амплітудного значення колового напруження  $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$  в залежності від зміни безрозмірного хвильового числа  $\alpha_1 a$  ( $a$  — характерний лінійний розмір) при різних геометричних параметрах отвору і  $a = 1$ . Рис. 1, рис. 2 побудовані для кругової порожнини при  $\nu = 0,11$  і  $\nu = 0,22$  відповідно. Рис. 3, рис. 4 побудовані для порожнини квадратного поперечного перерізу при  $\nu = 0,11$  і  $\nu = 0,22$  відповідно. Криві 1, 2 (див. рис. 1, рис. 2) побудовані при  $h/R_1 = 0,5$  і  $h/R_1 = 0,4$  відповідно ( $R_1 = R_2 = 1$ ). Криві 1, 2 на рис. 3 і рис. 4 побудовані при  $h/a = 0,5$  і  $h/a = 0,4$  відповідно. Криві 1, 2 на рис. 5 побудовані для кругової порожнини при  $h/R_1 = 0,5$  ( $R_1 = R_2 = 1$ ) та  $n = 0,22$  і  $n = 0,11$  відповідно.

Точками нанесені результати точного розв'язку відповідної осесиметричної задачі, отриманого методом рядів. Початкові точки побудованих графіків відповідають відповідним механічним і геометричним параметрам у випадку статичного навантаження.

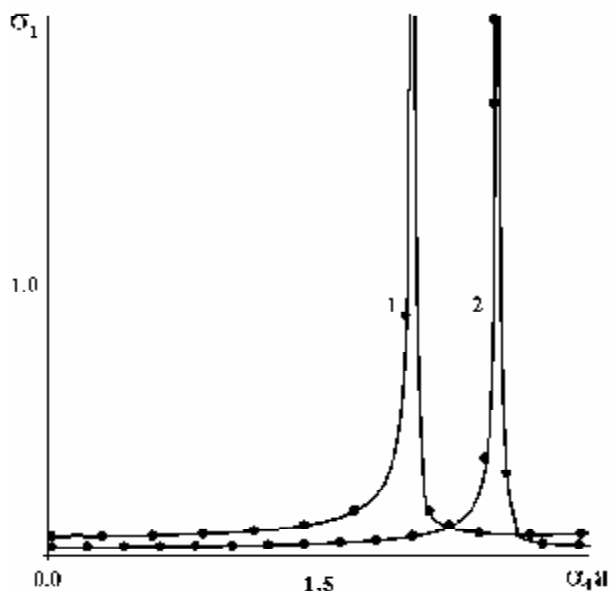


Рис. 1

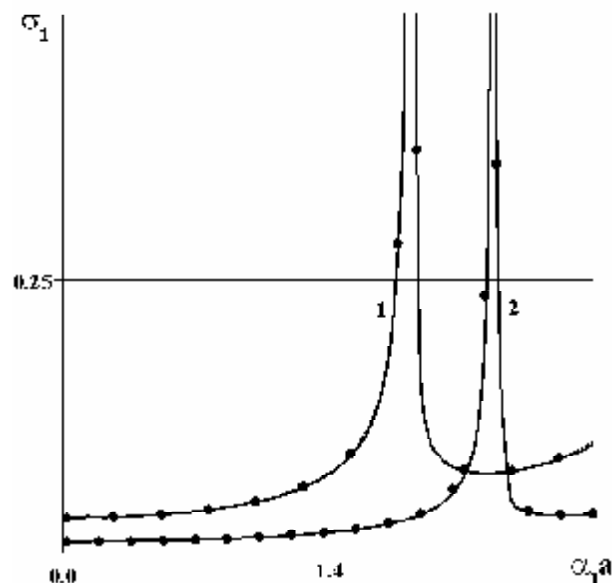


Рис. 2

**Висновки.** За результатами числового дослідження можна зробити такі висновки: при збільшенні товщини шару резонансна частота наближається до початку координат; аналогічна ситуація виникає при збільшенні коефіцієнта Пуасона.

Таким чином, побудовані аналітичні й числові процедури дають можливість ефективно досліджувати динамічну напруженість товстих пластин з отворами в умовах симетричних коливань і спектри власних частот при різних збудженнях.

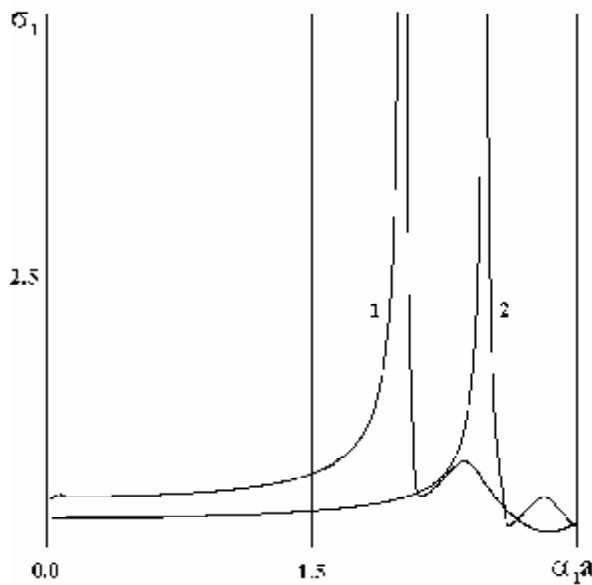


Рис. 3

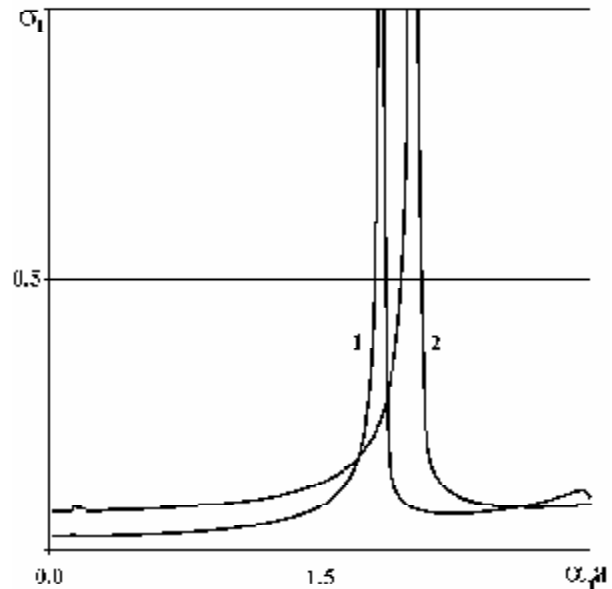


Рис. 5

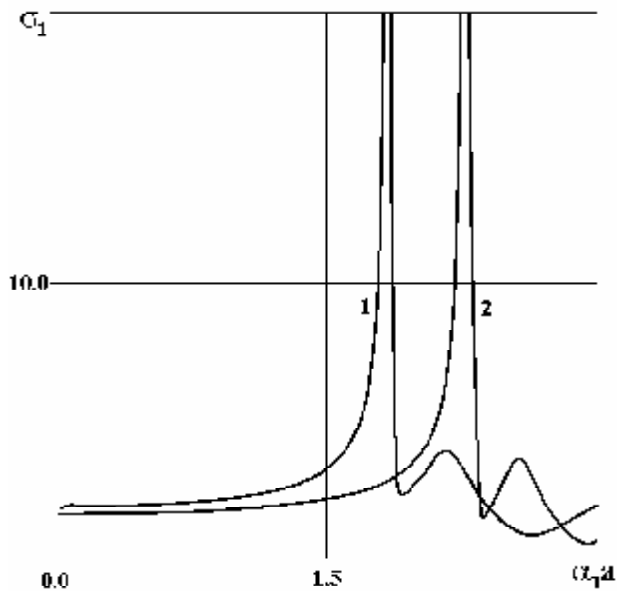


Рис. 4

связанных термоупругих колебаниях толстых изотропных пластин // В сб.: Теорет. и прикл. механика. – Киев-Донецк: Вища школа. – 1979. – Вып. 10. – С. 79–84.

5. Воронич И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука. – 1979. – 319 с.

6. Григоренко А. Я., Дыак И. И., Макар В. М. Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров // Прикл. механика. – 2001. – 37, №5. – С.74-83.

7. Сторожев В. И., Мысовский Ю. В., Соколова О. Д. Особенности спектра собственных колебаний трансформной дисковой пластины в окрестности краевого резонанса // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 37. – С.184-189.

8. Фильштинский Л. А. Периодические решения теории упругости для цилиндра в  $R^3$  // Теорет. и прикл. механика. – Вып. 21. – С. 13–20.

9. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука. – 1985. – 253 с.

Отримана 22.05.09

### Література

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка. – 1981. – 284 с.

2. Алтухов Е. В. Метод И. И. Воронича в трехмерной теории термодинамики пластин // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. С. 3–8.

3. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные плиты. – К.: Наук. думка. – 1978. – 239 с.

4. Буглак В. А., Мысовская Р. М., Мысовский Ю. В., Сторожев В. И. Однородные решения задачи о

*Yu. Kovalyov*

**Stationary oscillations of the layer weakened by the through-the-thickness hole in the case of the layer faces covered by diaphragm (symmetric case)**

*Sumy State University, Sumy*

*The modeling task about symmetric oscillations of an isotropic layer weakened by the through-the-thickness hole is considered in the case of the layer faces covered by diaphragm. Boundary problem has been reduced to a system of one-dimensional singular integral equations of the second order. Amplitude and frequency characteristics have been obtained as the result of numerical analysis. The «characteristic» stresses amplitude dependence on driving frequency has been explored.*