

Л. Пархоменко

Інженер,
Харківський державний університет
харчування та торгівлі,
м. Харків

С. Склепус

Ст. наук. співр., канд. фіз.-мат. наук,
Інститут проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України,
м. Харків

С. Єременко

Доцент, канд. техн. наук,
Національний технічний
університет «ХПІ»,
м. Харків

УДК 539.3

ДИFUZІЙНІ НАПРУЖЕННЯ В ТРИШАРОВІЙ ТРУБЧАСТІЙ МЕМБРАНІ ДЛЯ ВИРОБНИЦТВА СИНТЕТИЧНОГО ГАЗУ

Розглянуто задачу дифузії вакансій кисню у тришаровій трубчастій мембрані реактора для виробництва синтетичного газу, моделлю якої є нескінченно довгий товстостінний складений циліндр. Отримано аналітичний розв'язок для визначення концентрації вакансій кисню та дифузійних напружень у припущенні плоскої деформації. Розроблено метод числового розв'язування задачі визначення напружено-деформованого стану трубчастій багатшарової мембрани, що знаходиться під дією температурного поля та піддається хімічному розширенню. Розглянуто приклад розрахунку НДС тришарового циліндра.

тришарова трубчаста мембрана, температурне та хімічне розширення, дифузійні напруження

Вступ. Проблема довговічності трубчастої мембрани реактора для отримання синтетичного газу займає важливе місце серед питань, що виникають в процесі виробництва нових альтернативних джерел енергії [1—4]. Синтетичний газ є проміжним хімічним продуктом при виробництві палива, який отримують з метану. Вироблене таким способом паливо має високий октановий індекс і є більш дешевим та чистим, оскільки не має домішок металів та інших речовин.

У мембранних матеріалах, що відносяться до перовськітоподібної кераміки, окрім температурного розширення, присутнє хімічне розширення. Це розширення дає додатковий вклад у загальне розширення при високих температурах. Цей феномен може бути пояснений, якщо взяти до уваги, що перовськітоподібні матеріали повинні містити високу концентрацію дефектів кисню. Зменшення кисню в перовськітоподібному матеріалі буде призводити до розширення одиничних елементів та послаблення іонних зв'язків. Пониження тиску кисню буде також призводити до зростання хімічного розширення. Таким

чином, під час роботи мембрана знаходиться під дією градієнту вакансій кисню та піддається хімічно обумовленому деформуванню вздовж товщини. Це призводить до виникнення хімічно обумовлених напружень, які в кінцевому рахунку можуть призвести до розриву мембрани. Хімічно обумовлені (або дифузійні) напруження залежать від зміни концентрації вакансій кисню в мембрані під час її роботи, величини хімічного розширення для заданого ступеня концентрації вакансій кисню, та геометрії мембранної системи [5].

Слід зауважити, що в сучасній літературі відсутні дослідження зв'язку між концентрацією вакансій кисню та рівнем дифузійних напружень у тришаровій трубчастій мембрані як функцій часу з урахуванням поверхневого масопереносу. Проблема точного визначення хімічно наведених напружень у киснево-транспортних мембранах залишається відкритою [6].

1. Задача дифузії. Тришарова трубчаста мембрана реактора розглядається як нескінченно довгий порожній циліндр, складений з трьох вкладених циліндрів, що

мають спільну вісь, з радіусами контурів $r_0 < r_1 < r_2 < r_3$. Складові частини циліндра жорстко зчеплені між собою. Концентрація вакансій кисню $C = C(r, t) = C_j(r, t)$, $r \in (r_{j-1}; r_j)$ ($j = \overline{1,3}$) припускається залежною тільки від радіальної координати r і часу t . Вакансії кисню мігрують із внутрішньої поверхні мембрани $r = r_0$, що контактує з газом, до її зовнішньої поверхні $r = r_3$, що контактує з повітрям.

Концентрація вакансій кисню в кожному шарі задовольняє диференціальне рівняння Фіка другого роду:

$$D_j \left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_j}{\partial r} \right) = \frac{\partial C_j}{\partial t}, \quad r \in (r_{j-1}; r_j), \quad j = \overline{1,3}, \quad t > 0 \quad (1)$$

за такими початковими, граничними умовами та умовами контакту шарів мембрани:

$$\begin{aligned} C_1(r, 0) &= R_1 R_2 C_0, \quad r \in (r_0; r_1), \\ C_2(r, 0) &= R_2 C_0, \quad r \in (r_1; r_2), \\ C_3(r, 0) &= C_0, \quad r \in (r_2; r_3); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -D_1 \frac{\partial C_1}{\partial r} &= -\beta(C_1 - C_{in}), \quad r = r_0, \quad t > 0, \\ C_3(r_3, t) &= C_{out}, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} C_1(r_1, t) &= R_1 C_2(r_1, t), \quad t > 0, \\ C_2(r_2, t) &= R_2 C_3(r_2, t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

$$D_j \frac{\partial C_j}{\partial r} = D_{j+1} \frac{\partial C_{j+1}}{\partial r}, \quad r = r_j, \quad j = 1, 2, \quad t > 0, \quad (4)$$

де D_j ($j = \overline{1,3}$) – хімічні коефіцієнти дифузії в j -му шарі, R_j ($j = 1, 2$) – деякі константи, C_0 – початкове значення концентрації вакансій кисню, β – хімічний коефіцієнт поверхневого масопереносу, C_{out} – значення концентрації вакансій кисню на зовнішній поверхні циліндра, C_{in} – значення концентрації вакансій кисню в рівновазі на внутрішній поверхні.

Отримаємо аналітичний розв'язок початково-крайової задачі дифузії (1) – (4). Застосовуючи перетворення Лапласа до обох частин рівнянь (1), спочатку отримаємо допоміжні рівняння відносно зображень $\bar{C}_j(r, p)$, $j = \overline{1,3}$:

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial r} - q_1^2 \bar{C}_1 = -\frac{R_1 R_2 C_0}{D_1}, \quad r \in (r_0; r_1),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{C}_2}{\partial r} - q_2^2 \bar{C}_2 = -\frac{R_2 C_0}{D_2}, \quad r \in (r_1; r_2),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial r} - q_3^2 \bar{C}_3 = -\frac{C_0}{D_3}, \quad r \in (r_2; r_3),$$

де $q_j^2 = p / D_j$.

Зображення умов (4) мають вигляд:

$$-D_1 \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial r} = -\beta (\bar{C}_1 - C_{in} / p), \quad r = r_0, \quad p > 0,$$

$$\bar{C}_1 = R_1 \bar{C}_2, \quad r = r_1, \quad p > 0,$$

$$\bar{C}_2 = R_2 \bar{C}_3, \quad r = r_2, \quad p > 0,$$

$$\bar{C}_3 = C_{out} / p, \quad r = r_3, \quad p > 0,$$

$$D_j \frac{\partial \bar{C}_j}{\partial r} = D_{j+1} \frac{\partial \bar{C}_{j+1}}{\partial r}, \quad r = r_j, \quad j = 1, 2, \quad p > 0.$$

Введемо такі функції:

$$\bar{C}_1^* = \bar{C}_1 - \frac{R_1 R_2 C_0}{p}, \quad \bar{C}_2^* = \bar{C}_2 - \frac{R_2 C_0}{p},$$

$$\bar{C}_3^* = \bar{C}_3 - \frac{C_0}{p}. \quad (5)$$

Функції $\bar{C}_j^*(r, p)$ ($j = \overline{1,3}$) задовольняють рівняння

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_j^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{C}_j^*}{\partial r} - q_j^2 \bar{C}_j^* = 0, \quad r \in (r_{j-1}; r_j), \quad (6)$$

і зображення граничних умов:

$$-D_1 \frac{\partial \bar{C}_1^*}{\partial r} = -\beta (\bar{C}_1^* - C_{in}^* / p), \quad r = r_0, \quad p > 0,$$

$$\bar{C}_1^* = R_1 \bar{C}_2^*, \quad r = r_1, \quad p > 0,$$

$$\bar{C}_2^* = R_2 \bar{C}_3^*, \quad r = r_2, \quad p > 0,$$

$$\bar{C}_3^* = \frac{C_{out}^*}{p}, \quad r = r_3, \quad p > 0,$$

$$D_j \frac{\partial \bar{C}_j^*}{\partial r} = D_{j+1} \frac{\partial \bar{C}_{j+1}^*}{\partial r}, \quad r = r_j, \quad j = \overline{1,2}, \quad t > 0, \quad (7)$$

де $C_{in}^* = C_{in} - R_1 R_2 C_0$, $C_{out}^* = C_{out} - C_0$.

Розв'язки рівнянь (6) шукаємо у вигляді

$$\bar{C}_j^* = A_j I_0(q_j r) + B_j K_0(q_j r), \quad j = \overline{1,3}. \quad (8)$$

Тут і в подальшому $I_\nu(z)$ і $K_\nu(z)$ – функції Бесселя уявного аргументу ν -го порядку першого і другого роду, відповідно. Константи A_j і B_j підбираються так, щоб функції \bar{C}_j^* задовольняли умови (7). Підставляючи (8) у (7) і розв'язуючи систему рівнянь відносно A_j і B_j , остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1^* &= \frac{1}{p\Delta} \left\{ \beta C_{in}^* [P(p_1(f_4, f_2), p_1(f_1, f_3))] I_0(q_1 r) - \right. \\ &\quad \left. - P(p_2(f_4, f_2), p_2(f_1, f_3)) K_0(q_1 r) \right] - \\ &\quad \left. - C_{out}^* \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2 q_2 q_3} [g_2 I_0(q_1 r) + g_1 K_0(q_1 r)] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_2^* &= \frac{1}{p\Delta} \left\{ \beta C_{in}^* \frac{q_{12}}{q_1 r_1} [P(K_0(q_2 r_2), -K_1(q_2 r_2))] I_0(q_1 r) - \right. \\ &\quad \left. - P(I_0(q_2 r_2), I_1(q_2 r_2)) K_0(q_2 r) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_{out}^* \frac{R_2}{q_3 r_2} \left[(g_1 p_1(K_1(q_2 r_1), K_0(q_2 r_1))) + \right. \\
& \quad \left. + g_2 p_2(K_1(q_2 r_1), K_0(q_2 r_1))) I_0(q_2 r) + \right. \\
& \quad \left. + (g_1 p_1(I_1(q_2 r_1) - I_0(q_2 r_1)) + g_2 p_2(I_1(q_2 r_1) - I_0(q_2 r_1))) K_0(q_2 r) \right]; \\
\bar{C}_3^* &= \frac{1}{p \Delta} \left\{ \beta C_{in}^* \frac{q_{13}}{q_1 q_2 r_1 r_2} [K_0(q_3 r_3) I_0(q_3 r) - I_0(q_3 r_3) K_0(q_3 r)] - \right. \\
& \quad - C_{out}^* [(g_1 p_1(p_3(f_4, f_1), p_3(f_2, f_3))) + \\
& \quad + g_2 p_2(p_3(f_4, f_1), p_3(f_2, f_3))] I_0(q_3 r) + \\
& \quad + (g_1 p_1(p_4(f_4, f_1), p_4(f_2, f_3))) + \\
& \quad \left. + g_2 p_2(p_4(f_4, f_1), p_4(f_2, f_3))] K_0(q_3 r) \right\},
\end{aligned}$$

де

$$q_{ij} = \sqrt{D_i / D_j}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\};$$

функції мають вигляд:

$$\begin{aligned}
f_1 &= I_1(q_2 r_2) K_1(q_2 r_1) - I_1(q_2 r_1) K_1(q_2 r_2), \\
f_2 &= I_0(q_2 r_2) K_0(q_2 r_1) - I_0(q_2 r_1) K_0(q_2 r_2), \\
f_3 &= I_1(q_2 r_2) K_0(q_2 r_1) + I_0(q_2 r_1) K_1(q_2 r_2), \\
f_4 &= I_0(q_2 r_2) K_1(q_2 r_1) + I_1(q_2 r_1) K_0(q_2 r_2), \\
f_5 &= I_0(q_3 r_3) K_0(q_3 r_2) - I_0(q_3 r_2) K_0(q_3 r_3), \\
f_6 &= I_0(q_3 r_3) K_1(q_3 r_2) + I_1(q_3 r_2) K_0(q_3 r_3), \\
g_1 &= q_1 D_1 I_1(q_1 r_0) - \beta I_0(q_1 r_0), \\
g_2 &= q_1 D_1 K_1(q_1 r_0) + \beta K_0(q_1 r_0), \\
p_1(x, y) &= K_0(q_1 r_1) \cdot x - R_1 q_{12} K_1(q_1 r_1) \cdot y, \\
p_2(x, y) &= I_0(q_1 r_1) \cdot x + R_1 q_{12} I_1(q_1 r_1) \cdot y, \\
p_3(x, y) &= K_1(q_3 r_2) \cdot x + R_2 q_{23} K_0(q_3 r_2) \cdot y, \\
p_4(x, y) &= I_1(q_3 r_2) \cdot x - R_2 q_{23} I_0(q_3 r_2) \cdot y, \\
P(x, y) &= f_6 \cdot x + R_2 q_{23} f_5 \cdot y, \\
\Delta &= -P(g_1 p_1(f_4, f_2) + g_2 p_2(f_4, f_2), \\
& \quad g_1 p_1(f_1, f_3) + g_2 p_2(f_1, f_3)).
\end{aligned}$$

Вирази для функцій \bar{C}_j знаходяться з (5). Використовуючи властивості перетворення Лапласа та теорему обернення, отримаємо вирази для концентрацій у шарах $C_j(r, t)$:

$$C_j(r, t) = C_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j - i\infty}^{\gamma_j + i\infty} \exp(\lambda t) \bar{C}_j^*(r, \lambda) d\lambda, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (9)$$

де i – уявна одиниця.

Інтеграли беруться вздовж прямих, що проходять паралельно до уявної осі та розташовані справа від неї на відстанях γ_j . Величини γ_j припускаються настільки великими, щоб усі особливі точки підінтегральних функцій знаходились зліва від прямих.

Введемо такі функції:

$$\begin{aligned}
f^{mn}(\alpha, x, y) &= J_m(q_{31} \alpha y) Y_n(q_{31} \alpha x) - Y_m(q_{31} \alpha y) J_n(q_{31} \alpha x), \\
h^{mn}(\alpha, x, y) &= J_m(q_{32} \alpha y) Y_n(q_{32} \alpha x) - Y_m(q_{32} \alpha y) J_n(q_{32} \alpha x), \\
g^{mn}(\alpha, x, y) &= J_m(\alpha y) Y_n(\alpha x) - Y_m(\alpha y) J_n(\alpha x), \quad (10) \\
& \quad m, n \in \{0, 1\},
\end{aligned}$$

де $J_i(z)$, $Y_i(z)$ – функції Бесселя i -го порядку першого та другого роду, відповідно;

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha, x) &= \alpha q_{31} D_1 f^{11} + \beta f^{10}, \quad F_2(\alpha, x) = \alpha q_{31} D_1 f^{01} + \beta f^{00}, \\
F_3(\alpha, x) &= \alpha q_{31} D_1 f^{10} - \beta f^{11}, \quad F_4(\alpha, x) = \alpha q_{31} D_1 f^{00} - \beta f^{01}, \\
G_1(\alpha, x, y) &= h^{00} g^{01} - R_2 q_{23} h^{10} g^{00}, \\
G_2(\alpha, x, y) &= h^{01} g^{01} - R_2 q_{23} h^{11} g^{00}, \\
G_3(\alpha, x, y) &= -h^{10} g^{01} - R_2 q_{23} h^{00} g^{00}, \\
G_4(\alpha, x, y) &= h^{00} g^{11} - R_2 q_{23} h^{10} g^{10}, \\
G_5(\alpha, x, y) &= -h^{00} g^{00} - R_2 q_{23} h^{10} g^{01}, \\
G_6(\alpha, x, y) &= -h^{11} g^{01} - R_2 q_{23} h^{01} g^{00}, \quad (11)
\end{aligned}$$

де функції $f^{mn} = f^{mn}(\alpha, r_0, x)$, $g^{mn} = g^{mn}(\alpha, r_2, y)$, $h^{mn} = h^{mn}(\alpha, x, r_2)$, $m, n \in \{0, 1\}$ визначаються рівностями (10).

Підінтегральні функції інтегралів (9) є однозначно визначеними за λ та мають прості полюси при $\lambda = 0$ і $\lambda = -D_3 \alpha_n^2$, де $\alpha_n (n = 1, 2, \dots)$ – прості дійсні (додатні) корені [7] рівняння

$$F_2(\alpha_n, r_1) G_2(\alpha_n, r_1, r_3) - R_1 q_{12} F_1(\alpha_n, r_1) G_1(\alpha_n, r_1, r_3) = 0,$$

яке побудовано за допомогою функцій (11).

Використовуючи теорему Коші про лишки та обчислюючи лишки у відповідних полюсах, з рівностей (9) отримаємо остаточний результат для концентрацій вакансій кисню:

$$\begin{aligned}
C_1(r, t) &= R_1 R_2 C_{out} - (R_1 R_2 C_{out} - C_{in}) \times \\
& \times \frac{r_0 \beta \left\{ \ln(r_1 / r) + R_1 q_{12}^2 [\ln(r_2 / r_1) + R_2 q_{23}^2 \ln(r_3 / r_2)] \right\}}{D_1 + r_0 \beta \left\{ \ln(r_1 / r_0) + R_1 q_{12}^2 [\ln(r_2 / r) + R_2 q_{23}^2 \ln(r_3 / r_2)] \right\}} - \\
& - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-D_3 \alpha_n^2 t)}{\alpha_n^2 L(\alpha_n)} \left\{ (C_{out} - C_0) \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2 q_{32}} F_2 + \right. \\
& \left. + \beta \frac{\pi^2 \alpha_n^2}{4} (C_{in} - R_1 R_2 C_0) [G_2 f^{00} - R_1 q_{12} G_1 f^{10}] \right\},
\end{aligned}$$

де $F_2 = F_2(\alpha_n, r)$, $G_j = G_j(\alpha_n, r_1, r_3)$, $f^{m0} = f^{m0}(\alpha_n, r, r_1)$,

$$m \in \{0, 1\}, \quad j \in \{1, 2\};$$

$$\begin{aligned}
0 C_2(r, t) &= R_2 C_{out} - (R_1 R_2 C_{out} - C_{in}) \times \\
& \times \frac{r_0 \beta q_{12}^2 [\ln(r_2 / r) + R_2 q_{23}^2 \ln(r_3 / r_2)]}{D_1 + r_0 \beta \left\{ \ln(r_1 / r_0) + R_1 q_{12}^2 [\ln(r_2 / r_1) + R_2 q_{23}^2 \ln(r_3 / r_2)] \right\}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-D_3 \alpha_n^2 t)}{\alpha_n L(\alpha_n)} \left\{ (C_{out} - C_0) \frac{R_2}{r_2} [F_2 h^{01} - R_1 q_{12} F_1 h^{00}] + \right. \\
& \quad \left. + \beta (C_{in} - R_1 R_2 C_0) \frac{q_{12}^2}{r_1 q_{32}} G_1 \right\}; \\
\text{де } G_1 &= G_1(\alpha_n, r, r_3), F_j = F_j(\alpha_n, r_1), h^{0m} = h^{0m}(\alpha_n, r_1, r), \\
& m \in \{0, 1\}, j \in \{1, 2\}; \\
C_3(r, t) &= C_{out} - (R_1 R_2 C_{out} - C_{in}) \times \\
& \times \frac{r_0 \beta q_{13}^2 \ln(r_3 / r)}{D_1 + r_0 \beta \left\{ \ln(r_1 / r_0) + R_1 q_{12}^2 [\ln(r_2 / r_1) + R_2 q_{23}^2 \ln(r_3 / r_2)] \right\}} - \\
& - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-D_3 \alpha_n^2 t)}{L(\alpha_n)} \left\{ (C_{out} - C_0) \frac{\pi^2}{4} [F_2 G_2 - R_1 q_{12} F_1 G_1] + \right. \\
& \quad \left. + \beta (C_{in} - R_1 R_2 C_0) \frac{q_{13}^2}{\alpha_n^2 r_1 r_2 q_{32}} g_{00} \right\}, \quad (12)
\end{aligned}$$

де $g_{00} = g_{00}(\alpha_n, r, r_3)$, $F_j = F_j(\alpha_n, r_1)$, $G_j = G_j(\alpha_n, r_1, r)$, $j \in \{1, 2\}$.
Тут функція $L(\alpha_n)$ визначається рівністю

$$\begin{aligned}
L(\alpha_n) &= \\
&= G_2 / F_1 \left\{ \alpha_n q_{31} \left[r_1 (F_1^2 + F_2^2) - r_0 (F_1 F_4 - F_2 F_3) \right] - F_1 F_2 \right\} - \\
& - F_2 / G_1 \left\{ \alpha_n q_{32} \left[r_1 (G_1^2 + G_2^2) + r_2 (G_1 G_6 - G_2 G_3) \right] - \right. \\
& \quad \left. - G_1 G_2 - \alpha_n (G_1 - G_2) (r_3 G_4 + r_2 G_5) \right\},
\end{aligned}$$

де $G_i = G_i(\alpha_n, r_1, r_3)$, $i = \overline{1, 6}$; $F_j = F_j(\alpha_n, r_1)$, $j = \overline{1, 4}$.

2. Задача про напружено-деформований стан.

Аналітичний розв'язок. Отримаємо аналітичні вирази формул для обчислення розподілу дифузійних напружень у мембрані, що виникають при проходженні кисню. Початковий стан мембрани вважаємо ненапруженим. Деформація мембрани аналізується в циліндричній системі координат (r, θ, z) в умовах плоскої деформації та симетрії відносно осі z . Тут r – радіальна координата, θ відповідає коловому напрямку, z – осьова координата. Розглядаються три ненульові компоненти напружень σ_r , σ_θ , σ_z і три ненульові компоненти деформацій ε_r , ε_θ , ε_z . Тут

$$\sigma_r = \sigma_{rj}, \quad \sigma_\theta = \sigma_{\theta j}, \quad \sigma_z = \sigma_{zj};$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{rj}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta j}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{zj}, \quad r \in (r_{j-1}; r_j), \quad j = \overline{1, 3}.$$

Компоненти деформацій представимо у вигляді суми пружних та дифузійних складових:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^d; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^d; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^d. \quad (13)$$

Компоненти пружної деформації визначаються узагальненим законом Гука:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^e &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \quad \varepsilon_\theta^e = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)], \\
\varepsilon_z^e &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)], \quad (14)
\end{aligned}$$

де $E = E_j$, $\nu = \nu_j$, $r \in (r_{j-1}; r_j)$, $j = \overline{1, 3}$ – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, відповідно.

Припускаємо, що

$$\varepsilon_r^d = \varepsilon_\theta^d = \varepsilon_z^d = A(C - C_0), \quad (15)$$

де $A = A_j$, $r \in (r_{j-1}; r_j)$, $j = \overline{1, 3}$ – коефіцієнт хімічного розширення. Підставивши (14) і (15) в рівності (13), отримаємо

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + A(C - C_0), \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + A(C - C_0), \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + A(C - C_0). \quad (16)
\end{aligned}$$

Далі, з останньої формули (16) знаходимо

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E(A(C - C_0) - \varepsilon_z), \quad (17)$$

а з перших двох:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} [\varepsilon_r + \nu_0 \varepsilon_\theta - (1 + \nu_0)(A_0(C - C_0) - \nu \varepsilon_z)], \\
\sigma_\theta &= \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} [\varepsilon_\theta + \nu_0 \varepsilon_r - (1 + \nu_0)(A_0(C - C_0) - \nu \varepsilon_z)], \quad (18)
\end{aligned}$$

де для спрощення прийняті такі позначення:

$$E_0 = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1 - \nu}; \quad A_0 = A(1 + \nu).$$

Напруження задовольняють рівнянню рівноваги

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (19)$$

Кінематичні залежності можна представити як

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz}, \quad (20)$$

де $u = u_j$, $w = w_j$, $r \in (r_{j-1}; r_j)$, $j = \overline{1, 3}$ – радіальне та осьове переміщення, відповідно.

Підставивши вирази для напружень (18) у рівняння (19), отримаємо

$$\begin{aligned}
r \frac{d}{dr} (\varepsilon_r + \nu_0 \varepsilon_\theta) + (1 - \nu_0) (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) &= \\
= (1 + \nu_0) r \frac{d}{dr} (\nu(A_0 C - \varepsilon_z) + A_0 C). \quad (21)
\end{aligned}$$

Підставивши далі вирази для ε_r і ε_θ з (20) в (21), приходимо до рівняння

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1 + \nu_0) r \frac{d}{dr} (v(AC - \varepsilon_z) + AC). \quad (22)$$

Інтегруючи рівняння (22), знаходимо

$$u_j = (1 + \nu_0) \frac{1}{r} \int_{r_{j-1}}^{r_j} (v_j (A_j C_j - \varepsilon_{zj}) + A_j C_j) r dr + c_{1j} r + \frac{c_{2j}}{r}, \quad j = \overline{1,3}. \quad (23)$$

Константи c_{1j} і c_{2j} у виразах (23) будуть визначені нижче за допомогою граничних умов.

Використовуючи далі співвідношення (18), (20) і (23), знаходимо напруження σ_r і σ_θ . Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{rj} = & -\frac{E_j \nu_j}{1 - \nu_j^2} \frac{1}{r^2} \int_{r_{j-1}}^{r_j} (A_j C_j - \varepsilon_{zj}) r dr - \\ & - \frac{E_j}{1 - \nu_j^2} \frac{A_j}{r^2} \int_{r_{j-1}}^{r_j} C_j r dr + \frac{E_j}{1 + \nu_j} \left(\frac{c_{1j}}{1 - 2\nu_j} - \frac{c_{2j}}{r^2} \right) + \\ & + \frac{E_j A_j C_0}{1 - 2\nu_j}, \\ \sigma_{\theta j} = & \frac{E_j \nu_j}{1 - \nu_j^2} \frac{1}{r^2} \int_{r_{j-1}}^{r_j} (A_j C_j - \varepsilon_{zj}) r dr + \\ & + \frac{E_j}{1 - \nu_j^2} \frac{A_j}{r^2} \int_{r_{j-1}}^{r_j} C_j r dr + \\ & + \frac{E_j}{1 + \nu_j} \left(\frac{c_{1j}}{1 - 2\nu_j} + \frac{c_{2j}}{r^2} \right) + \frac{E_j \nu_j}{1 - \nu_j^2} \varepsilon_{zj} - \\ & - \frac{E_j A_j C_j}{1 - \nu_j} + \frac{E_j A_j C_0}{1 - 2\nu_j}, \quad j = \overline{1,3}. \quad (24) \end{aligned}$$

Підставивши (24) в (17), отримаємо вираз для σ_z :

$$\begin{aligned} \sigma_{zj} = & \frac{2E_j \nu_j}{1 + \nu_j} \frac{c_{1j}}{1 - 2\nu_j} + \frac{E_j}{1 - \nu_j^2} \varepsilon_{zj} - \\ & - \frac{E_j A_j C_j}{1 - \nu_j} + \frac{E_j A_j C_0}{1 - 2\nu_j}, \quad j = \overline{1,3}. \quad (25) \end{aligned}$$

Умова відсутності напружень на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_3$ поверхнях циліндра визначається рівностями

$$\sigma_{r1}(r_0, t) = \sigma_{r3}(r_3, t) = 0, \quad t > 0. \quad (26)$$

На поверхнях стику шарів мембрани повинні виконуватися умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}(r_1, t) = \sigma_{r2}(r_1, t); \quad \sigma_{r2}(r_2, t) = \sigma_{r3}(r_2, t), \\ u_1(r_1, t) = u_2(r_1, t); \quad u_2(r_2, t) = u_3(r_2, t), \quad t > 0. \quad (27) \end{aligned}$$

Оскільки припускається плоска деформація, то величину ε_z вважаємо сталою. Тоді з умов (26) – (27) знаходимо вирази для констант c_{1j} і c_{2j} ($j = \overline{1,3}$).

Оскільки на циліндр не діє осьове зусилля, можна

записати, що $\sum_{j=1}^3 \int_{r_{j-1}}^{r_j} \sigma_{zj} 2\pi r dr = 0$. Звідси, враховуючи (25),

обчислені константи c_{1j} ($j = \overline{1,3}$) та припущення плоскої деформації, знаходимо вираз для ε_z .

Позначимо:

$$\begin{aligned} k_{1,12} = & (1 + \nu_2)(1 + \nu_3) \left((1 - 2\nu_2)r_1^2 + r_2^2 \right) \times \\ & \times \left((1 - 2\nu_3)r_2^2 + r_3^2 \right) E_1 E_2, \\ k_{1,22} = & (1 + \nu_1)(1 + \nu_3) \left(r_2^2 - r_1^2 \right) \left((1 - 2\nu_3)r_2^2 + r_3^2 \right) E_2^2, \\ k_{1,13} = & (1 + \nu_2)^2 \left(r_3^2 - r_2^2 \right) \left(r_2^2 - r_1^2 \right) E_1 E_3, \\ k_{1,23} = & (1 + \nu_1)(1 + \nu_2) \left((1 - 2\nu_2)r_2^2 + r_1^2 \right) \left(r_3^2 - r_2^2 \right) E_2 E_3, \\ k_{2,12} = & (1 + \nu_2)(1 + \nu_3) \left(r_1^2 - r_0^2 \right) \left((1 - 2\nu_3)r_2^2 + r_3^2 \right) E_1 E_2, \\ k_{2,22} = & (1 + \nu_1)(1 + \nu_3) \left((1 - 2\nu_1)r_1^2 + r_0^2 \right) \times \\ & \times \left((1 - 2\nu_3)r_2^2 + r_3^2 \right) E_2^2, \\ k_{2,13} = & (1 + \nu_2)^2 \left(r_3^2 - r_2^2 \right) \left(r_1^2 - r_0^2 \right) E_1 E_3, \\ k_{2,23} = & (1 + \nu_1)(1 + \nu_2) \left((1 - 2\nu_1)r_1^2 + r_0^2 \right) \left(r_3^2 - r_2^2 \right) E_2 E_3, \\ k_{3,12} = & (1 + \nu_2)(1 + \nu_3) \left(r_1^2 - r_0^2 \right) \left((1 - 2\nu_2)r_1^2 + r_2^2 \right) E_1 E_2, \\ k_{3,22} = & (1 + \nu_1)(1 + \nu_3) \left((1 - 2\nu_1)r_1^2 + r_0^2 \right) \left(r_2^2 - r_1^2 \right) E_2^2, \\ k_{3,13} = & (1 + \nu_2)^2 \left(r_2^2 - r_1^2 \right) \left(r_1^2 - r_0^2 \right) E_1 E_3, \\ k_{3,23} = & (1 + \nu_1)(1 + \nu_2) \left((1 - 2\nu_1)r_1^2 + r_0^2 \right) \times \\ & \times \left((1 - 2\nu_2)r_2^2 + r_1^2 \right) E_2 E_3, \\ k = & \left(r_1^2 - r_0^2 \right) k_{1,12} + \left(1 - 2\nu_2 \right) k_{1,13} + \left((1 - 2\nu_1)r_1^2 + r_0^2 \right) \times \\ & \times \left(k_{1,22} + k_{1,23} \right), \end{aligned}$$

$$K_{11} = k_{1,12} - k_{1,22} + (1 - 2\nu_2) k_{1,13} - k_{1,23},$$

$$K_{12} = 2r_1^2 (1 - \nu_1) \left[\frac{k_{1,22}}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{k_{1,23}}{(1 - 2\nu_2)r_2^2 + r_1^2} \right],$$

$$K_{13} = 4r_1^2 r_2^2 (1 - \nu_1^2) (1 - \nu_2^2) E_2 E_3,$$

$$K_{21} = \frac{2r_1^2 (1 - \nu_2)}{r_1^2 - r_0^2} (k_{2,12} - k_{2,13}),$$

$$K_{22} = k_{2,12} + k_{2,22} - (1 - 2\nu_2) k_{2,13} - k_{2,23},$$

$$\begin{aligned}
K_{23} &= \frac{2r_2^2(1-v_2)}{r_3^2-r_2^2}(k_{2,13}+k_{2,23}), \\
K_{31} &= 4r_1^2r_2^2(1-v_2^2)(1-v_3^2)E_1E_2, \\
K_{32} &= 2r_2^2(1-v_3)\left[\frac{k_{3,12}}{(1-2v_2)r_1^2+r_2^2}+\frac{k_{3,22}}{r_2^2-r_1^2}\right], \\
K_{33} &= k_{3,12}+k_{3,22}+(1-2v_2)k_{3,13}+k_{3,23}, \\
Kr_{1j} &= (1-2v_1)(r^2-r_0^2)K_{1j}, \quad j=\overline{1,3}, \\
Kt_{1j} &= (1-2v_1)(r^2+r_0^2)K_{1j}, \quad j=\overline{1,3}, \\
Kr_{21} &= \frac{2r_1^2(1-2v_2)(1-v_2)}{r_1^2-r_0^2} \times \\
&\times [k_{2,12}(r^2-r_2^2)-k_{2,13}((1-2v_2)r_2^2+r^2)], \\
Kr_{22} &= (1-2v_2) \times \\
&\times [(k_{2,12}-k_{2,13})(1-2v_2)r_1^2+r^2+(k_{2,22}-k_{2,23})(r^2-r_1^2)], \\
Kr_{23} &= \frac{2r_2^2(1-2v_2)(1-v_2)}{r_3^2-r_2^2} \times \\
&\times [k_{2,13}((1-2v_2)r_1^2+r^2)+k_{2,23}(r^2-r_1^2)], \\
Kt_{21} &= \frac{2r_1^2(1-2v_2)(1-v_2)}{r_1^2-r_0^2} \times \\
&\times [k_{2,12}(r^2+r_2^2)+k_{2,13}((1-2v_2)r_2^2-r^2)], \\
Kt_{22} &= (1-2v_2) \times \\
&\times [-(k_{2,12}-k_{2,13})(1-2v_2)r_1^2-r^2+(k_{2,22}-k_{2,23})(r^2+r_1^2)], \\
Kt_{23} &= \frac{2r_2^2(1-2v_2)(1-v_2)}{r_3^2-r_2^2} \times \\
&\times [-k_{2,13}((1-2v_2)r_1^2-r^2)+k_{2,23}(r^2+r_1^2)]; \\
Kr_{31} &= -(1-2v_3)(r_3^2-r^2)K_{31}; \\
Kr_{12} &= -(1-2v_3)(r_3^2-r^2)K_{32}; \\
Kr_{33} &= (1-2v_3) \times \\
&\times [(k_{3,12}+k_{3,22})(1-2v_3)r_2^2+r^2+((1-2v_2)k_{3,13}+k_{3,23})(r^2-r_2^2)], \\
Kt_{31} &= (1-2v_3)(r_3^2+r^2)K_{31}, \\
Kt_{12} &= (1-2v_3)(r_3^2+r^2)K_{32}, \\
Kt_{33} &= (1-2v_3) \times \\
&\times [-(k_{3,12}+k_{3,22})(1-2v_3)r_2^2-r^2+ \\
&+ ((1-2v_2)k_{3,13}+k_{3,23})(r^2+r_2^2)], \\
m_{11,1} &= -(1-v_1^2)k_{1,12}+(1-2v_2)k_{1,13}(r_1^2-r_0^2), \\
m_{11,2} &= -(1-v_1^2)(k_{1,22}+k_{1,23})r_0^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{12} &= (1-2v_1)(1-v_1)(1+v_2)r_1^2\left[-k_{1,22}+\frac{k_{1,23}(r_2^2-r_1^2)}{(1-2v_2)r_2^2+r_1^2}\right], \\
m_{13} &= -(1-2v_1)(1-v_1)(1-v_2)(1+v_3)\frac{2r_1^2r_2^2}{(1-2v_2)r_2^2+r_1^2}k_{1,23}, \\
m_{21} &= (1-2v_2)(1-v_2)(1+v_1)r_1^2(-k_{2,12}+k_{2,13}), \\
m_{22} &= -(1-v_2^2)[k_{2,12}r_2^2+k_{2,23}r_1^2+k_{2,22}(r_2^2-r_1^2)], \\
m_{23} &= -(1-2v_2)(1-v_2)(1+v_3)r_2^2(k_{2,13}+k_{2,23}), \\
mr_{21} &= (1-2v_2)(1-v_2)(1+v_1)r_1^2 \times \\
&\times [k_{2,12}(r_2^2-r^2)+k_{2,13}((1-2v_2)r_2^2+r^2)], \\
mr_{22} &= -(1-v_2^2)[k_{2,12}r_2^2((1-2v_2)r_1^2+r^2)+ \\
&+ k_{2,23}r_1^2((1-2v_2)r_2^2+r^2)+k_{2,22}r^2(r_2^2-r_1^2)], \\
mr_{23} &= -(1-2v_2)(1-v_2)(1+v_3)r_2^2 \times \\
&\times [k_{2,13}((1-2v_2)r_1^2+r^2)+k_{2,23}(r^2-r_1^2)], \\
mt_{21} &= -(1-2v_2)(1-v_2)(1+v_1)r_1^2 \times \\
&\times [k_{2,12}(r_2^2+r^2)+k_{2,13}((1-2v_2)r_2^2+r^2)], \\
mt_{22} &= (1-v_2^2)[k_{2,12}r_2^2((1-2v_2)r_1^2-r^2)+ \\
&+ k_{2,23}r_1^2((1-2v_2)r_2^2-r^2)-k_{2,22}r^2(r_2^2-r_1^2)], \\
mt_{23} &= -(1-2v_2)(1-v_2)(1+v_3)r_2^2 \times \\
&\times [-k_{2,13}((1-2v_2)r_1^2-r^2)+k_{2,23}(r^2+r_1^2)], \\
m_{31} &= -(1-2v_3)(1-v_2)(1-v_3)(1+v_1) \times \\
&\times \frac{2r_1^2r_2^2}{(1-2v_2)r_1^2+r_2^2}k_{3,12}, \\
m_{32} &= -(1-2v_3)(1-v_3)(1+v_2) \times \\
&\times \left[k_{3,12}\frac{r_2^2-r_1^2}{(1-2v_2)r_1^2+r_2^2}+k_{3,22}\right], \\
m_{33,1} &= -(1-v_3^2)r_3^2(k_{3,12}+k_{3,22}), \\
m_{33,2} &= -(1-v_3^2)(r_3^2-r_2^2)((1-2v_2)k_{3,13}+k_{3,23}), \\
M_1 &= A_1(m_{11,1}+m_{11,2})+A_2m_{12}+A_3m_{13}, \\
M_2 &= A_1m_{21}+A_2m_{22}+A_3m_{23}, \\
M_3 &= A_1m_{31}+A_2m_{32}+A_3(m_{33,1}+m_{33,2}), \\
Mr_1 &= A_1[r^2m_{11,1}+((1-2v_1)r_1^2+r^2)m_{11,2}] + \\
&+ A_2(r^2-r_0^2)m_{12}+A_3(r^2-r_0^2)m_{13}, \\
Mr_2 &= A_1mr_{21}+A_2mr_{22}+A_3mr_{23}, \\
Mr_3 &= -A_1(r_3^2-r^2)m_{31}-A_2(r_3^2-r^2)m_{32}+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_3 \left[\left((1-2v_3)r_2^2 + r^2 \right) m_{33,1} + r^2 m_{33,2} \right], \\
Mt_1 = & A_1 \left[r^2 m_{11,1} - \left((1-2v_1)r_1^2 - r^2 \right) m_{11,2} \right] + \\
& + A_2 \left(r^2 + r_0^2 \right) m_{12} + A_3 \left(r^2 + r_0^2 \right) m_{13}, \\
Mt_2 = & A_1 m_{21} + A_2 m_{22} + A_3 m_{23}, \\
Mt_3 = & A_1 \left(r_3^2 + r^2 \right) m_{31} + A_2 \left(r_3^2 + r^2 \right) m_{32} + \\
& + A_3 \left[- \left((1-2v_3)r_2^2 - r^2 \right) m_{33,1} + r^2 m_{33,2} \right]. \quad (28)
\end{aligned}$$

Використовуючи позначення (28), отримаємо вираз для ε_z :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z = & \sum_{i=1}^3 \left[\frac{E_i v_i}{1-v_i^2} \frac{r_i^2 - r_{i-1}^2}{k} \sum_{j=1}^3 A_j (1+v_j) K_{ij} \int_{r_{j-1}}^{r_j} r C_j(r,t) dr - \right. \\
& \left. - \frac{A_i E_i}{1-v_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r C_i(r,t) dr \right] + \\
& + C_0 \frac{2 \sum_{i=1}^3 \frac{E_i}{1-2v_i} \left(r_i^2 - r_{i-1}^2 \right) \left(\frac{v_i}{k} \frac{M_i}{1-v_i^2} + \frac{A_i}{2} \right)}{\sum_{i=1}^3 \frac{E_i}{1-v_i^2} \left(r_i^2 - r_{i-1}^2 \right) \left[\frac{v_i}{k} \sum_{j=1}^3 v_j \left(r_j^2 - r_{j-1}^2 \right) K_{ij} - 1 \right]}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Далі, підставляючи знайдені вирази для констант c_{1j} і c_{2j} ($j = \overline{1,3}$) у рівності (24) – (25) та використовуючи позначення (28), отримаємо вирази для напружень:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rj} = & - \frac{E_j}{1-v_j^2} \frac{1}{r^2} \left[A_j (1+v_j) \int_{r_{j-1}}^r r C_j(r,t) dr - \right. \\
& \left. - \frac{r^2 - r_{j-1}^2}{2} v_j \varepsilon_z \right] + \left(\frac{E_j}{(1-v_j^2)(1-2v_j)} \right) \frac{1}{r^2} \frac{1}{k} \times \\
& \times \left[\sum_{i=1}^3 K r_{ji} \left(A_i (1+v_i) \int_{r_{i-1}}^{r_i} r C_i(r,t) dr - \frac{r_i^2 - r_{i-1}^2}{2} v_i \varepsilon_z \right) + \right. \\
& \left. + C_0 M r_j \right] + \frac{E_j A_j C_0}{1-2v_j}, \\
\sigma_{\theta j} = & \frac{E_j}{1-v_j^2} \frac{1}{r^2} \left[A_j (1+v_j) \int_{r_{j-1}}^r r C_j(r,t) dr - \right. \\
& \left. - \frac{r^2 - r_{j-1}^2}{2} v_j \varepsilon_z \right] + \left(\frac{E_j}{(1-v_j^2)(1-2v_j)} \right) \frac{1}{r^2} \frac{1}{k} \times \\
& \times \left[\sum_{i=1}^3 K t_{ji} \left(A_i (1+v_i) \int_{r_{i-1}}^{r_i} r C_i(r,t) dr - \frac{r_i^2 - r_{i-1}^2}{2} v_i \varepsilon_z \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$+ C_0 M t_j \left] + \frac{E_j v_j}{1-v_j^2} \varepsilon_z - \frac{A_j E_j C_j}{1-v_j} + \frac{E_j A_j C_0}{1-2v_j},$$

$$\sigma_{zj} = \frac{2E_j v_j}{1-v_j^2} \frac{1}{k} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \sum_{i=1}^3 K_{ji} \left[A_i (1+v_i) \int_{r_{i-1}}^{r_i} r C_i(r,t) dr - \frac{r_i^2 - r_{i-1}^2}{2} v_i \varepsilon_z \right] + \right. \\
& \left. + \frac{C_0 M_j}{1-2v_j} \right\} + \frac{E_j}{1-v_j^2} \varepsilon_z - \frac{E_j A_j C_j}{1-v_j} + \frac{E_j A_j C_0}{1-2v_j}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Для отримання остаточного результату розподілу напружень у трубчастій тришаровій мембрані реактора для виробництва синтетичного газу треба підставити вирази (12) для концентрацій C_j у рівності (29) та (30).

Зауважимо, що викладена вище аналітична методика розв'язання нестационарної задачі дифузії (1) – (4) та формули (30) для обчислення дифузійних напружень можуть бути використані для розв'язання рівняння теплопровідності Фур'є [8, 9] з відповідними початковими, крайовими умовами та умовами контакту шарів, а також для обчислення температурних напружень у тришаровій циліндричній мембрані.

Запишемо рівняння нестационарної теплопровідності в циліндричній системі координат, деякі можливі початкові, крайові умови та умови контакту шарів ($R_1 = R_2 = 1$) у вигляді:

$$\lambda_j \left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_j}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_j}{\partial t}, \quad r \in (r_{j-1}; r_j), \quad j = \overline{1,3}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
T_1(r,0) &= T_0, \quad r \in (r_0; r_1), \\
T_2(r,0) &= T_0, \quad r \in (r_1; r_2), \\
T_3(r,0) &= T_0, \quad r \in (r_2; r_3); \quad (32)
\end{aligned}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -h(T_1 - T_{in}), \quad r = r_0,$$

$$T_3(r_3, t) = T_{out}; \quad (33)$$

$$T_1(r_1, t) = T_2(r_1, t),$$

$$T_2(r_2, t) = T_3(r_2, t),$$

$$\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial r} = \lambda_{j+1} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial r}, \quad r = r_j, \quad j = \overline{1,2}, \quad (34)$$

де λ_j ($j = \overline{1,3}$) – коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів, що складають мембрану, T_0 – початкове значення температури, h – коефіцієнт теплообміну, T_{out} – температура зовнішньої поверхні циліндра, T_{in} – температура внутрішньої поверхні циліндра.

Співставивши формули (1) – (4) з (31) – (34), можна зробити висновок, що математичні постановки задач дифузії та теплопровідності є ідентичними.

3. Задача про напружено-деформований стан.

Числовий розв'язок. В якості розрахункової схеми киснево-транспортної мембрани візьмемо циліндричне тришарове тіло обертання скінченних розмірів $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, віднесене до циліндричної системи координат $Orz\theta$. Складові частини тіла V_1, V_2, V_3 жорстко зчеплені між собою. Вісь Oz збігається з віссю обертання циліндра. Меридональний перетин тіла площиною rOz має форму Ω з межею $\partial\Omega$. Область Ω є об'єднанням підобластей Ω_k ($k = 1, 2, 3$) з межами $\partial\Omega_k$. Тіло навантажене зовнішніми силами так, що шуканий розв'язок не залежить від кута θ .

Компоненти тензора повних деформацій складаються з компонентів тензорів пружних, температурних та дифузійних деформацій – $\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^T, \varepsilon_{ij}^d$:

$$\varepsilon_{ij}(r, z, t) = \varepsilon_{ij}^e(r, z, t) + \varepsilon_{ij}^T(r, z, t) + \varepsilon_{ij}^d(r, z, t), \quad (i, j = \overline{1, 3}).$$

Температурні та дифузійні деформації обчислюються за формулами:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij}^d = A(C - C_0)\delta_{ij},$$

де $T = T(r, z, t)$ – температура, $C = C(r, z, t)$ – концентрація вакансій кисню, $\alpha = \alpha(r)$, $A = A(r)$ – коефіцієнти лінійного температурного та хімічного розширення відповідно, T_0, C_0 – значення температури та концентрації вакансій кисню, за яких напруження відсутні, δ_{ij} – символ Кронекера. Вважаємо, що функції розподілу температури $T(r, z, t)$ та концентрації вакансій кисню $C(r, z, t)$ відомі.

Крайова задача пружного деформування циліндра може бути зведена до варіаційної проблеми знаходження мінімуму функціонала Лагранжа, визначеного для кінематично можливих переміщень [10]:

$$\begin{aligned} \Lambda(u_{ri}, u_{zi}) = & 0,5 \sum_{i=1}^N \iint \left[\lambda_1 (u_{ri,r}^2 + u_{zi,z}^2 + u_{ri}^2 r^{-2}) + \right. \\ & \left. + G(u_{ri,z} + u_{zi,r})^2 + \right. \\ & \left. + 2\lambda (u_{ri,r} u_{zi,z} + u_{ri} (u_{ri,r} + u_{zi,z}) r^{-1}) \right] r dr dz - \\ & - \sum_{i=1}^N \iint \left[u_{ri,r} N_r^f + u_{zi,z} N_z^f + u_{ri} N_\theta^f r^{-1} + \right. \\ & \left. + N_{rz}^f (u_{ri,z} + u_{zi,r}) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p} (P_n^0 u_n + P_\tau^0 u_\tau) d\partial\Omega, \quad (35) \end{aligned}$$

де $N = 3$ – кількість шарів; $u_{ri}(r, z, t)$, $u_{zi}(r, z, t)$ ($i = \overline{1, N}$) – переміщення в шарах циліндра вздовж осей Or та Oz відповідно; $\partial\Omega$ – частина контуру $\partial\Omega$, де діють зовнішні сили; P_n^0, P_τ^0 – нормальна та дотична складові зовнішніх поверхневих сил; $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ – зовнішня нормаль та дотична до контуру $\partial\Omega$; $u_n = u_{rp} n_r + u_{zp} n_z$, $u_\tau = u_{rp} n_r - u_{zp} n_z$ – нормальна й тангенціальна складові вектора переміщень на поверхні шару, де прикладені

зовнішні навантаження; n_r, n_z – напрямні косинуси

нормалі \mathbf{n} ; $\lambda(r) = \frac{E(r)\nu(r)}{(1-2\nu(r))(1+\nu(r))}$; $\lambda_1(r) = \lambda(r) + 2G(r)$;

$E(r), G(r), \nu(r)$ – пружні характеристики, які в кожному шарі є константами. “Фіктивні” зусилля, зумовлені температурними та дифузійними деформаціями, обчислюються за формулами:

$$N_r^f = \left[\lambda_1 e_r + \lambda(e_z + e_\theta) \right], \quad N_z^f = \left[\lambda_1 e_z + \lambda(e_r + e_\theta) \right],$$

$$N_\theta^f = \left[\lambda_1 e_\theta + \lambda(e_r + e_z) \right], \quad N_{rz}^f = 2G e_{rz},$$

де

$$e_r = \varepsilon_r^T + \varepsilon_r^d, \quad e_z = \varepsilon_z^T + \varepsilon_z^d,$$

$$e_\theta = \varepsilon_\theta^T + \varepsilon_\theta^d, \quad e_{rz} = \varepsilon_{rz}^T + \varepsilon_{rz}^d.$$

Основні невідомі задачі в довільній точці тіла можуть бути знайдені за формулами:

$$\varepsilon_r = u_{r,r}, \quad \varepsilon_z = u_{z,z}, \quad \varepsilon_\theta = u_{r,r}^{-1}, \quad \gamma_{rz} = u_{r,z} + u_{z,r},$$

$$\sigma_r = \lambda(\varepsilon_z + \varepsilon_\theta - e_z - e_\theta) + \lambda_1(\varepsilon_r - e_r),$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta - e_r - e_\theta) + \lambda_1(e_z - e_z),$$

$$\sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_z - e_r - e_z) + \lambda_1(\varepsilon_\theta - e_\theta),$$

$$\sigma_{rz} = G(\gamma_{rz} - 2e_{rz}), \quad (36)$$

Варіаційну задачу будемо розв'язувати методом Рітца. Координатні функції, у випадку якщо область Ω має складну геометричну форму, можуть бути побудовані методом R-функцій [11]. Метод R-функцій дозволяє точно враховувати геометричну форму та граничні умови самого загального виду. При цьому, наближений розв'язок крайової задачі, подається у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє всім або частині граничних умов і є інваріантною стосовно геометричної форми області Ω , де відшукується наближений розв'язок крайової задачі. Структура розв'язку є основою для побудови систем координатних функцій варіаційних методів.

4. Числові результати. Для перевірки достовірності отриманих у розділі 2 аналітичних формул (30) та запропонованого в розділі 3 чисельно-аналітичного методу, розглянемо задачу визначення напружено-деформованого стану (НДС) тришарового циліндра. Температура циліндра є сталою – $T(r, z, t) = 900^\circ \text{C}$. Товщини шарів: $h_1 = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $h_2 = 0,04 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $h_3 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Радіуси бокових меж складових циліндрів: $r_0 = 8,66 \text{ мм}$, $r_1 = 10,86 \text{ мм}$, $r_2 = 10,9 \text{ мм}$, $r_3 = 11,0 \text{ мм}$. Довжина $l = 1,0 \text{ м}$. Модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона шарів циліндра за температури 900°C наступні: $E_1 = 58,0 \text{ ГПа}$, $E_2 = 155,0 \text{ ГПа}$, $E_3 = 64,0 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = 0,25$, $\nu_2 = 0,316$, $\nu_3 = 0,25$. Коефіцієнти лінійного температурного розширення: $\alpha_1 = 10,7 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_2 = 10,3 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_3 = 12,0 \cdot 10^{-6}$. Температура, за якої відсутні напруження $T_0 = 1250^\circ \text{C}$. Зовнішні сили відсутні ($P_n^0 = 0$, $P_\tau^0 = 0$).

Далі розглянемо умови закріплення, граничні умови та відповідні структури розв'язку. Бокові межі циліндра

$r = r_0$, $r = r_3$ вільні від закріплення та зовнішніх навантажень. Торці циліндра ($z = \pm l/2$) можуть вільно переміщуватися вздовж осі Oz .

При чисельній реалізації будемо використовувати симетрію задачі. На осі симетрії, в перерізі $z = 0$, задаються такі умови:

$$u_{zi} = 0, \quad \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} = 0 \quad (i = 1,2,3). \quad (37)$$

Граничні умови на торцях циліндра, при $z = \pm l/2$:

$$\sigma_z^{(i)}(u_{ri}, u_{zi}) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(i)}(u_{ri}, u_{zi}) = 0 \quad (i = 1,2,3). \quad (38)$$

На внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра, при $r = r_0$ та $r = r_3$

$$\sigma_r^{(i)}(u_{ri}, u_{zi}) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(i)}(u_{ri}, u_{zi}) = 0 \quad (i = 1,3). \quad (39)$$

На межах шарів задаються умови жорсткого зчеплення:

$$u_r^{(k)} = u_r^{(k+1)}, \quad u_z^{(k)} = u_z^{(k+1)} \quad (k = 1,2), \quad (40)$$

$$\sigma_r^{(k)} = \sigma_r^{(k+1)}, \quad \sigma_{rz}^{(k)} = \sigma_{rz}^{(k+1)}, \quad (41)$$

Умови (38), (39), (41) є природними для функціонала (35).

Структури розв'язку, що задовольняють кінематичним умовам (37) та (40), можуть бути записані у вигляді:

$$u_{ri} = \Phi_1 - \omega_0 D_1 \Phi_1 + \omega_i^2 \Phi_{ri}, \\ u_{zi} = \omega_4 \Phi_2 + \omega_i^2 \Phi_{zi}. \quad (42)$$

Тут $\omega_0 = z$, а ω_i ($i = 1,2,3$) – функції, що задовольняють такі умови [11]:

$$\omega_i = 0, \quad \text{на } \partial\Omega_i, \quad \omega_i > 0 \quad \text{в } \Omega_i;$$

$D_1 = \frac{\partial \omega_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$ – диференціальний оператор [11];

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{ri}, \Phi_{zi}$ ($i = 1,2,3$) – невизначені компоненти структури розв'язку, які при дискретизації крайової задачі подають у вигляді [11]

$$\Phi_l(\mathbf{x}) \approx \Phi_{lN}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k, \quad \mathbf{x} = (r, z),$$

де $\{\varphi_k\}$ – елементи деякого функціонального простору \mathbf{M} , який містить в собі Φ_l , що утворюють у ньому повну послідовність, C_k – невідомі коефіцієнти. Тут в якості $\{\varphi_k\}$, використовувалися бікубічні сплайни Шенберга [11, 12]. Функції ω_i можуть бути задані так:

$$\omega_i = \omega_4 f_i,$$

де

$$\omega_4 = \frac{2z}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right), \quad f_i = \frac{(r - r_{i-1})(r_i - r)}{r_i - r_{i-1}},$$

Очевидно, що структури розв'язку виду (42) можуть бути легко побудовані і для будь якої іншої кількості шарів N .

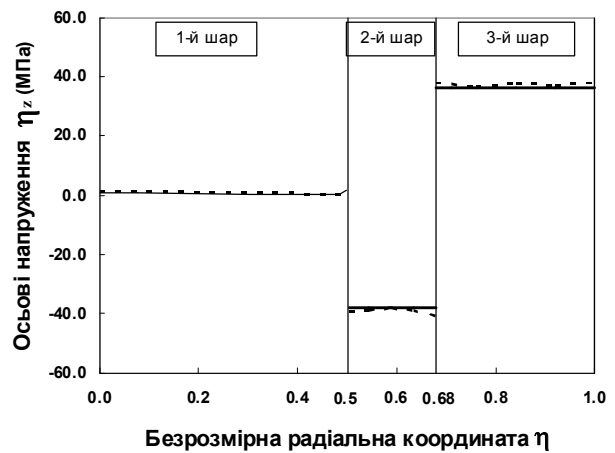


Рис. 1. Осеві напруження в перерізі $z=0$: суцільна лінія – аналітичний розв'язок, пунктирна лінія – числовий розв'язок

При числовій реалізації системи сплайнів будувалися на рівномірній прямокутній сітці. Спільні сплайни Φ_1, Φ_2 задавалися у всій області Ω , а системи сплайнів Φ_{ri}, Φ_{zi} ($i = 1,2,3$) – тільки у відповідних підобластях Ω_i .

На рис.1 показано розподіл осевих напружень σ_z по товщині тришарового циліндра, які обчислені за формулами (30) (суцільна лінія) та за допомогою чисельно-аналітичної методики, що базується на спільному застосуванні методів Рітца та R-функцій (пунктир). З рисунка видно, що отримано досить близьке співпадіння аналітичних та числових результатів. Для кращого представлення результатів, уздовж вісі абсцис відкладено безрозмірну радіальну координату ξ , яка у відповідних шарах обчислювалася за формулою

$$\xi_n = \alpha_n \frac{r - r_{n-1}}{r_i - r_{n-1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k, \quad (n = 1,2,3),$$

де α_k – вагові коефіцієнти: $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0,18, \alpha_3 = 0,32$.

Висновки. Отримано аналітичні розв'язки для функції концентрації вакансій іонів кисню та компонент хімічно обумовлених напружень у трубчастій тришаровій мембрані, яка використовується в реакторі для виробництва синтетичного газу. Розроблено метод наближеного розв'язання задачі визначення НДС трубчастої багатошарової мембрани, що знаходиться під дією температурного поля та піддається хімічному розширенню. Для перевірки достовірності розроблених методів розглянуто тестовий приклад розрахунку НДС тришарового циліндра. Порівняно аналітичні та числові розрахунки. Отримані результати мають практичне застосування при дослідженні тривалої міцності трубчастої мембрани реактора для отримання синтетичного газу.

Література

1. Bouwmeester H.J.M., Burggraaf A.J. Dense ceramic membranes for oxygen separation // The CRC Handbook of

Solid State Electrochemistry, Gellings P.J., Bouwmeester H.J.M. (Eds.). Boca Raton: CRC Press, 1997. – PP.481-553.

2. Diethelm S., Sfeir J., Clemens F., Van herle J., Favrat D. Planar and tubular perovskite-type membrane reactors for the partial oxidation of methane to syngas. Journal of Solid State Electrochemistry. – 2004. – 8. – PP.611-617.

3. Balachandran U., Ma B. Mixed-conducting dense ceramic membranes for air separation and natural gas conversion. Journal of Solid State Electrochemistry. – 2006. – 10. – PP.617-624.

4. Lein H. L. Mechanical properties and phase stability of oxygen permeable membranes $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x\text{O}_{3-d}$. – Ph.D Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim. – 2005.

5. Atkinson A., Ramos T.M.G.M. Chemically-induced stresses in ceramic oxygen ion-conducting membranes // Solid State Ionics. – 2000. – 129. – P. 259–269.

6. Zolochovsky A., Kьhhorn A. Constitutive and numerical modeling of chemical and mechanical phenomena in solid oxide fuel cells and oxygen permeable membranes // Вісник НТУ “ХПІ”. Тем. вип. “Машиноведение и САПР”. – 2007. – № 23. – С.128-139.

7. Crank J. The Mathematics of Diffusion. Second Edition. - Oxford: Oxford University Press, 1999.

8. Карлслю Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел, пер. с англ. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

9. Боли Б., Уейнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1962. – 518 с.

10. Склепус С. Розв’язання вісесиметричної задачі повзучості для тіл обертання із матеріалів з характеристиками, що залежать від виду навантаження // Машинознавство. – 2007. – № 11. – С. 23-27.

11. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

12. Федотова Е.А. Практические указания по использованию сплайн-аппроксимации в программируемых системах серии “Поле” / Препринт – 202. – Харьков: ИПМаш АН УССР, 1984. – 59 с.

Отримана 25.10.08

L. Parkhomenko, S. Sklepus, S. Eremenko

Diffusion induced stresses in a three-layered tubular membrane for production of synthesis gas

Kharkov State University of Food Technology and Trade, Kharkiv;
Institute for Problems in Machinery of National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv;
National Technical University “Kharkiv Polytechnical Institute”, Kharkiv

Diffusion problem for oxygen vacancies concentration in a three-layered tubular membrane of reactor for production of synthesis gas modeled as the infinitely long thick-walled composite cylinder was considered. Analytical solution with determination of oxygen vacancies concentration and diffusion induced stresses under assumption of plane strain has been obtained. Numerical method for solving of stress-strain state definition problem of multilayered tubular membrane under thermal and chemical expansion conditions was developed. Example of stress-strain state calculation of three-layered cylinder was considered.

Інформація

2-а Міжнародна науково-технічна конференція

ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА РАЦІОНАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ, ВИГОТОВЛЕННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Присвячена 40-річчю від часу створення ЗНЦ НАН України і МОН України

21 — 23 жовтня 2010 р., м. Львів, Україна

Мінісимпозіуми:

«Вплив корозійних та водневмісних середовищ на міцність і руйнування матеріалів та конструкцій»,
«Стан і перспективи впровадження комп’ютерно-інтегрованого виробництва у машинобудуванні».

Тематика конференції

Конкурентоспроможність продукції машинобудування України в умовах глобалізації.
Автоматизація проектування, підготовки і управління виробництвом.
Моделювання механічних систем.
Структурно-параметричний синтез і оптимізація машинобудівних конструкцій.
Теорія машин і механізмів.
Динаміка та міцність машин.
Теорія коливань і захист від вібрацій.
Матеріалознавство та інженерія поверхні.
Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій.

Новітні технології у машинобудуванні.
Проектування і технологія виготовлення зварних конструкцій.
Діагностика та прогнозування залишкового ресурсу конструкцій та споруд тривалої експлуатації.
Проектування, технічна експлуатація і сервіс автомобілів.

Адреса для кореспондування

А/с 6758, м. Львів, 79058, Україна
<http://www.znc.com.ua/>; e-mail: me@in.lviv.ua
Тел.: 38 (032) 297-07-74; 38 (032) 258-23-81;
+380 679 998 734