

УДК 539.3

## ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ З'ЄДНАННЯ РІЗНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

**В. Чекурін**

Професор, д-р фіз.-мат. наук

**Л. Постолак**

Математик

Інститут прикладних проблем  
механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
м. Львів

*Розвинений варіаційний метод розв'язування оберненої задачі визначення залишкових напружень в околі плоского з'єднання різнорідних матеріалів. Задачу сформульовано в рамках розробленої раніше математичної моделі тонкого плоского з'єднання [6]. За вхідну інформацію приймаються дані про розподіл різниці головних напружень на вільній поверхні, які можна отримати з використанням п'єзомагнітного ефекту. Наведено приклад застосування розробленого варіаційного методу для визначення залишкових напружень, зумовлених відмінністю пружних модулів матеріалів у з'єднанні нікель-залізо.*

**залишкові напруження, неруйнівні методи, обернені задачі, варіаційні методи**

Під час виготовлення елементів конструкцій та приладів, що містять з'єднання різнорідних матеріалів, утворені шляхом склеювання чи зварювання, виникають залишкові напруження, які можуть істотно впливати на експлуатаційні властивості, зокрема міцність елементів. Ці напруження локалізовані в околі поверхні з'єднання й спричинені несумісними деформаціями, що виникли в процесі створення з'єднання, відмінностями пружних і теплофізичних властивостей з'єднаних матеріалів.

У статті [6] розроблена математична модель для опису напружено-деформованого стану плоских з'єднань різнорідних матеріалів. У випадку достатньо вузького з'єднального шва його наближено розглядають як матеріальну поверхню, на якій діють стрибки напружень та переміщень. У рамках такої моделі розглянемо пряму та обернену задачі визначення залишкових напружень в околі плоского з'єднання різнорідних матеріалів.

**Пряма задача.** Розглянемо нескінченну пружну смугу  $S = (-\infty < x < \infty, -1 < y < 1)$ , що складається з двох різнорідних півбезмежних смуг  $S_1 = (x > 0, -1 < y < 1)$  та

$S_2 = (x < 0, -1 < y < 1)$  з'єднаних вздовж відрізка  $x = 0$ . Тож, модуль Юнга  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu$  матеріалу можна розглядати як кусково-сталі функції координати  $x$  в області  $S$ :

$$E = \begin{cases} E_1, & x > 0 \\ E_2, & x < 0, \end{cases} \quad \nu = \begin{cases} \nu_1, & x > 0 \\ \nu_2, & x < 0. \end{cases}$$

Бічні сторони  $y = \pm 1$  смуги  $S$  є вільними від навантажень:

$$\sigma_{yy}(x, y)|_{y=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{xy}(x, y)|_{y=\pm 1} = 0. \quad (1)$$

У смугі діють залишкові напруження зумовлені несумісністю деформацій на лінії контакту  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} [\sigma_{xx}(0, y)] &= \sigma(y), & [\sigma_{xy}(0, y)] &= \tau(y), \\ [u_x(0, y)] &= u(y), & [u_y(0, y)] &= v(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут квадратними дужками позначені стрибки відповідних функцій на лінії контакту  $x = 0$ ;  $u(y)$ ,  $v(y)$ ,  $\sigma(y)$ ,  $\tau(y)$  – задані функції. Функції  $\sigma(y)$ ,  $\tau(y)$  задовольняють три умови самозрівноваження:

$$\int_{-1}^1 \sigma(y) dy = \int_{-1}^1 y \sigma(y) dy = \int_{-1}^1 \tau(y) dy = 0.$$

Компоненти тензора напружень  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y)$  та вектора переміщень  $u_x = u_x(x, y)$ ,  $u_y = u_y(x, y)$  можна визначити через функцію напружень  $\Phi = \Phi(x, y)$  за наступними формулами:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

$$u_x = \frac{1}{E} \left( -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx \right), \quad (3)$$

$$u_y = \frac{1}{E} \left( -(2+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \iint \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} dx \right).$$

Пряма задача визначення напружено-деформованого стану смуги  $S$  зводиться до розв'язування бігармонічного рівняння

$$\Delta \Delta \Phi(x, y) = 0 \quad (4)$$

у кожній з півсмуг  $S_1$  та  $S_2$  ( $S = S_1 \cup S_2$ ), та підпорядкування отриманого розв'язку умовам (1), (2).

При цьому умови (1) дозволяють розкласти задачу визначення функції  $\Phi(x, y)$  на дві – симетричну та антисиметричну [3].

Залишкові напруження в тілі швидко згасають з віддаллю від лінії контакту  $x = 0$ , тому дійсний розв'язок прямої бігармонічної задачі (1), (2), (4) подамо у вигляді розвинення розв'язку в ряд за повною системою бігармонічних функцій Папковича  $F_k(y)$  [2, 3]:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_{(1)}(x, y), & x \in S_1 \\ \Phi_{(2)}(x, y), & x \in S_2, \end{cases} \quad (5)$$

де  $\Phi_{(1)}(x, y)$  та  $\Phi_{(2)}(x, y)$  мають вигляд:

$$\Phi_{(1)}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_k C_{k(1)} \exp(-\gamma_k x) F_k(y) +,$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_k \bar{C}_{k(1)} \exp(-\bar{\gamma}_k x) \bar{F}_k(y),$$

$$\Phi_{(2)}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_k C_{k(2)} \exp(\gamma_k x) F_k(y) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_k \bar{C}_{k(2)} \exp(\bar{\gamma}_k x) \bar{F}_k(y).$$

Тут  $C_{k(1)}$ ,  $C_{k(2)}$  – невизначені комплексні сталі,  $\gamma_k$  – комплексні корені трансцендентного рівняння [2]. Риска над буквою означає комплексне спряження.

Значимо, що подання розв'язку задачі у вигляді (5) тотожно задовольняє бігармонічне рівняння (4) та

однорідні умови (1) для кожної з півсмуг  $S_1$  та  $S_2$  відповідно за будь-яких значень коефіцієнтів розвинення  $C_{k(1)}$ ,  $C_{k(2)}$ . Для знаходження цих коефіцієнтів розглянемо функціонал, який виражає відхилення розв'язку за квадратичною нормою від заданих граничних умов (2):

$$F = \int_{-1}^1 \left( \left( \sigma_{xx(1)}(0, y) - \sigma_{xx(2)}(0, y) - \sigma(y) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \sigma_{xy(1)}(0, y) - \sigma_{xy(2)}(0, y) - \tau(y) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( u_{x(1)}(0, y) - u_{x(2)}(0, y) - u(y) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( u_{y(1)}(0, y) - u_{y(2)}(0, y) - v(y) \right)^2 \right) dy. \quad (6)$$

Підставляючи у функціонал (6) формули (3) з використанням подання розв'язку (5) та застосовуючи до нього необхідні умови мінімуму

$$\frac{\partial F}{\partial C_{k(1)}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial C_{k(2)}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{C}_{k(1)}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{C}_{k(2)}} = 0, \quad (7)$$

приходимо до безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) стосовно невизначених комплексних сталих  $C_{1(1)}, C_{2(1)}, \dots, C_{1(2)}, C_{2(2)}, \dots$

$$\sum_k \left( M_{mk(11)}^{(11)} C_{k(1)} + M_{mk(12)}^{(11)} C_{k(2)} + \right. \\ \left. + M_{mk(11)}^{(12)} \bar{C}_{k(1)} + M_{mk(12)}^{(12)} \bar{C}_{k(2)} \right) = K_m^{(1)}$$

$$\sum_k \left( M_{mk(21)}^{(11)} C_{k(1)} + M_{mk(22)}^{(11)} C_{k(2)} + \right. \\ \left. + M_{mk(21)}^{(12)} \bar{C}_{k(1)} + M_{mk(22)}^{(12)} \bar{C}_{k(2)} \right) = K_m^{(1)}$$

$$\sum_k \left( M_{mk(11)}^{(21)} C_{k(1)} + M_{mk(12)}^{(21)} C_{k(2)} + \right. \\ \left. + M_{mk(11)}^{(22)} \bar{C}_{k(1)} + M_{mk(12)}^{(22)} \bar{C}_{k(2)} \right) = K_m^{(2)}$$

$$\sum_k \left( M_{mk(21)}^{(21)} C_{k(1)} + M_{mk(22)}^{(21)} C_{k(2)} + \right. \\ \left. + M_{mk(21)}^{(22)} \bar{C}_{k(1)} + M_{mk(22)}^{(22)} \bar{C}_{k(2)} \right) = K_m^{(2)}.$$

Коефіцієнти системи (8) для симетричного випадку визначаються через корені  $\gamma_k$  трансцендентного рівняння [2] за формулами:

$$M_{mk(ij)}^{(\lambda, \mu)} = \left[ \left( (1 + \nu_{(i)}) (1 + \nu_{(j)}) \gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(-1)^{i+j} E_{(i)} E_{(j)} \left( \gamma_k^{(\mu)} \right)^2 \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \left( \gamma_k^{(\mu)} + (-1)^{i+j} \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2}{\left( \gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{\left( (1 + \nu_{(i)}) \gamma_m^{(\lambda)} + (1 + \nu_{(j)}) \gamma_k^{(\mu)} \right) \left( \gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2}{\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}} \right\} \times \\
& \times \frac{\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \left( \left( \gamma_k^{(\mu)} \right)^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{E_{(i)} E_{(j)} \left( \gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)} \right) \left( \gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)} \right)^3 \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}} + \\
& + \frac{\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \sin \left( \gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)} \right)}{E_{(i)} E_{(j)} \left( \gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)} \right)} + \\
& + \left. \frac{\nu_{(i)} \nu_{(j)}}{E_{(i)} E_{(j)}} \sin \gamma_k^{(\mu)} \sin \gamma_m^{(\lambda)} \right] 4(-1)^{i+j}, \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{mm(ij)}^{(\lambda\lambda)} &= - \frac{(-1)^{i+j} \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^4}{6 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)}} \times \\
& \times \left[ 3 \left( 3 + (-1)^{i+j} \right) \left( \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 - \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} \right) + \right. \\
& + 2 \left( 1 + (-1)^{i+j} \right) \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} \left. \right] + \\
& + \frac{2(-1)^{i+j}}{E_{(i)} E_{(j)}} e_{m(i)}^{(\lambda)} e_{m(j)}^{(\lambda)} \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \times \\
& \times \left( 2 - \frac{2\nu_{(i)} \nu_{(j)}}{\cos^2 \gamma_m^{(\lambda)}} - \frac{1}{3} \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \left( 1 + \nu_{(i)} + \nu_{(j)} + \nu_{(i)} \nu_{(j)} \right) \right), \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{m(i)}^{(\lambda)} &= \frac{(-1)^{i+1}}{2E_{(i)}} \left( \int_{-1}^1 2 \left( u(y) u_{m(i)}^{(\lambda)} + v(y) v_{m(i)}^{(\lambda)} + \right. \right. \\
& + E_{(i)} \left( \sigma(y) \sigma_{m(i)}^{(\lambda)} + \tau(y) \tau_{m(i)}^{(\lambda)} \right) \left. \right) dy - \\
& \left. - \int_{-1}^1 u(y) dy \int_{-1}^1 u_{m(i)}^{(\lambda)} dy \right). \quad (11)
\end{aligned}$$

Для антисимметричного випадку маємо такі формули для визначення коефіцієнтів СЛАР (8):

$$\begin{aligned}
M_{mk(ij)}^{(\lambda\mu)} &= \left[ \left( (1 + \nu_{(i)}) \right) \left( 1 + \nu_{(j)} \right) \gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} + \right. \\
& + (-1)^{i+j} E_{(i)} E_{(j)} \left( \gamma_k^{(\mu)} \right)^2 \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \frac{\left( \gamma_k^{(\mu)} + (-1)^{i+j} \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2}{\left( \gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{\left( (1 + \nu_{(i)}) \gamma_m^{(\lambda)} + (1 + \nu_{(j)}) \gamma_k^{(\mu)} \right) \left( \gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2}{\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}} \right\} \times \\
& \times \frac{\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \left( \left( \gamma_k^{(\mu)} \right)^2 \sin^2 \gamma_m^{(\lambda)} - \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \sin^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{\left( \gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)} \right) \left( \gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)} \right)^3 \sin \gamma_k^{(\mu)} \sin \gamma_m^{(\lambda)}} + \\
& + \frac{\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \sin \left( \gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)} \right)}{\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}} - \\
& - \frac{3\nu_{(i)} \nu_{(j)} \sin^3 \gamma_k^{(\mu)} \sin^3 \gamma_m^{(\lambda)}}{\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)}} - \\
& - \left. \sin \gamma_k^{(\mu)} \sin \gamma_m^{(\lambda)} \right] \frac{4(-1)^{i+j}}{E_{(i)} E_{(j)}}, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{mm(ij)}^{(\lambda\lambda)} &= (-1)^{i+j} \left[ \frac{2}{3} \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^4 \left( 3 \sin^2 \gamma_m^{(\lambda)} - \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \right) - \right. \\
& - \frac{1}{E_{(i)} E_{(j)}} \left( \sin^2 \gamma_m^{(\lambda)} - 12 \nu_{(i)} \nu_{(j)} \sin^2 \gamma_m^{(\lambda)} \operatorname{tg}^2 \gamma_m^{(\lambda)} + \right. \\
& + 2 \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \left( 2 - \frac{1}{3} \left( \gamma_m^{(\lambda)} \right)^2 \left( 1 + \nu_{(i)} + \nu_{(j)} + \nu_{(i)} \nu_{(j)} \right) \right) \left. \right], \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{m(i)}^{(\lambda)} &= \frac{(-1)^{i+1}}{2E_{(i)}} \left( \int_{-1}^1 2 \left( u(y) u_{m(i)}^{(\lambda)} + v(y) v_{m(i)}^{(\lambda)} + \right. \right. \\
& + E_{(i)} \left( \sigma(y) \sigma_{m(i)}^{(\lambda)} + \tau(y) \tau_{m(i)}^{(\lambda)} \right) \left. \right) dy - \\
& - 3 \int_{-1}^1 y u(y) dy \int_{-1}^1 y u_{m(i)}^{(\lambda)} dy - \\
& \left. - \int_{-1}^1 v(y) dy \int_{-1}^1 v_{m(i)}^{(\lambda)} dy \right). \quad (14)
\end{aligned}$$

У формулах (11), (14) введено позначення:

$$\begin{aligned}
\sigma_{k(i)}^1 &= \sigma_{k(i)}, & \sigma_{k(i)}^2 &= \bar{\sigma}_{k(i)}, \\
\tau_{k(i)}^1 &= \tau_{k(i)}, & \tau_{k(i)}^2 &= \bar{\tau}_{k(i)}, \\
u_{k(i)}^1 &= u_{k(i)}, & u_{k(i)}^2 &= \bar{u}_{k(i)}, \\
v_{k(i)}^1 &= v_{k(i)}, & v_{k(i)}^2 &= \bar{v}_{k(i)}; \\
& i, j = 1, 2, \quad \lambda, \mu = 1, 2.
\end{aligned}$$

Для симметричного випадку  $\sigma_{k(i)}$ ,  $\tau_{k(i)}$ ,  $u_{k(i)}$ ,  $v_{k(i)}$  визначатимуться за формулами (15), (16), (17), а для антисимметричного випадку – за (15), (18), (19):

$$\sigma_{k(i)} = F_k''(y), \quad \tau_{k(i)} = \gamma_k F_k'(y), \quad (15)$$

$$u_{k(i)} = \gamma_k (v_{(i)} + 1) F_k(y) - 2\gamma_k \cos(\gamma_k y), \quad (16)$$

$$v_{k(i)} = -(v_{(i)} + 1) F_k'(y) + 2\gamma_k \sin(\gamma_k y). \quad (17)$$

$$u_{k(i)} = \gamma_k (v_{(i)} + 1) F_k(y) + 2\gamma_k \sin(\gamma_k y), \quad (18)$$

$$v_{k(i)} = -(v_{(i)} + 1) F_k'(y) + 2\gamma_k \cos(\gamma_k y). \quad (19)$$

Таким чином, якщо функції  $u(y)$ ,  $v(y)$ ,  $\sigma(y)$ ,  $\tau(y)$  відомі, то розв'язок прямої задачі знайдемо, розв'язавши СЛАР (8). Цю безмежну систему можна розв'язувати, наприклад, методом редукції [4], задавшись в сумах скінченною кількістю членів.

**Обернена задача.** Коли функції стрибків  $\sigma(y)$ ,  $\tau(y)$  та  $u(y)$ ,  $v(y)$  наперед невідомі, коректна постановка прямої контактної задачі теорії пружності неможлива. Тому розглянемо обернену задачу, в якій замість функцій стрибків задані параметри напружено-деформованого стану, які можна визначити, застосовуючи методи фізичних вимірювань. Наприклад, п'єзомагнітним методом [1] можна виміряти на поверхнях  $y = \pm 1$  різницю головних напружень як функцію координати  $x$ :

$$\left[ \sigma_{zz}(x, y) - \sigma_{xx}(x, y) \right]_{y=\pm 1} = s^\pm(x). \quad (20)$$

Виражаючи компоненти напружень у лівій частині рівності (20) через функцію напружень  $\Phi(x, y)$ , отримуємо співвідношення

$$\left[ (v-1) \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} \right]_{y=\pm 1} = s^\pm(x). \quad (21)$$

Сформулюємо задачу неруйнівного визначення залишкових напружень на основі даних п'єзомагнітних вимірювань так: знайти функцію  $\Phi(x, y)$ , яка в області  $S$  задовольняє бігармонічне рівняння (4), а на бічних сторонах області  $y = \pm 1$  умови (2) та (21).

Ця задача є некоректно поставленою, оскільки функції крайових умов (2), що діють на лінії контакту  $x = 0$ , є невідомі. Натомість, на кожній зі сторін  $y = \pm 1$  задано по три умови замість двох. Проте двох функцій  $s^+(x)$ ,  $s^-(x)$  є недостатньо, щоб компенсувати чотири неозначені умови (2). Для зниження ступеня невизначеності задачі, врахуємо, що у випадку достатньо тонкого з'єднувального шва, напруження на його поверхні є локально зрівноваженими:  $\sigma(y) = \tau(y) = 0$ .

Для знаходження коефіцієнтів розвинення розв'язку оберненої задачі (4), (2), (21) у вигляді (5) будемо використовувати такий квадратичний функціонал:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \left( (v_{(1)} - 1) \frac{\partial^2 \Phi(x, \pm 1)}{\partial y^2} + v_{(1)} \frac{\partial^2 \Phi(x, \pm 1)}{\partial x^2} - \right. \quad (22)$$

$$\left. - (v_{(2)} - 1) \frac{\partial^2 \Phi(x, \pm 1)}{\partial y^2} - v_{(2)} \frac{\partial^2 \Phi(x, \pm 1)}{\partial x^2} - s(x) \right)^2 dx + \int_{-1}^1 \left( (\sigma_{xx(1)}(0, y) - \sigma_{xx(2)}(0, y))^2 + (\sigma_{xy(1)}(0, y) - \sigma_{xy(2)}(0, y))^2 \right) dy.$$

Використовуючи умови мінімуму (7) квадратичного функціоналу (22), приходимо до розв'язування СЛАР (8), коефіцієнти якої для симетричного випадку матимуть вигляд:

$$M_{mk(ij)}^{(\lambda, \mu)} = \frac{(-1)^{i+j}}{2} (v_{(i)} - 1) (v_{(j)} - 1) \sigma 1_k^{(\mu)} \sigma 1_m^{(\lambda)} \times \int_{-\infty}^{\infty} e_{m(i)}^{(\lambda)}(x) e_{k(j)}^{(\mu)}(x) dx, \quad (23)$$

$$K_{m(i)}^{(\lambda)} = (-1)^{i+j} (v_{(i)} - 1) \sigma 1_m^{(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e_{m(i)}^{(\lambda)}(x) dx. \quad (24)$$

У формулах (23), (24) введено позначення:

$$s(x) = \frac{1}{2} (s^+(x) + s^-(x)), \quad \sigma 1_k^{(1)} = \sigma 1_k, \quad \sigma 1_k^{(2)} = \bar{\sigma} 1_k,$$

$$\sigma 1_k = F_k''(y)|_{y=1} = \gamma_k^2 (2 - \kappa_k) \cos \gamma_k - \gamma_k^3 \sin \gamma_k,$$

$$e_{k(1)}^{(1)}(x) = \exp(-\gamma_k x), \quad e_{k(1)}^{(2)}(x) = \exp(-\bar{\gamma}_k x),$$

$$e_{k(2)}^{(1)}(x) = \exp(\gamma_k x), \quad e_{k(2)}^{(2)}(x) = \exp(\bar{\gamma}_k x).$$

**Приклад.** Щоб отримати вхідні дані для оберненої задачі використаємо числовий експеримент [5]. Для цього задамося функціями  $u(y)$  та  $v(y)$  й розв'яжемо пряму задачу. Відтак, за формулами (21) розрахуємо вимірювані функції  $s^\pm(x)$ . На рис.1 показана залежність функції  $s(x)$ , розрахована для симетричної задачі для випадку  $u(y) = \alpha(y^2 + 2)$ ,  $v(y) = 0$ . Криві 1, 2 та 3 відповідають

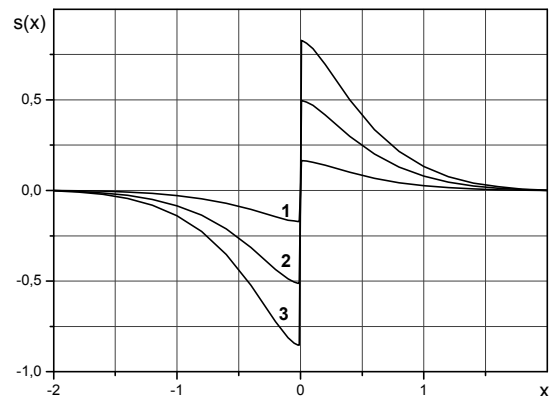


Рис. 1

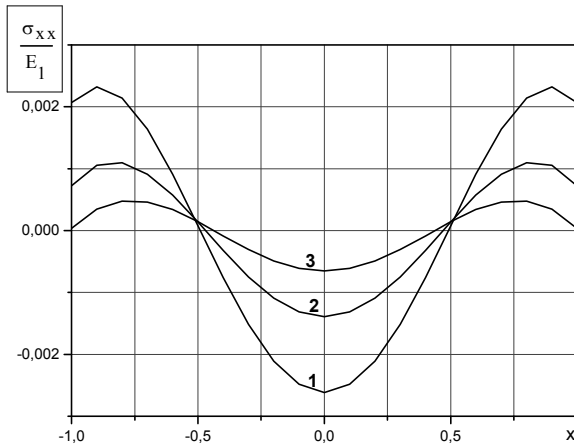


Рис. 2

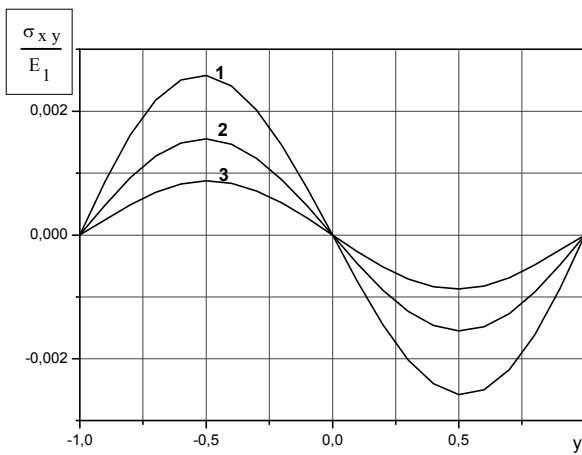


Рис. 3

значенням альфа  $\alpha/E_1 = 0.01, 0.03, 0.05$ . Розглядали випадок з'єднання нікель-залізо ( $\nu_1 = 0.312, E_1 = 199.5 \cdot 10^9$  та  $\nu_2 = 0.293, E_2 = 211.4 \cdot 10^9$  відповідно).

На рис. 2, рис. 3 показані розподіли нормальної та дотичної компонент залишкових напружень для різних віддалей від поверхні контакту  $x = 0.4, 0.6, 0.8$  (криві 1, 2, 3 відповідно), знайдені з розв'язку оберненої задачі для  $\alpha = 0.05$ .

**Висновки.** Розроблено варіаційний метод розв'язування оберненої задачі визначення залишкових

напружень у кусково-однорідній смузі за заданими на її бічних сторонах різниці головних напружень. Метод можна застосувати для створення методів та засобів для неруйнівного визначення залишкових напружень з використанням п'єзомагнітного ефекту [1].

## Література

1. Корзунин Г. С., Пужевич Р.Б., Цырлин М.Б. Влияние электроизоляционных покрытий на свойства анизотропной электротехнической стали// Физика металлов и металловедения. – 2007. – **103**, №2. – С. 147 – 156.
2. Постолакі Л.І., Чекурін В.Ф. Властивості однієї системи однорідних розв'язків бігармонічного рівняння// Прикл. проблеми механіки і математики. –2007. – Вип. 5. – С. 156 – 162.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975.— 576 с.
4. Чекурин В.Ф. Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы// Изв. РАН: Механика твердого тела.– 1999. – № 2. – С. 58 – 70.
5. Чекурин В.Ф. Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалки листового стекла //Изв. РАН: Механика твердого тела. – 1998. – №3. – С. 86–97.
6. Чекурин В.Ф., Постолакі Л.І. Теоретично-експериментальне визначення залишкових напружень у плоских з'єднаннях// Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 2. – С. 153 – 162.

Отримана 25.10.10

V. Chekurin, L. Postolaki

### Inverse problem for determination of residual stresses in neighborhood of heterogeneous materials joints

Ya. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv

*A variational method for solving of inverse problem for determination of residual stresses in neighborhood of a plane joint of heterogeneous materials has been considered in the paper. The problem has been formulated in the frame of previously developed mathematical model for thin plane joint [6]. Main surface stresses difference are used as the input data in the problem. Its distribution on the body surface can be measured with use piezomagnetic effect. Application of the developed method for residual stresses in nickel-iron joint determination has been considered in the paper.*

## Інформація

### BIOMECHANICS OF HUMAN MOTION. NEW FRONTIERS OF MULTIBODY TECHNIQUES FOR CLINICAL APPLICATIONS

March 2010, Ponta Delgada, Azores, Portugal

#### Contact

Prof. Jorge A.C. Ambrosio

IDMEC- Instituto Superior Tecnico

Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisbon Portugal.

Phone: +351 2184 17680; fax: +351 2184 17915. Mail: [Jorge@dem.ist.utl.pt](mailto:Jorge@dem.ist.utl.pt)