

УДК 539.375

Ю. Діхтяренко

Магістрант

М. Дудик

Доцент, канд. фіз.-мат. наук

Уманський державний
педагогічний університет,
м. Умань

В. Дякон

Доцент, канд. фіз.-мат. наук,
Європейський університет,
м. Умань

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Методом Вінера-Хопфа отримано розв'язок задачі про розрахунок в умовах плоскої деформації початкової зони передруйнування в околі кутової точки межі поділу двох різних пружних середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина. Зона передруйнування, що розвивається з кутової точки по межі поділу середовищ, моделюється лінією розриву нормального переміщення. Знайдено вираз для довжини зони передруйнування. Досліджено вплив утворення зони передруйнування на напружений стан в околі кутової точки.

зона передруйнування, кутова точка, міжфазна тріщина, метод Вінера-Хопфа

Починаючи з праць Вільямса, Ердогана, Інгланда, Райса і Сі та інших, опублікованих у 60-х роках минулого сторіччя, міжфазна тріщина на плоскій межі поділу різних середовищ тривалий час залишається у центрі уваги багатьох дослідників у галузі механіки руйнування. В останні роки інтерес до міжфазної тріщини посилюється у зв'язку з розрахунками зон передруйнування, які є істотним фактором напружено-деформованого стану в околі її вершини [1 — 4] і можуть бути використані для прогнозування напряму можливого відхилення тріщини від межі з'єднання тіл [5].

Значно менше праць присвячено міжфазній тріщині, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу середовищ. Зокрема, в [6] отримано трансцендентне рівняння для показника сингулярності напружень в околі вершини кута, сторони якого є межею поділу двох взаємодоповнюючих до повної площини різних однорідних і ізотропних клинів, з'єднаних між собою тільки по одній грані.

Зважаючи на виявлену в [6] концентрацію напружень у кутівій точці ламаної межі поділу двох різних середо-

вищ, з якої виходить міжфазна тріщина, значний інтерес викликає дослідження зони передруйнування в її околі.

У цій статті наведено розв'язок задачі про розрахунок такої зони передруйнування на початковій стадії її розвитку.

1. Постановка задачі. Нехай в умовах плоскої деформації з вершини міжфазної тріщини, що збігається з кутовою точкою межі поділу двох частин кусково-однорідного ізотропного тіла, виходить зона передруйнування, яка утворюється у з'єднувальному матеріалі за припущення його меншої тріщиностійкості порівняно зі з'єднуваними матеріалами. Якщо у зоні передруйнування деформації мають переважно відривний характер, для її опису прийнятною є модель Леонова-Панасюка [7], згідно з якою зона моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву з'єднувального матеріалу σ .

На початковому етапі розвитку довжина зони передруйнування значно менша від довжини тріщини і всіх інших розмірів тіла, тому тіло будемо вважати кусково-однорідною площиною з межею поділу середовищ у

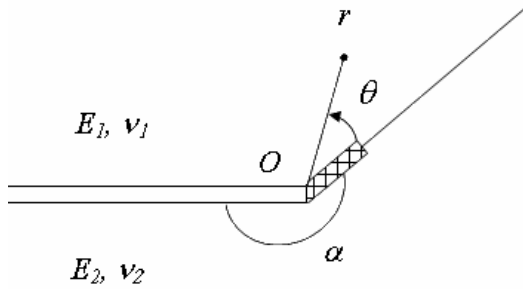


Рис. 1. Загальна схема задачі

формі сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін виходить напівнескінченна тріщина, вздовж іншої — лінія розриву довжини l (рис. 1).

На нескінченності реалізується асимптотика, яка є розв'язком аналогічної задачі без зони переддрунування, що породжується найменшим на інтервалі $]-1, 0[$ коренем її характеристичного рівняння. Цей розв'язок містить довільну сталу C , яка характеризує інтенсивність зовнішнього поля і визначається з розв'язку зовнішньої задачі.

Вважаючи береги тріщини вільними від навантаження, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$q = 0, \quad \langle s_q \rangle = \langle t_{rq} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0;$$

$$q = -a, \quad s_q = t_{rq} = 0;$$

$$q = 2p - a, \quad s_q = t_{rq} = 0; \quad (1.1)$$

$$q = 0, \quad r < l, \quad s_q(r, 0) = s;$$

$$q = 0, \quad r > l, \quad \langle u_q \rangle = 0; \quad (1.2)$$

$$q = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad s_q = Cgr^l + o(1/r), \quad (1.3)$$

де

$$g = \frac{(1 + \kappa_1)}{(\lambda + 2)\Delta} \left[2t_1\psi_1 + e(1 + \kappa_2)(\psi_2 + (\lambda + 2)\psi_3) \right],$$

$$y_1 = \sin(l + 2)(2p - a) \left[(e - 1)l - (1 + k_1) \right] - (e - 1)(l + 2)\sin l(2p - a),$$

$$y_2 = \sin l a \left[(l + 2)\cos 2(lp + a) - l \cos 2lp - 2\cos(l + 2)a \cos(l + 2)(2p - a) \right],$$

$$y_3 = 2\sin^2 a \left[l \sin(l + 2)(2p - a) - \sin l(2p - a) \right],$$

$$\Delta = e(1 + k_1)(1 + k_2) \left[t_6 - 2\cos(l + 2)(2p - a)t_7 \right] +$$

$$+ l e^2(1 + k_2)^2 t_8 - 4l(e - 1)^2 t_1 t_8 - 4l e(1 + k_2)(e - 1)t_4 t_8 +$$

$$+ 2(1 + k_1)(e - 1) \left[2\cos(l + 2)(2p - a)t_7 + \cos l(2p - a)t_1 \right] +$$

$$+ 2(1 + k_1)^2 \cos(l + 2)(2p - a)t_7,$$

$$e = \frac{1 + n_2}{1 + n_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad k_{1(2)} = 3 - 4n_{1(2)};$$

$\langle f \rangle$ — стрибок величини f ; E_1, E_2 та v_1, v_2 — модулі

Юнга і коефіцієнти Пуасона з'єднаних матеріалів; λ — найменший на інтервалі $]-1, 0[$ корінь характеристичного рівняння аналогічної задачі без зони переддрунування:

$$D(I) = 0, \quad (1.4)$$

$$D(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_1 t_2 -$$

$$- e^2(1 + k_2)^2 t_3 + 4(e - 1)^2 t_1 t_3 +$$

$$+ 4e(1 + k_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + k_2)(1 + k_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_2 = \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(2\lambda\pi - \lambda\alpha - \alpha),$$

$$t_6 = \lambda \sin[\lambda(2\pi - \alpha) - \alpha] \sin \alpha + \sin(\lambda + 2)\alpha \sin 2\lambda\pi,$$

$$t_7 = \frac{1}{\lambda + 2} \sin(\lambda + 2)\alpha \sin \lambda\alpha - \lambda \sin^2 \alpha,$$

$$t_8 = -\sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) \sin(\alpha).$$

У частинному випадку тріщини, що лежить на плоскій межі поділу середовищ ($a = 180^\circ$), характеристичне рівняння (1.4) має комплексно спряжені корені

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\omega \left(\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e + \kappa_1}{1 + e\kappa_2} \right),$$

яким відповідають просторові осциляції напружень і переміщень при наближенні до вершини тріщини, наслідком чого є фізично некоректне перекриття берегів тріщини. Розрахунки показали, що для досліджуваного кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною, яка виходить з кутової точки межі поділу середовищ, існує інтервал кутів розхилу $[a_{\min}, a_{\max}]$, для яких найменший у смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ корінь рівняння (1.4) також виявляється комплексним, тоді як для кутів розхилу a поза межами даного інтервалу він є дійсним. Значення $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ для окремих параметрів пружних середовищ наведені у табл. 1.

У випадку комплексних λ розв'язання розглянутої задачі носить дещо інший характер, ніж при дійсних; приклади розв'язування задач такого роду для плоскої межі поділу середовищ наведені у [4, 5]. Зокрема, в рамках моделі Комніоу [8] передбачається також утворення

Таблиця 1

Інтервал кутів розхилу межі поділу середовищ, яким відповідають комплексні корені рівняння (1.4) у смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ ($n_1 = n_2 = 0,33$)

E_1/E_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha_{\min}, ^\circ$	61	70	75	79	82	84	86	88	89
$\alpha_{\max}, ^\circ$	252	255	258	260	262	264	266	267	268

області контакту берегів тріщини в околі її вершини, яка змінює напружено-деформований стан і, відповідно, конфігурацію зони передруйнування [9]. У зв'язку з цим у цій статті розглядається задача про розрахунок міжфазної зони передруйнування при значеннях кутів розхилу межі поділу середовищ і пружних параметрів з'єднаних матеріалів, для яких найменший у смугі $-1 < \text{Re } l < 0$ корінь характеристичного рівняння (1.4) є дійсним. Значення λ для окремих параметрів задачі наведені у табл. 2.

Функція g виявляється від'ємною при $a < a_{\min}$ і додатною при $a > a_{\max}$, тому надалі припускається, що знак сталої C збігається зі знаком g у відповідних інтервалах кутів, щоб забезпечити на межі поділу середовищ потрібні для утворення зони передруйнування відривні нормальні напруження $S_q > 0$.

У кінці зони передруйнування реалізується асимптотика, яка являє собою задовольняючий умову неперервності переміщень асимптотично найбільший розв'язок однорідної задачі теорії пружності для площини, що містить на межі поділу середовищ напівнескінчену пряму лінію розриву нормального переміщення. Зокрема, існують асимптотики:

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow l+0, \quad \sigma_\theta \square \frac{1+\kappa_1+e(1+\kappa_2)}{2(e+\kappa_1)} \frac{k_I}{\sqrt{2\pi(r-l)}};$$

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow l-0, \quad (1.5)$$

$$\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \square \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{\kappa_1+e(1+\kappa_1\kappa_2)+e^2\kappa_2}{(1+\kappa_1)(e+\kappa_1)} \frac{k_I}{\sqrt{2\pi(l-r)}},$$

де k_I — коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці лінії розриву, який має бути визначений у ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі теорії пружності шукається у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що в (1.2) замість першої умови візьмемо

$$\theta = \alpha, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma - Cgr^\lambda, \quad (1.6)$$

а на нескінченості напруження згасають як $o(1/r)$.

Друга задача — аналогічна задача без лінії розриву, розв'язок якої відомий, тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

2. Розв'язок рівняння Вінера-Хопфа і розрахунок початкової зони передруйнування. Для побудови розв'язку задачі використовується метод Вінера-Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Меліна [10, 11]. Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови спільності деформацій, закону Гука, умови (1.1) перетворення Меліна

$$f^*(p, q) = \int_0^\infty f(r, q) r^p dr,$$

де $f(r, q)$ — довільна компонента тензора напружень або вектора переміщення, та врахувавши умову (1.6) і другу

умову (1.2), приходимо до функціонального рівняння Вінера-Хопфа першої задачі у комплексній області, що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) + \frac{S}{p+1} - \frac{Cgl^l}{p+1+1} = -A \text{tg } pp G(p) \Phi^-(p), \quad (2.1)$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty S_q(r, l, 0) r^p dr,$$

$$\Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_q}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r=r^l}^{q=0} r^p dr,$$

$$G(p) = \frac{(1+k_1)D_1(p) \cos pp}{AD(-1-p) \sin pp},$$

$$D_1(p) = e(1+k_2)\Delta_1\Delta_2 - (1+k_1)\Delta_3\Delta_4,$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 a - \sin^2 p(2p-a),$$

$$\Delta_2 = p \sin 2a - \sin 2pa,$$

$$\Delta_3 = p^2 \sin^2 a - \sin^2 pa,$$

$$\Delta_4 = p \sin 2a + \sin 2p(2p-a),$$

$$A = \frac{(1+k_1)[e+k_1+1+ek_2]}{2[k_1+e(1+k_1k_2)+e^2k_2]}.$$

Тут $-\delta_1 < \text{Re } p < \delta_2$, δ_1, δ_2 — достатньо малі додатні числа.

Функція $G(it)$ є дійсною парною функцією t , яка прямує до 1 при $t \rightarrow \infty$, тому індекс функції по уявній осі дорівнює нулю. Це дає можливість здійснити факторизацію коефіцієнта рівняння Вінера-Хопфа за формулою Гахова [12]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}, \quad \text{Re } p = 0; \quad (2.2)$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \text{Re } p < 0; \\ G^-(p), & \text{Re } p > 0. \end{cases}$$

За допомогою (2.2) і факторизації

$$\text{tg}(pp) = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функція Ейлера) рівняння (2.1) зводиться до такого вигляду:

$$\frac{\Phi^+(p)K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{S}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \quad (2.3)$$

$$- \frac{Cgl^l}{p+1+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1-1)}{(1+1)G^+(-1-1)} \right] =$$

$$= -\frac{A\Phi^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} + \frac{sK^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} - \frac{Cgl^l K^+(-1-1)}{(p+1)(l+1)G^+(-1-1)} \quad (\text{Re } p = 0).$$

Функції у лівій і правій частинах (2.3) аналітичні відповідно зліва і справа від уявної осі комплексної змінної p . Отже, згідно з принципом аналітичного продовження вони дорівнюють єдиній функції, аналітичній у всій комплексній площині p .

Використовуючи теорему абелевого типу [10] і асимптотики (1.5), отримаємо:

$$p \rightarrow \infty, \quad \Phi^+(p) \square \frac{1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2)}{2(e + \kappa_1)} \frac{k_I}{\sqrt{-2pl}};$$

$$\Phi^-(p) \square -\frac{\kappa_1 + e(1 + \kappa_1 \kappa_2) + e^2 \kappa_2}{(1 + \kappa_1)(e + \kappa_1)} \frac{k_I}{\sqrt{2pl}}. \quad (2.4)$$

Ці співвідношення разом з асимптотиками $K^+(p) \square \sqrt{-p}$ ($p \rightarrow \infty, \text{Re } p < 1/2$) і $K^-(p) \square \sqrt{p}$ ($p \rightarrow \infty, \text{Re } p > -1/2$) приводять до висновку, що ліва і права частини рівняння (2.3) наближаються до нуля при $p \rightarrow \infty$ у напівплощинах $\text{Re } p < 0$ і $\text{Re } p > 0$ відповідно. Тому за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тождоно дорівнює нулю у всій комплексній площині, що дозволяє знайти точний розв'язок рівняння (2.3):

$$\Phi^+(p) = -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\sigma}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \frac{Cgl^\lambda}{p+\lambda+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(-p)} + \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G^+(-\lambda-1)} \right] \right\} \quad (\text{Re } p < 0);$$

$$\Phi^-(p) = \frac{K^-(p)G^-(p)}{A} \left\{ \frac{\sigma K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} - \frac{Cgl^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(p+\lambda+1)(\lambda+1)G^+(-\lambda-1)} \right\} \quad (\text{Re } p > 0).$$

Звідси випливає, що при $p \rightarrow \infty$

$$\Phi^+(p) \square \frac{1}{\sqrt{-p}} \left\{ \frac{Cgl^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G^+(-\lambda-1)} - \frac{\sigma K^+(-1)}{G^+(-1)} \right\}.$$

Порівнюючи цей вираз з (2.4), знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у кінці зони передруйнування:

$$k_I = \sqrt{2l} \frac{2(e+k_1)}{e+k_1+1+ek_2} \left\{ \frac{Cgl^l}{I_2} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} - \frac{2s}{\sqrt{p}I_1} \right\},$$

$$I_1 = \exp \left[\frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{\ln G(it)}{t^2+1} dt \right],$$

$$I_2 = \exp \left[\frac{l+1}{p} \int_0^\infty \frac{\ln G(it)}{t^2+(l+1)^2} dt \right].$$

Прирівнюючи КІН до нуля внаслідок вимоги обмеженості напружень у кінці зони передруйнування, отримаємо вираз для визначення її довжини:

$$l = R \left(\frac{|C|}{s} \right)^{\frac{1}{l}}, \quad R = \left[\frac{\sqrt{p} |g| \Gamma(l+1) I_1}{2\Gamma(l+\frac{3}{2}) I_2} \right]^{\frac{1}{l}}. \quad (2.5)$$

Згідно з (2.5), довжина зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, закладеного у множнику C . Крім цього, довжина зони тим більша, чим менший опір відриву з'єднувального матеріалу. Безрозмірний множник R істотно залежить від пружних параметрів з'єднаних середовищ і кута розхилу α межі їх поділу. Значення R для окремих параметрів кусково-однорідного тіла подані в табл. 2. Оскільки вплив коефіцієнтів Пуасона з'єднаних матеріалів на досліджувані характеристики виявляється незначним, результати наведені для однакових їхніх значень $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$.

3. Аналіз напружено-деформованого стану в околі кутової точки. Застосувавши до трансформант напружень зворотне перетворення Меліна [11] із залученням теореми про лишки, можна визначити головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$. Зокрема, формула для нормального напруження має таку структуру:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \sum_{i=1}^2 C_i(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, l, \sigma, C) f_i(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda_i} +$$

Таблиця 2

Значення показників сингулярності напружень в околі кутової точки та безрозмірної довжини R зони передруйнування

E_1/E_2	λ, λ_1, R	α°				
		30	60	270	300	330
0,1	λ	-0,6570	-0,6107	-0,4602	-0,4890	-0,4987
	λ_1	-0,5722	-0,4356	-0,4602	-0,4889	-0,4987
	R	1,1249	0,8405	0,7695	0,226	$5,1 \cdot 10^{-3}$
0,3	λ	-0,5929	-0,5859	-0,4692	-0,4915	-0,4990
	λ_1	-0,5094	-0,5352	-0,4695	-0,4911	-0,4989
	R	0,8914	3,1466	5,0862	0,2184	$5,0 \cdot 10^{-3}$
0,5	λ	-0,5533	-0,5551	-0,4781	-0,4939	-0,4993
	λ_1	-0,5025	-0,5148	-0,4787	-0,4935	-0,4992
	R	0,8319	3,2353	8,4603	0,2123	$4,9 \cdot 10^{-3}$
0,7	λ	-0,5266	-0,5299	-0,4868	-0,4964	-0,4996
	λ_1	-0,5009	-0,5061	-0,4875	-0,4960	-0,4995
	R	0,801	3,2448	10,1878	0,2071	$4,8 \cdot 10^{-3}$
0,9	λ	-0,5076	-0,5091	-0,4955	-0,4998	-0,4999
	λ_1	-0,5002	-0,5015	-0,4960	-0,4996	-0,4998
	R	0,7761	3,2473	10,7372	0,2025	$4,8 \cdot 10^{-3}$

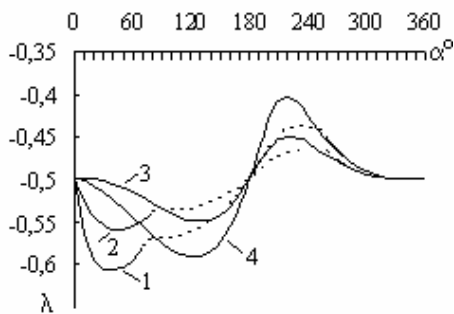


Рис. 2. Залежність показників сингулярності напружень λ (криві 1, 2) і λ_1 (криві 3, 4) від кута розхилу межі поділу середовищ a при значеннях $E_1/E_2 = 0,25$ (криві 1, 4) і $E_1/E_2 = 0,5$ (криві 2, 3)

$$+\sigma f_3(\theta, \alpha, e_0, v_1, v_2) + f_4(r, \theta, \alpha, e_0, v_1, v_2, l, \sigma, C),$$

де $f_1, f_2, f_3, f_4, C_1, C_2$ — відомі функції; f_4 — функція, що наближається до нуля при $r \rightarrow 0$; λ_1, λ_2 — два дійсних на інтервалі $]-1, 0[$ корені характеристичного рівняння задачі $D_1(-\lambda_i - 1) = 0$.

Домінуючий вклад у напруження в околі кутової точки вносить доданок $C_1 f_1 r^{\lambda_1}$, який містить менший показник $\lambda_1 < \lambda_2$, тому найменший корінь характеристичного рівняння задачі λ_1 і є тим головним чинником, що визначає ступінь сингулярності напружень в околі вершини тріщини після утворення зони передруйнування; його значення наведені у табл. 2.

На рис. 2 подана також залежність дійсної частини найменших у смузі $-1 < \text{Re } I < 0$ кореня λ рівняння (1.4) та λ_1 від кута розхилу середовищ. Пунктирною лінією зображено частину графіка $\text{Re } I(a)$, яка відповідає комплексним значенням λ . Значення λ , λ_1 і R для випадку $E_1 > E_2$ отримуються з табл. 2 і графіків на рис. 2 очевидно заміною E_1/E_2 на E_2/E_1 та a на $2p-a$ і тому в них не наводяться.

Висновки. Як показує аналіз отриманих результатів, виникнення зони передруйнування усуває осциляції напружень і переміщень (показник сингулярності λ_1 виявляється дійсним). Проте концентрація напружень у кутовій точці після утворення зони зберігається, зменшуючись порівняно з напружено-деформованим станом без зони ($-1 < \text{Re } I < I_1 < 0$) в інтервалі кутів розхилу середовищ, які відповідають дійсним значенням λ , і збільшуючись ($-1 < I_1 < \text{Re } I < 0$) в інтервалі кутів, що відповідають комплексним λ . Збереження концентрації означає, що частина зони передруйнування в безпосередній близькості до кутової точки є областю деструкції матеріалу з дуже високим рівнем напружень.

Той факт, що у певній області кутів концентрація напружень збільшується, а, отже, з появою зони передруйнування не відбувається очікуваного розвантаження матеріалу в околі концентратора напружень, може означати, що досліджувана модель є у цьому випадку не зовсім адекватною дійсності. Більш вірогідним може виявитись утворення зони передруйнування не у з'єднувальному матеріалі на межі розділу середовищ, а в

одній зі з'єднаних частин тіла. Це вимагає розв'язання задачі про розрахунок бічної зони передруйнування, аналогічної до задачі, розв'язаної у [5] для плоскої межі поділу середовищ з міжфазною тріщиною.

Література

1. Лобода В.В., Шевелева А.Е. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикл. механика. — 2003. — Т.39, №5. — С.76-82.
2. Tvergaard V. Predictions of mixed mode interface crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture // J. of the Mechanics and Physics of Solids. — 2004. — V. 52. — P.925-940.
3. Бакиров В.Ф., Гольдштейн Р.В. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла на границе соединения материалов // Прикл. математика и механика. — 2004. — Т.68, №1. — С.170-179.
4. Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А. О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. — 2006. — Т.42, №2. — С.14-23.
5. Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикл. механика. — 2007. — Т. 43, №10. — С. 28-41.
6. Theocaris P.S., Gdoutos E.E. Stress singularities in cracked composite full-planes // Int. J. Fract. — 1977. — V.13, №6. P. 763-773.
7. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — К.: Наукова думка, 1968. — 246 с.
8. Comninou M. The interface crack // J. Appl. Mech. - 1977. — V.44, №4. - P. 631-636.
9. Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А. Начальная зона предразрушения в конце межфазной трещины с гладким контактом берегов // Теорет. и прикладная механика. — 2007. — Вып.43. — С.63-68.
10. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 279 с.
11. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л.: Наука, 1967. — 402 с.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640с.

Отримана 20.05.09

Yu. Dichtiarenko¹, M. Dudik¹, V. Diakon²

Research of the prefracture zone at the corner point of media-separating boundary with an interfacial crack

¹Uman State Pedagogical University, Uman;

²European University, Uman

A static problem on the calculation of an initial prefracture zone at the corner point of media-separating boundary, which an interfacial crack goes out from, is considered for the plain strain conditions. The prefracture zone is modelled by straight line of normal displacement rupture located on the interface. An exact solution of the problem had been found by the Wiener-Hopf method. The dependences of the prefracture zone length on the external loading and other parameters of the problem are investigated.