

УДК 534.1

**М. Тихан**

Доцент, канд. техн. наук

**О. Пелещин**

Студент

Національний університет  
«Львівська політехніка»,  
м. Львів

## ОПТИМІЗАЦІЯ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ТЕРМОПРУЖНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

*На підставі аналізу температурного поля і температурних напружень у стрижневому елементі при нестационарному термовпливі запропонований принцип вибору оптимальної форми елемента, яка мінімізує згадані термонапруження. Така мінімізація дає змогу покращити функціональні характеристики елемента в умовах термовпливів.*

**пружний елемент, оптимізація, термопружна характеристика**

Пружні елементи, які використовуються у сучасних приладних системах, часто є головними функціональними вузлами і відіграють роль кінематичних елементів, або первинних перетворювачів тих чи інших механічних величин. Наприклад, у перетворювачах сили, тиску, пришвидження або переміщення таку функцію виконують пластини, балки, стрижні чи кільця. Розширення галузей застосування приладів, а відповідно й пружних елементів, призвело до появи специфічних задач при їхньому проектуванні. Так, останнім часом набуває актуальності задача проектування пружних елементів для роботи при температурних впливах нестационарного характеру.

На сьогодні існує низка як класичних праць з термопружності елементів [1 – 3], так і спеціальних праць з розрахунку саме пружних елементів приладів [4 – 6]. Проте не існує ефективних методів зменшення температурної залежності функціональних характеристик пружних елементів саме на конструкційному рівні. Найперше маємо на увазі перетворюючу функцію і кінематичні характеристики пружного елемента.

Зазначимо, що при проектуванні пружних елементів для сучасних приладних систем з'явилися нові аспекти, оскільки завдяки досягненням матеріалознавства й технологій мікромеханіки істотно зменшилися фізичні розміри елементів (наприклад, розміри пружних еле-

ментів перетворювачів фізичних величин сягають міліметрових габаритів при десятках мікрон товщини).

Метою статті є оптимізація форми пружних елементів стрижневого типу виходячи з мінімуму термонапружень у них за дії температурного поля нестационарного характеру. Оптимізація елементів саме стрижневого типу обумовлена тим, що вони є найбільш вживаними, а багато більш складніших елементів можна подати сукупністю стрижневих.

**Теоретичні основи оптимальних форм пружних елементів за термопружними характеристиками.** Відомо [6], що одна з вагомих причин температурної залежності функціональних характеристик пружних елементів за умов нестационарних термовпливів є нерівномірність температурного поля у них і, як наслідок, поява істотних термонапружень. Зменшення цих термонапружень бачиться шляхом лінеаризування градієнта температурного поля, причому на конструктивному рівні.

Пружні елементи стрижневого типу з погляду механіки є тонкостінними стрижнями, тому теплові процеси у таких елементах цілком відповідно описуються одномірним температурним полем, що є розв'язком рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - k(T(x,t) - T_n) - \frac{1}{c} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

де  $k = h^* \cdot V$ ,  $h^*$  — нормований коефіцієнт теплообміну на боковій поверхні стрижня;  $V$  — відношення периметра поперечного перерізу стрижня до його площі.

Покладаємо, що кінці стрижня ( $x = 0$  і  $x = L$ ) мають температури  $T_0(t)$  і  $T_L(t)$ , а на його боковій поверхні відбувається теплообмін за законом Ньютона з середовищем зі сталою температурою  $T_n$ . Також вважаємо, що температура стрижня в початковий момент часу була  $T_n$ .

Для розв'язання (1) введемо змінну  $\Omega(x,t) = T(x,t) - T_n$ , тоді, прийнявши  $J = k \cdot c$ , рівняння (1) запишеться так:

$$\frac{\partial \Omega(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 \Omega(x,t)}{\partial x^2} - J \cdot \Omega(x,t), \quad (2)$$

де  $0 < x < L$ .

Рівняння такого типу можна розв'язати використовуючи підстановку  $\Omega(x,t) = u(x,t) \cdot e^{-Jt}$ . Після такої підстановки воно набуде вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \quad (3)$$

За прийнятих у задачі припущень рівняння (3) потрібно розв'язувати за таких умов:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= T_n = const \text{ при } t = 0; \\ u(x,t) &= T_0(t) \cdot e^{-Jt} \text{ при } x = 0; \\ u(x,t) &= T_L(t) \cdot e^{-Jt} \text{ при } x = L. \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = w(x,t) + f(x,t), \quad (4)$$

де функція  $w(x,t)$  є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

за умов:  $w(x,t) = T_n = const$  при  $t = 0$ ;  $w(x,t) = 0$  при  $x = 0$  та  $x = L$ . Функція  $f(x,t)$  є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

за таких умов:

$$\begin{aligned} f(x,t) &= 0 \text{ при } t = 0; \quad f(x,t) = T_0(t) \text{ при } x = 0; \\ f(x,t) &= T_L(t) \text{ при } x = L. \end{aligned}$$

Опускаючи проміжні викладки, розв'язки (5) і (6) запишемо так:

$$w(x,t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(-\frac{c \cdot n^2 \cdot p^2 \cdot t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{npx}{L}\right) T_n \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{npx}{L}\right) dx; \quad (7)$$

$$f(x,t) = \frac{2\chi\pi}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{\left(-\frac{\chi \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \times$$

$$\times \int_0^t e^{\left(\frac{\chi \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot \tau}{L^2}\right)} \left(T_0(\tau) - (-1)^n T_L(\tau)\right) d\tau. \quad (8)$$

Отже, розв'язок (1) матиме вигляд

$$T(x,t) = T_n + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(-Jt - \frac{c \cdot n^2 \cdot p^2 \cdot t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{n \cdot p \cdot x}{L}\right) \times \left\{ T_n \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{n \cdot p \cdot x}{L}\right) dx + \left[ \left(\frac{n \cdot p \cdot c}{L}\right) \int_0^t e^{\left(\frac{c \cdot n^2 \cdot p^2 \cdot \tau}{L^2} + J\tau\right)} \left(T_0(\tau) - (-1)^n T_L(\tau)\right) d\tau \right] \right\}. \quad (9)$$

Якщо у (9) покласти, що на одному з торців стрижня (нехай  $x = 0$ ) миттєво встановиться деяка температура, а протилежний торець підтримуватиметься при початковій температурі  $T_n$ , то у цьому випадку нерівномірність температурного поля буде максимальною.

Таким чином, поклавши  $T_0(t) = T_{\max} = const$ , а  $T_L(t) = T_n = const$ , з (9) отримаємо

$$T(x,t) = T_n + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(-Jt - \frac{c \cdot n^2 \cdot p^2 \cdot t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{n \cdot p \cdot x}{L}\right) \times \left\{ -T_n \cdot \frac{L}{n \cdot p} \left((-1)^n - 1\right) + \left(T_{\max} - (-1)^n T_n\right) \times \left[ \left(\frac{n \cdot p \cdot c}{cn^2 p^2 + JL^2}\right) e^{\left(\frac{c \cdot n^2 \cdot p^2 \cdot t + JL^2}{L^2}\right)} - 1 \right] \right\}. \quad (10)$$

Графічно ця залежність подана на рис. 1.

Відомо, що якщо одомірне температурне поле вздовж осі  $x$  тонкостінного стрижня прямокутного поперечного перерізу, загалом зі змінною товщиною  $b(x)$ , описується деякою залежністю  $T(x)$ , то термонапруження в ньому становитимуть

$$\sigma_y(x) = -\alpha E T(x) +$$

$$+ \frac{1}{F} \int \alpha E T(x) b(x) dx - \frac{x}{J_z} \int \alpha E T(x) b(x) dx, \quad (11)$$

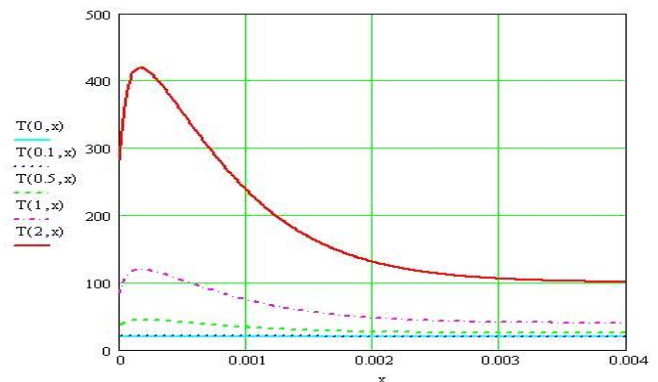


Рис. 1. Зміна температурного поля у стрижні при термоударі на його торці

де  $F$  — площа поперечного перерізу вздовж більшої осі;  $J_z$  — момент інерції відносно осі  $z$ , що проходить через центр ваги того ж поперечного перерізу.

Розраховані за (11) температурні напруження у стрижні при температурному полі (10) подані на рис. 2.

Отримані результати демонструють чітку кореляцію температурного поля і термонапружень. Тому, виходячи з динаміки температурного поля, покладемо, що для зменшення його нерівномірності форма стрижневого елемента має повторювати обриси лінії розподілу температури вздовж стрижня, зокрема, в момент часу коли градієнт температури є максимальним (верхня лінія на рис. 1).

Такі криві досить точно апроксимуються функціями

$$y(x) = a + k_1 e^{-k_2 x},$$

де  $a$ ,  $k_1$  і  $k_2$  — масштабуючі коефіцієнти, які легко підбираються емпірично в залежності від діапазону температурних впливів і фізико-механічних параметрів стрижня.

Нехай маємо стрижень прямокутного перерізу обриси якого в плані описуються функцією (рис. 3)

$$y(x) = 27 + 400e^{-1000x}.$$

Враховуючи (10) і (11), здійсимо числове моделювання динаміки термонапружень у такому стрижні, поклавши, що з його лівого торця розповсюджується тепловий потік, породжений термоударом  $T_0(t) = 420^\circ C = const$ , а на інших поверхнях відбувається теплообмін за законом Ньютона з середовищем сталोї температури.

На рис. 4 подані результати моделювання, які чітко показали, що термонапруження у стрижні з такими обриси при найбільш нестаціонарному термовпливі-термоударі, істотно зменшилися порівняно зі стрижнем рівномірного перерізу.

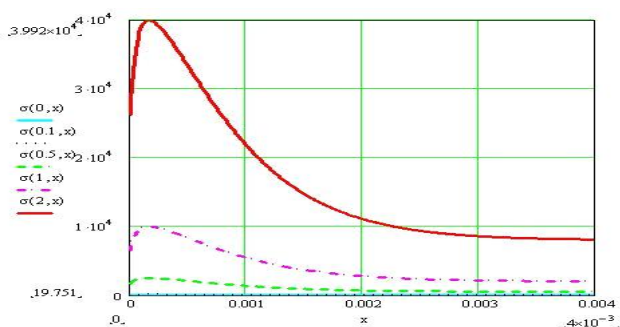


Рис. 2. Зміна термонапружень

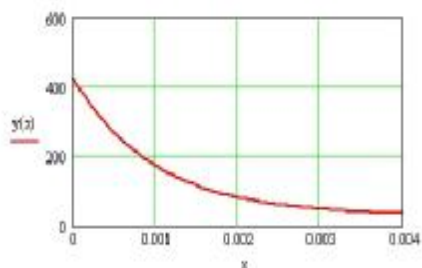


Рис. 3. Обриси в плані форми стрижневого пружного елемента

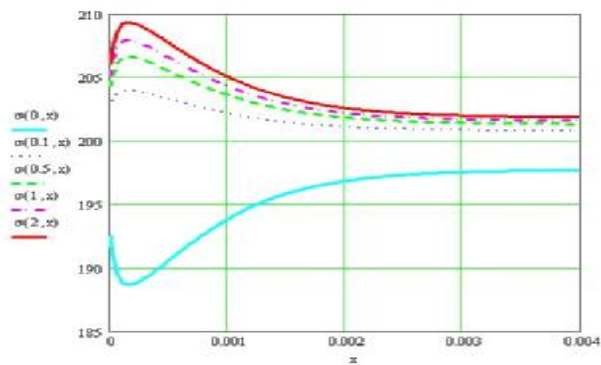


Рис. 4. Зміна термонапружень у стрижневному елементі оптимізованої форми

**Висновки.** Ідея вибору форми стрижневого елемента відповідно до характеру нерівномірності температурного поля в ньому при термоударі дає позитивний результат. Тобто, вдається мінімізувати термонапруження в такому елементі і, відповідно, така ідея може служити принципом оптимального проектування пружних елементів при їхній роботі в умовах нестаціонарного термовпливу.

Загалом покладений в основу оптимального проектування стрижневого пружного елемента принцип мінімуму термонапружень у ньому дає змогу досягнути істотного зменшення температурної залежності функціональних характеристик пружних елементів.

Стрижень такої форми може служити як консольна чи двоопорна балка, або ж, відобразивши його симетрично відносно осі  $y$  і зігнувши по осі  $x$  по радіусу  $r$ , матимемо кільцевий елемент, тому запропонований принцип має певну універсальність.

## Література

1. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Механика связанных полей в элементах конструкций Т.1. Термоупругость. — К.: Наук. думка, 1987. — С. 263.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964. — 280 с.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
4. Феликсон Е.И. Упругие элементы силовизмерительных приборов. — М.: Машиностроение, 1977. — 160 с.
5. Корсунов В.П. Упругие чувствительные элементы. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. — 264 с.
6. Тихан М.О., Малець Р.Б., Шинкаренко Г.А. Моделювання термомеханічних процесів у конструктивних елементах вимірювачів тиску // Машинознавство, 2008. — №6. — С. 26–31.

Отримана 23.04.10

М. Tykhan, O. Peleshchyshyn

Optimization of elastic element thermoelastics characteristics

National University "Lvivska Politechnika", Lviv

On the base of analysis thermal field and thermal stress in bar under dynamic thermal influence the method of variable bars optimal form than given minimum of thermal stress has been proposed. This method give possibility increases functional characteristics of elastic elements under dynamic thermal influence.