

УДК 539.2

## ДОСЛІДЖЕННЯ КОНСТРУКЦІЙНОГО ДЕМПФУВАННЯ ДВОШАРОВОЇ КОНСОЛІ

І. Когут

Ст. наук. співроб., канд. техн. наук,  
Інститут прикладних проблем  
механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
м. Львів

*У рамках елементарної теорії балок визначено довжину зони фрикційного проковзування у двошаровій консолі залежно від згинального зусилля і напруження тертя. Встановлено значення напруження тертя, за якого можливе повне проковзування. Досліджено розсіяння енергії за поперечного циклічного згину.*

шаруваті конструкції, конструкційне демпфування, зона проковзування

Шаруваті металеві конструкції (складені балки, пакети, ресори і таке інше) розсіюють енергію поперечних коливань через втрати в матеріалі і конструкційне демпфування. Енергія розсіяння  $\Delta \dot{U}$  внаслідок конструкційного демпфування залежить від інтенсивності напруження тертя  $\tau$  і зони його розподілу  $\xi$  на поверхнях ковзання, причому існує оптимальне значення рівномірно розподіленого напруження  $\tau_0$ , за якого розсіяння енергії максимальне [1–5]. Для двошарової консольної балки складеної з однакових листів у [5] встановлено залежність  $\Delta \dot{U}(\tau, \xi)$  за умови повного проковзування шарів.

Мета статті – дослідження впливу інтенсивності і зони розподілу фрикційних контактних напружень на демпфування двошарової консолі за неповного проковзування шарів.

Розглянемо циклічний згин пружної консолі завдовжки  $L$  силою  $\alpha P$  ( $-1 \leq \alpha \leq 1$ ,  $P = \text{const}$ ), прикладеною на кінці; шари притискаються на ділянці  $l = \xi L$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) рівномірно розподіленим тиском  $q$  (рис. 1). У процесі навантаження, внаслідок дії в шарах згинальних моментів  $M$  і поздовжніх сил  $N$ , відбувається проковзування контактних поверхонь на ділянці ковзання  $(L - l + a)$ , довжина якої залежить від інтенсивності напруження тертя і прикладеної сили  $\alpha P$ . Вважаємо, що в консолі з тонкими шарами контактний тиск в процесі навантаження сталій, на ділянці  $L - l$  тертя відсутнє, на ділянці  $a$  напруження

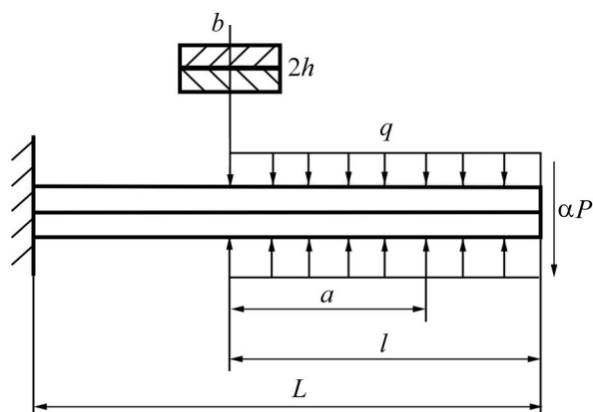


Рис. 1. Схема навантаження двошарової консолі

тертя  $\tau = qf = nP/bh$ , а на ділянці  $l - a$   $\tau_1 = 3\alpha P/4F$  – консоль працює як монолітна. Тут  $n > 0$ ;  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання;  $b$ ,  $h$  і  $F$  – ширина, висота і площа поперечного перерізу шару.

Розсіяння за цикл енергія внаслідок тертя шарів є роботою напружень тертя на відносних поздовжніх переміщеннях  $\Delta U$  точок контактних поверхонь у зоні ковзання  $a$

$$\Delta \mathcal{E} = 4\tau b \int_0^a \Delta U dx. \quad (1)$$

Для визначення  $\Delta \mathcal{E}$  необхідно знайти функцію  $\Delta U$  і величину  $a$ . В шарі з однаковою товщиною поздовжні переміщення  $U$  точок контактних поверхонь однакові, тому  $\Delta U = 2U$ . Переміщення довільного перерізу шару (рис. 2) у зоні ковзання  $a$  буде таким:

$$U = U_0 + U(x). \quad (2)$$

Тут  $U_0$  – переміщення в кінці консолі завдовжки  $L-l$ , навантаженої силою  $\alpha P/2$ , поздовжньою силою

$$N_0 = \tau_1 b(l-a) + \tau b a \quad \text{і моментом} \quad M_0 = \frac{\alpha P}{2} l - N_0 \frac{h}{2}; \quad U(x)$$

– переміщення довільного перерізу консолі завдовжки  $a$  навантаженої зусиллями  $\alpha P/2$ ,  $N_1 = \tau_1 b(l-a)$ ,

$$M = \frac{\alpha P}{2}(l-a) - N_1 \frac{h}{2} \quad \text{і дотичним напруженням} \quad \tau \quad \text{на нижній поверхні.}$$

Для згину з розтягом співвідношення елементарної теорії балок дають

$$U(x) = \frac{h}{2} \int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx - \int_0^x \frac{N(x)}{EF} dx. \quad (3)$$

Тут  $E$  – модуль Юнга;  $I$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу шару (впливом зсуву знехтувано).

Запишемо вирази внутрішніх силових факторів так:

$$N(x) = N_0, \quad M(x) = \frac{\alpha P}{2}(L-l-x) + \frac{\alpha P}{2} l - N_0 \frac{h}{2} \quad \text{– для}$$

консолі завдовжки  $(L-l)$ ;  $N(x) = \tau b(a-x) + \tau_1 b(l-a)$ ,

$$M(x) = \frac{\alpha P}{2}(a-x) + \frac{\alpha P}{2}(l-a) - N(x) \frac{h}{2} \quad \text{– для консолі зав-$$

довжки  $a$ .

Підставимо відповідні значення  $M(x)$  і  $N(x)$  у (3), після елементарних перетворень отримаємо:

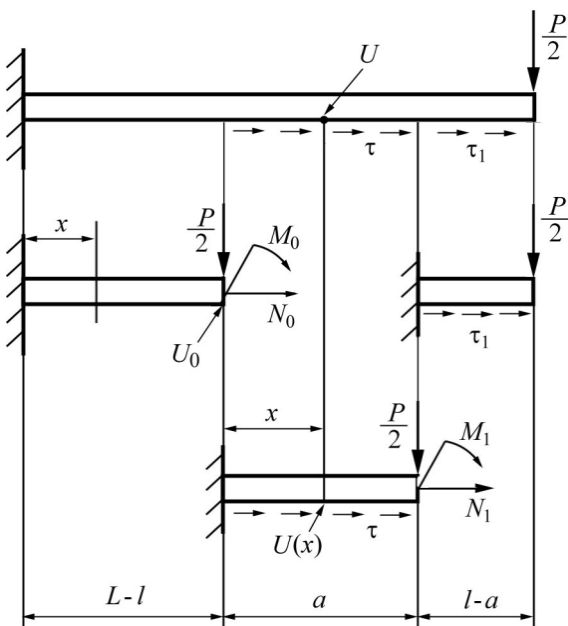


Рис. 2. Розрахункова схема верхнього шару

$$U_0 = \frac{\alpha P h}{4EI} \int_0^{L-l} (L-l) dx - \frac{N_0 h^2}{3EI} \int_0^{L-l} dx =$$

$$= \frac{\alpha P h}{8EI} (L^2 - l^2) - \frac{b h^2}{3EI} (L-l) [\tau a + \tau_1 (l-a)],$$

$$U(x) = \frac{\alpha P h}{4EI} \int_0^x (l-x) dx - \frac{b h^2}{3EI} \int_0^x [\tau(a-x) + \tau_1(l-a)] dx =$$

$$= \frac{\alpha P h}{8EI} (2lx - x^2) - \frac{b h^2}{3EI} [\tau(ax - x^2/2) + \tau_1(l-a)x].$$

Згідно з (2) вираз для переміщень залежно від  $\alpha, n$  буде таким:

$$U = \frac{\alpha P h}{8EI} [L^2 - (l-x)^2 - 2(l-a)(L-l+x)] -$$

$$- \frac{n P h}{3EI} [(L-l)a + (ax - x^2/2)]. \quad (4)$$

У вершині зони проковзування поздовжнє переміщення дорівнює нулю, отже, з умови  $U(a) = 0$  отримуємо рівняння відносно невідомої  $a$ :

$$(4n - 3\alpha)a^2 + 2(4n - 3\alpha)(L-l)a - 3\alpha(L-l)^2 = 0,$$

з якого знаходимо довжину зони ковзання:

$$a = \left( \sqrt{\frac{4n}{4n-3\alpha}} - 1 \right) (L-l) = mL, \quad (5)$$

де

$$m = \left( \sqrt{\frac{4n}{4n-3\alpha}} - 1 \right) (1-\xi).$$

Підставивши (4) в (1), одержимо вираз для енергії розсіяної за цикл ( $-1 \leq \alpha \leq 1$ ) залежно від довжини ділянки ковзання:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{P^2}{EI} n \left[ (L-l)^2 a + 2(L-l) \left( 1 - \frac{4}{3} n \right) a^2 + \right.$$

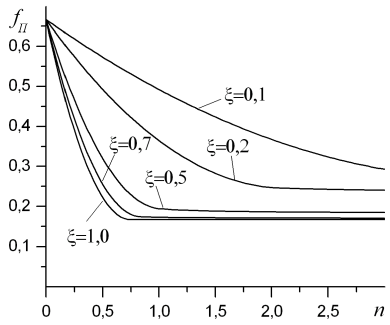
$$\left. + \frac{8}{3} \left( 1 - \frac{4}{3} n \right) a^3 \right], \quad (6)$$

або залежно від відносної довжини зони розподілу  $\tau$ :

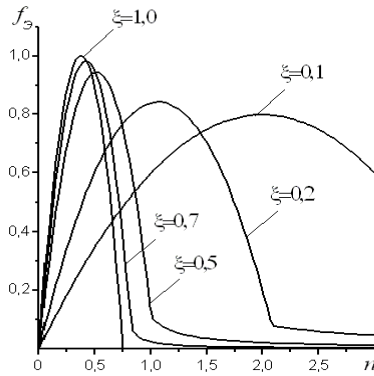
$$\Delta \mathcal{E} = \frac{P^2 L^3}{EI} n m \left[ (1-\xi)^2 + 2m \left( 1 - \frac{4}{3} n \right) \left( 1 - \xi + \frac{m}{3} \right) \right] =$$

$$= \frac{P^2 L^3}{8EI} \cdot f_{\mathcal{E}}.$$

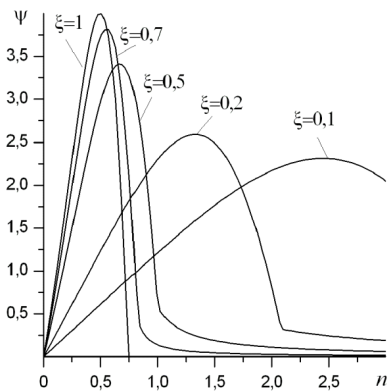
Важливою характеристикою демпфування є відносне розсіяння енергії  $\Psi = \Delta \mathcal{E} / \Pi$ , де  $\Pi$  – максимальна потенціальна енергія, накопичена в пружному елементі. Отже,



а)



б)



в)

Рис. 3. Залежності потенціальної енергії (а), абсолютного (б) і відносного (в) розсіяння енергії від інтенсивності напруження тертя

для знаходження  $\Psi$  необхідно знайти потенціальну енергію.

Потенціальна енергія двохшарової консолі дорівнює подвоєній сумі енергій трьох консолей (рис. 2) завдовжки  $l_i$ :

$$\Pi_i = 2 \int_0^{l_i} \frac{M^2(x)}{2EI} dx + 2 \int_0^{l_i} \frac{N^2(x)}{2EF} dx. \quad (7)$$

Внутрішні силові фактори в консолях за умови, що вісь абсцис направлена з вільного кінця до защемленого, будуть такі:  $N(x) = N_0$ ,

$$M(x) = \frac{P}{2}x + \frac{P}{2}l - N_0 \frac{h}{2} = \frac{P}{2} \left[ (x+l) - \left( \frac{3}{4}(l-a) + na \right) \right] - \text{для}$$

$$\text{ділянки } L-l; \quad N(x) = \tau bx + \tau_1 b(l-a) = \frac{P}{h} \left[ nx + \frac{3}{4}(l-a) \right],$$

$$M(x) = \frac{P}{2}x + \frac{P}{2}(l-a) - N(x) \frac{h}{2} - \text{для ділянки } a;$$

$$N(x) = \tau_1 bx = \frac{3P}{4h}x, \quad M(x) = \frac{P}{2}x - \tau_1 bx \cdot \frac{h}{2} = \frac{P}{8}x - \text{для}$$

ділянки  $l-a$ . Підставивши відповідні значення  $M(x)$  і  $N(x)$  у (7) отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{P^2}{4EI} \int_0^{L-l} \left[ (x+l)^2 - 2 \left( \frac{3}{4}(l-a) + na \right) (x+l) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{3}{4}(l-a) + na \right)^2 \right] dx + \frac{P^2}{12EI} \int_0^{L-l} \left( \frac{3}{4}(l-a) + na \right)^2 dx = \\ &= \frac{P^2}{12EI} \left[ L^3 - l^3 + \frac{9}{4} \left( a - \frac{4}{3}na - l \right) \left( a - \frac{4}{3}na + L \right) (L-l) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= \frac{P^2}{4EI} \int_0^a \left[ (1-n)^2 x^2 + \frac{1}{2}(1-n)(l-a)x + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{16}(l-a)^2 \right] dx + \frac{P^2}{12EI} \int_0^a \left[ n^2 x^2 + \frac{3}{2}n(l-a)x + \right. \\ &+ \left. \frac{9}{16}(l-a)^2 \right] dx = \frac{P^2}{12EI} \left[ \left( 1-2n + \frac{4}{3}n^2 \right) a^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{4}(l-a)la \right], \end{aligned}$$

$$\Pi_3 = \int_0^{l-a} \frac{P^2 x^2}{64EI} dx + \int_0^{l-a} \frac{9 P^2 x^2}{16 \cdot 12EI} dx = \frac{P^2}{48EI} (l-a)^3.$$

Після елементарних перетворень суми  $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$  вираз для потенціальної енергії двохшарової консолі, залежно від довжини ділянки ковзання, буде такий:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{P^2}{8EI} \left[ \frac{2}{3}L^3 - \frac{1}{2}l^3 + \frac{3}{2} \left( a - \frac{4}{3}na - l \right) \left( a - \frac{4}{3}na + L \right) \times \right. \\ &\times (L-l) + \left. \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3}n + \frac{8}{9}n^2 \right) a^3 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

або, залежно від відносної довжини зони розподілу  $\tau$ ,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{P^2 L^3}{8EI} \left[ \frac{2}{3} - \frac{\xi^3}{2} + \frac{3}{2} \left( m - \frac{4}{3}mn - \xi \right) \left( m - \frac{4}{3}mn + 1 \right) \times \right. \\ &\times (1-\xi) + \left. \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3}n + \frac{8}{9}n^2 \right) m^3 \right] = \frac{P^2 L^3}{8EI} \cdot f_{II}. \end{aligned}$$

Аналіз формули (5) показує, що за умови  $n > 3/4$  ділянка ковзання  $a$  завжди існує і збільшується з ростом зусилля  $\alpha P$ . Якщо  $n > 3/4$ , то  $a$  існує коли  $0 \leq \alpha < \alpha^*$ ; для  $\alpha^* = 4n/3$   $a \rightarrow \infty$ , тобто якщо зусилля сягає значення  $\alpha^* P$  проковзування раптово поширюється на довжину  $l - a$ .

Отже, залежно від величини  $n$  проковзування може бути зі зміщенням торців шарів (повне) і без зміщення (неповне). Значення  $n^*$ , за якого починається неповне проковзування (або проковзування неможливе, коли  $\xi = 1$ ), визначається з умови  $a(n^*) = l$ , яка дає

$$n^* = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2 - \xi)\xi}. \quad (9)$$

Коли  $n < n^*$  відбувається повне проковзування. Наприклад, для  $\xi = 0,5$  і  $\alpha = 1$  маємо  $n^* = 1$ ; для  $n = 0,75 < n^*$   $\alpha^* = \frac{4}{3}(2 - 0,5) \cdot 0,5 \cdot 0,75 = 0,75 < 1$ , отже, повне проковзування настає за зусилля  $0,75P$ , тобто раніше, ніж  $\alpha P$  досягає амплітудного значення.

Формули (6) і (8) отримані для неповного проковзування, коли  $n \geq n^*$ . Підставивши в них  $a = l$ , отримуємо вирази  $\Delta \mathcal{E}$  і  $\Pi$  для повного проковзування

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{P^2}{EI} \left[ \frac{n}{3} (3L^2 - l^2)l - \frac{8}{3} n^2 \left( L - \frac{2}{3}l \right) l^2 \right],$$

$$\Pi = \frac{P^2}{8EI} \left[ \frac{2}{3} L^3 - \frac{2}{3} n (3L^2 - l^2)l + \frac{8}{3} n^2 \left( L - \frac{2}{3}l \right) l^2 \right],$$

або залежно від відносної зони розподілу  $\tau$

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{P^2 L^3}{8EI} \left[ \frac{8}{3} n (3 - \xi^2) \xi - \frac{64}{3} n^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \xi \right) \xi^2 \right], \quad (10)$$

$$\Pi = \frac{P^2 L^3}{8EI} \left[ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} n (3 - \xi^2) \xi + \frac{8}{3} n^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \xi \right) \xi^2 \right]. \quad (11)$$

Для повного проковзування з умов  $\Delta \mathcal{E}'_n = 0$  і  $\Psi'_n = 0$  знаходимо оптимальні значення:

$$n_0 = \frac{3}{16} \frac{3 - \xi^2}{(3 - 2\xi)\xi}, \quad (12)$$

$$n_1 = \frac{12 - 8\xi - \sqrt{(3 - 2\xi)(16(3 - 2\xi) - 3(3 - \xi^2)^2)}}{2\xi(3 - 2\xi)(3 - \xi^2)}, \quad (13)$$

за яких, для довільного  $\xi$ , відповідно абсолютне і відносне розсіяння будуть максимальні:

$$\Delta \dot{Y}_{\max} = \Delta \dot{Y}(n_0) = \frac{P^2 L^3}{8EI} \frac{(3 - \xi^2)^2}{4(3 - 2\xi)}, \quad \Psi_{\max} = \Psi(n_1),$$

а потенціальна енергія має вигляд

$$\Pi(n_0) = \frac{P^2 L^3}{8EI} \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{32} \frac{(3 - \xi^2)^2}{3 - 2\xi} \right).$$

Характеристики розсіяння і потенціальна енергія істотно залежать від  $n$  (див. рис. 3). Як бачимо, з ростом  $n$  і  $\xi$  потенціальна енергія спадає. Абсолютне і відносне розсіяння мають максимуми в інтервалі  $0 \leq n \leq n^*$  і монотонно спадають, коли  $n > n^*$ .

Характеристики розсіяння за неповного проковзування є найбільшими, коли  $n = n^*$ :

$$\Delta \mathcal{E}(n^*) = \frac{P^2 L^3}{8EI} 2\xi \left( \frac{\xi - 1}{2 - \xi} \right)^2,$$

$$\Psi(n^*) = \frac{\Delta \mathcal{E}(n^*)}{\Pi(n^*)} = \frac{12\xi(\xi - 1)^2}{7 - 13\xi + 10\xi^2 - 3\xi^3}$$

і набувають найбільших значень (залежно від  $\xi$ ) відповідно, коли  $\xi = 0,5$  і  $(5 - \sqrt{17})/2$ ; тут

$$\Pi(n^*) = \frac{P^2 L^3}{8EI} \frac{7 - 13\xi + 10\xi^2 - 3\xi^3}{6(2 - \xi)^2}.$$

Отже, консоль з притиснутими шарами на всій довжині має найбільші абсолютне і відносне розсіяння енергії, коли  $n = 3/8$  і  $1/2$  відповідно. У випадку повного проковзування характеристики розсіяння більш як на порядок вищі порівняно з характеристиками для неповного проковзування (рис. 4).

Зауважимо, що формули (9), (12), (13) не дають значення коефіцієнтів  $n$  в точці  $\xi = 0$ . Випадок  $\xi = 0$  відповідає дії зосередженої сили тертя  $T$  в площині контакту шарів на кінці консолі. В кожному випадку силу  $T$  знаходять із відповідної умови:  $U = 0$ ,  $\Delta \mathcal{E}'_T = 0$ ,

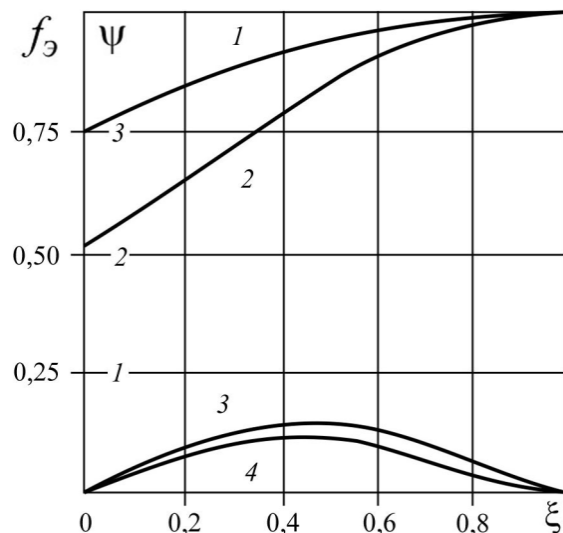


Рис. 4. Залежності максимальних абсолютного (1, 4) і відносного (2, 3) розсіяння енергії від зони розподілу напруження тертя

$$\Psi'_T = \frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Pi} \right) = 0;$$

де

$$U = \frac{PL^2h}{8EI} - \frac{TLh^2}{3EI},$$

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{PL^2h}{EI} T - \frac{8Lh^2}{3EI} T^2,$$

$$\Pi = \frac{P^2L^3}{12EI} - \frac{PTL^2h}{4EI} + \frac{T^2Lh^2}{3EI}.$$

Отже, відносно переміщення на кінці консолі дорівнює нулю, коли  $T = 3PL/8h$ , найбільше розсіяння енергії відбувається, коли  $T_0 = 3PL/16h$ , а найбільше відносно розсіяння енергії – коли  $T_1 = (4 - \sqrt{7})PL/6h$ . Значення  $\Delta \mathcal{E}(T_0)$  і  $\Psi(T_1)$  співпадають із значеннями  $\Delta \mathcal{E}(n_0)$  і  $\Psi(n_1)$  в точці  $\xi = 0$ .

**Висновки.** 1. У двошаровій консолі з притиснутими шарами на всій довжині найбільше відносно розсіяння енергії дорівнює 4 за умови, що напруження тертя  $\tau = 0,5P/bh$ . Коли  $\tau \geq 0,75P/bh$ , конструкційне демпфування не відбувається. Такий пружний елемент ефективний з точки зору обмеження амплітуд вимушених коливань. 2. Коли зона фрикційного ковзання менша від довжини консолі, розсіяння енергії за рахунок конструкційного демпфування відбувається завжди, незалежно від величини напруження тертя. Такий пружний елемент має ширші функціональні можливості, бо також пришвидшує затухання вільних коливань.

1. Калинин Н. Г., Пановко Г. Я., Лебедев Ю. А. и др. Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях. – Рига: Изд-во АН ЛатвССР, 1960. – 169 с.

2. Лебедева В. И. Оптимальное демпфирование в двухслойной консоли при произвольной периодической нагрузке // Вопр. динамики и прочности, 1964. – Вып. 11. – С. 147–158.

3. Пановко Я. Г., Гольцев Д. И., Страхов Г. И. Элементарные задачи конструктивного гистерезиса // Вопр. динамики и прочности. – 1958. – Вып. 5. – С. 5–26.

4. Лебедева В. И. Выбор оптимального закона распределения сил трения в одной задаче конструкционного демпфирования // Вопр. динамики и прочности. – 1963. – Вып. 10. – С. 167–174.

5. Козут И. С. Влияние краевого защемления на демпфирование слоистых металлических пакетов // Много-слойные сварные конструкции и трубы: Материалы I Всесоюзн. конф. / Ред. кол.: Б. Е. Патон (отв. ред.) и др. – Киев: Наук. думка, 1984. – С. 217–221.

Отримана 28.10.08

I. Kohut

**Investigation structural damping of two-layered cantilever**

Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, L'viv

Within the scope of elementary girder theory we have defined the length of frictional slipping zone in a two-layer cantilever vs. the bending effort and friction stress. The value of friction stress at which complete slipping is possible has been determined. The energy dissipation for transversal vibrations has been studied.

*Дисертація***MULTISCALE EFFECTS IN FATIGUE METALS**

5 July 2010 - 9 July 2010

Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

**The topics discussed during the colloquim are:**

- *experimental complementarities* between TEM, SEM with EBSD, AFM and new opportunities offered by kinematic and/or thermal full-field measurements and acoustic emission at micrometric scales which enable the study of the forerunner signs of fatigue damage.
- *numerical tools* including Polycrystalline grain modelling and Discrete Dislocation Dynamic which are of great interests in crystalline plasticity for the definition of multiscale fatigue criteria.
- *multiscale fatigue criteria and structural computations*

The application of these models and techniques will be illustrated on different fatigue contexts: isothermal or non-isothermal, uniaxial or multiaxial loadings, contact and/or fretting fatigue, constant or variable amplitude loadings. Within the topics, a special attention will be accorded to complex cyclic loadings as well as to new metallic materials and/or structures.

**Contact:****Dr. Andrei Constantinescu**

CNRS Ecole Polytechnique

Laboratoire de Mécanique des Solides

91128 Palaiseau cedex, France

Phone: +33 1 69 33 57 56; fax: +33 1 69 33 57 06

Email: [andrei.constantinescu@lms.polytechnique.fr](mailto:andrei.constantinescu@lms.polytechnique.fr)