

Г. Вірченко

Канд. техн. наук,  
Національний технічний  
університет України «Київський  
політехнічний інститут»,  
м. Київ

УДК 621:514

## ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В МАШИНОБУДУВАННІ

*Подано методика здійснення оптимізації машинобудівних конструкторсько-технологічних систем, яка спирається на автоматизоване структурно-параметричне геометричне моделювання. Наведено приклади її практичного застосування. Запропоновано напрямки подальших наукових досліджень.*

**геометричне моделювання, конструкторсько-технологічні системи, машинобудування, параметрична оптимізація**

На протязі останніх десятиліть питання теорії та практики раціонального проектування, виготовлення й експлуатації машинобудівних конструкцій завжди були актуальними [1, 2 та ін.].

Це обумовлено нагальними суспільними потребами в добротній (високопродуктивній, надійній, економічній, недорогій, довговічній тощо) техніці.

Один з напрямків досягнення наведеної мети полягає в широкому впровадженні сучасних комп'ютерних інформаційних технологій у процеси проектування, виробництва та експлуатації багатьох видів продукції.

Одержувані при цьому результати значною мірою залежать від якості технічного, програмного й математичного забезпечення обчислювальних засобів.

Підвищенню ефективності останнього та поданню деяких прийомів його застосування для успішного розв'язання задач параметричної оптимізації конструкторсько-технологічних систем у машинобудуванні присвячено подальший матеріал.

**Аналіз досліджень і публікацій.** У праці [1] висвітлено процеси раціонального проектування механічних систем, викладено базові методи математичного програмування та теорії керування. Особливу увагу приділено

комп'ютерним способам розв'язування практичних задач створення різноманітних конструкцій.

У [2] розглянуто комплексну методика проведення наукових досліджень при проектуванні технологічних систем, описано спеціальні математичні методи і приклади їх застосування для параметричної оптимізації зазначених об'єктів.

Публікація [3] знайомить з особливостями прийомів оптимізації, що ґрунтуються на методах апроксимації та ідеях автоматизованого структурно-параметричного геометричного моделювання [4].

Використання напрацювань [3, 4] дозволить певним чином удосконалити запропоновані в [1, 2] підходи до проектування складних об'єктів.

**Постановка задачі.** Викласти методика проведення оптимізації машино-будівних конструкторсько-технологічних систем, яка спирається на алгоритми структурно-параметричного геометричного моделювання.

**Геометричне моделювання як засіб оптимізації.** Розпочнемо з аналізу поданого в роботі [2] прикладу, достатньо простого з математичної точки зору.

Модель, що описує в пункті 4.2.3 цього видання час обробки  $t_k$  однієї деталі токарною операцією, має вигляд

$$t_k = t_1 + t_2 + t_3, \quad (1)$$

де  $t_1$  – об'єднує складові, які не залежать від режимів різання (це втрати часу  $t_b$  на підведення інструмента, закріплення деталі, її контроль тощо та підготовчо-заключний час  $t_{n3}$ , віднесений до однієї деталі);  $t_2 = \pi DL / (1000VS)$  – основний час різання ( $D$  – діаметр деталі,  $L$  – довжина різання), який зменшується при збільшенні швидкості різання  $V$  та подачі  $S$ ;  $t_3 = T_{in}(t_2/T - 1/N)$  – час, пов'язаний зі зміною зношеного інструмента, віднесений до однієї деталі, який зростає зі збільшенням швидкості різання  $V$  та подачі  $S$ ,  $T_{in}$  – час заміни одного інструмента (різального леза),  $T = C_v^{1/m} t^{-x/m} S^{-y/m} V^{-1/m}$  – стійкість інструмента ( $C_v$ ,  $m$ ,  $x$ ,  $y$  – сталі моделі процесу різання,  $t$  – глибина різання),  $N$  – кількість деталей у партії.

Завдання оптимізації формулюється наступним чином: знайти такі значення режимів різання  $V_n$  і  $S_n$ , при яких функція (1) досягає свого мінімального значення. Цей випадок відповідає найвищій продуктивності досліджуваного процесу, тобто виготовленню максимальної кількості деталей за найменший час.

У [2] для  $S=const$  аналітичним шляхом, за допомогою прирівнювання похідної  $dt_k / dV$  до нуля, встановлено формулу

$$V_n = \left[ \frac{m}{(1-m)T_{in}} \right] \frac{C_v}{t^x S^y}, \quad (2)$$

яка є доволі зручною для практичного застосування.

Згідно з (2) виконано обчислення обробки сталі 60X різцем з твёрдосплавною пластинкою Т15К6 за таких умов:  $S=0,3$  мм/об,  $T_{in}=2$  хв,  $t=3,5$  мм,  $C_v=300$ ,  $m=0,27$ ,  $x=0,12$ ,  $y=0,325$ . Одержано

$$V_n = 242 \text{ м/хв}. \quad (3)$$

У наведеній праці зазначається, що при визначенні оптимальних режимів різання до уваги беруться лише швидкість  $V$  та подача  $S$ , оскільки вплив глибини різання  $t$  на умови обробки незначний. Проте, в цьому разі залишається відкритим питання щодо дії на  $V_n$  змінного значення величини  $S$ .

Слід зауважити, що в наступному пункті 4.2.4 [2] виконано дослідження сумарного впливу швидкості різання та подачі, з урахуванням наявних для них обмежень, на мінімальну собівартість механічної обробки. При цьому в процесі аналізу, обсяги якого істотно зросли, широко використано побудову різноманітних двовимірних графічних залежностей. Також зазначено, що для знаходження точки, в якій обидва режими є раціональними, доцільно застосовувати числові методи оптимізації.

Автор цієї публікації поділяє і підтримує подані прийоми опрацювання технологічних систем.

Приємно зазначити наявність у подальших матеріалах [2] тривимірних графіків, що дозволяють суттєвим чином спростувати виконувани дослідження з оптимізації та підвищувати їх наочність.

На підтвердження цього факту на рис. 1 показано залежність

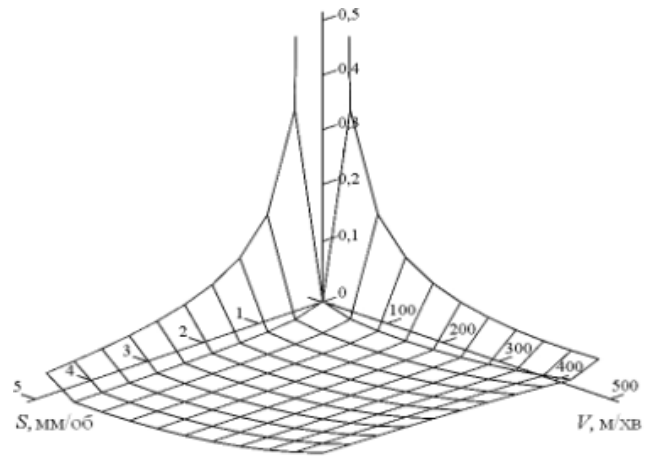


Рис. 1. Тривимірна геометрична модель залежності  $F(S, V)$

$$F(S, V) = \frac{1 + T_{in} t^{x/m} S^{y/m} V^{1/m} / C_v}{SV}, \quad (4)$$

яку отримано з (1) шляхом залишення лише величин, що впливають на  $V_n$  і  $S_n$ .

На приведенному зображенні значення параметрів  $T_{in}$ ,  $t$ ,  $C_v$ ,  $m$ ,  $x$ ,  $y$  відповідають попередньо розглянутому прикладу.

Застосування для випадку  $S=0,3$  мм/об процедур оптимізації з широковідомих програмних пакетів Mathcad 2000 Professional та Microsoft Office Excel 2007 дає результат, який збігається з (3).

Варіювання в цих системах додатково ще й значенням  $S$  (двовимірний пошук) показує, що оптимальна швидкість різання  $V_n$  зі збільшенням подачі  $S$  зменшується. Найвигідніша величина  $S_n$  відповідає максимально допустимому  $S$ . Аналогічні дані отримані з використанням підходів, що запропоновані у [3]. Наведені факти підтверджуються графікою на рис. 1.

Отже, перевагою обчислювальних методів оптимізації, порівняно з аналітичними, є їх простота та універсальність. Отримані ідеальні результати пояснюються достатньо плавним характером цільової функції (4). Однак такий успіх застосування числових методів оптимізації супроводжує процеси проектування об'єктів машинобудування далеко не завжди.

Покажемо це на прикладі конструювання циліндричної пружини [1] мінімальної ваги

$$W = \pi^2 \rho g \left( Q d^2 D / 4 + E \theta d^6 / (14680 M) \right) \quad (5)$$

за умов дотримання обмежень

$$d > 0; \quad D > 0; \quad 14,5 M / \left( d^{2,885} D^{0,115} \right) \leq \sigma_{max}, \quad (6)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу пружини;  $g$  – пришвидження вільного падіння;  $\rho g = 7,7 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ ;  $Q=2$  – кількість неактивних кінцевих витків;  $d$  – діаметр дроту;  $D$  – середній діаметр спіралі;  $E=2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  – модуль Юнга;  $\theta=20^\circ$  – кут

закручування;  $M=0,3$  Н·м – прикладений момент;  $\sigma_{\max}=1,5 \cdot 10^8$  Па – допустиме напруження.

В [1] для (5) і (6) аналітичним способом знайдено точний оптимальний розв’язок

$$W_{\min}(d, D) = W(0,002806 \text{ м}; 0,02943 \text{ м}) = 0,4254 \text{ Н.} \quad (7)$$

Також зауважено, що, незважаючи на малу розмірність задачі, яка аналізується, нелінійний характер її рівнянь обумовлює певні труднощі для обчислювальних методів.

Дійсно, під час опрацювання такої моделі в системі Mathcad 2000 Professional знадобилось кілька спроб варіювання початковою точкою та необхідною точністю розрахунків щоб отримати результат  $W_{\min_0}(0,002808 \text{ м}; 0,029412 \text{ м}) \approx 0,4263 \text{ Н}$ . При цьому істотно допомогли відомості про точний оптимум (7).

Microsoft Office Excel 2007 теж знаходить потрібний розв’язок, але лише після встановлення відносної похибки, яка дорівнює приблизно  $1E-6$ . Однак подальше зменшення цієї величини може призводити до погіршення результатів. Для проміжків  $d \in [0,002 \text{ м}; 0,004 \text{ м}]$  і  $D \in [0,020 \text{ м}; 0,040 \text{ м}]$  і початкових точок  $(0,002 \text{ м}; 0,020 \text{ м})$  і  $(0,004 \text{ м}; 0,040 \text{ м})$  відповідно маємо  $W_{\min_1}(0,002806 \text{ м}; 0,029999 \text{ м}) \approx 0,4263 \text{ Н}$  і  $W_{\min_2}(0,002806 \text{ м}; 0,029965 \text{ м}) \approx 0,4263 \text{ Н}$ .

Останні дані деякою мірою вказують на дефініцію глобального мінімуму дослідженої цільової функції. Проте такі міркування є досить ненадійними.

Про неспроможність пакета Microsoft Office Excel 2007 у загальному випадку визначати глобальні екстремуми свідчать матеріали, що наведені в [3].

Реальні задачі оптимального проектування об’єктів машинобудування та процесів їх виготовлення, як правило, значно складніші за проаналізовані вище приклади.

Сподіватись на тотальне вирішення зазначених питань суто аналітичними засобами на нинішньому рівні розвитку математики та її застосування інженерами на практиці, на думку автора, є марною справою.

Як показує другий поданий приклад, для успішного розв’язання обчислювальними методами, навіть задач оптимізації з єдиним екстремумом, доволі важливо правильно вибрати початкову точку та потрібну точність розрахунків.

Для цього, в якості одного з можливих варіантів, пропонується використовувати тривимірні геометричні моделі, що пов’язують поміж собою досліджувані параметри й характеристики технічних об’єктів, процесів їх виготовлення тощо.

Так, на рис. 2 і рис. 3 зображено відповідно залежність  $W(d, D)$  і  $\sigma(d, D)$  згідно з (5) і (6).

Перш ніж перейти до розгляду додаткової інформації, яку досить легко можна отримати з наведених геометричних моделей, що певним чином апроксимують параметричними ізолініями опрацьовувані аналітичні вирази, зробимо кілька загальних зауважень у цьому аспекті.

Для звичайного інженера більш наглядними, простими і зрозумілими для практичного застосування є показані на рис. 2 та рис. 3 графічні подання залежностей (5) і (6), ніж відповідні їх аналітичні форми.

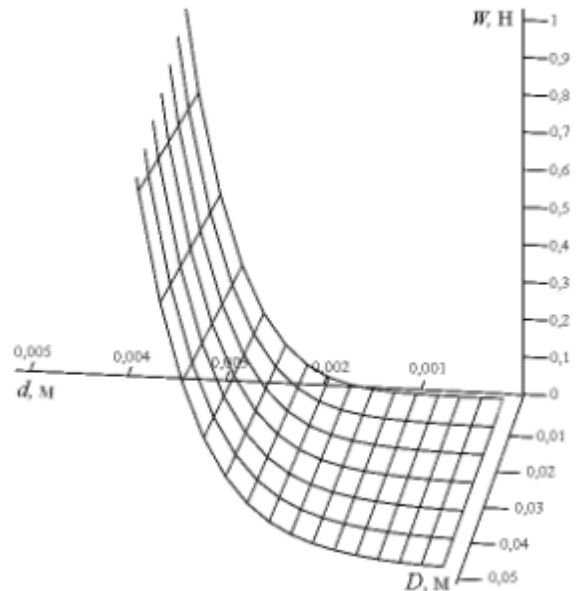


Рис. 2. Геометрична інтерпретація функції  $W(d, D)$

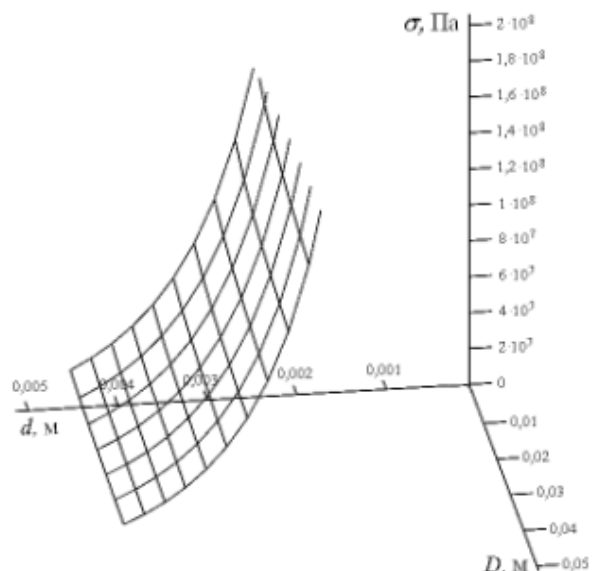


Рис. 3. Тривимірний графік залежності  $\sigma(d, D)$

Двовимірні та тривимірні геометричні моделі, за відомими їх математичними виразами, доволі просто створюються в спеціалізованих програмних пакетах, зокрема в Mathcad та ін.

Останні дозволяють користувачеві зручно працювати з комп’ютерними графічними зображеннями на екрані дисплея, наприклад, обертаючи їх потрібним чином в уявному тривимірному просторі, збільшуючи або зменшуючи, змінюючи кроки апроксимуючої параметричної сітки тощо.

Достатньо вагомою перевагою зазначених геометричних моделей є їх гнучкість завдяки автоматизованій

високопродуктивній перебудові відповідно до різноманітних варіювань потрібних параметрів.

Далі стисло відмітимо те, що конкретно дають два останні зображення для розв'язування задачі мінімізації ваги пружини.

По-перше, з рис. 2. бачимо, що головний вплив на  $W$  має величина  $d$ , зменшення якої сприяє відповідній зміні цільової функції, а дія  $D$  є незначною.

По друге, рис. 3 свідчить про істотне зниження напруження  $\sigma$  при збільшенні  $d$  та несуттєву роль при цьому значень  $D$ .

Розглянуті тенденції й одночасний аналіз двох наведених тривимірних графіків забезпечують можливість дефініції приблизних проміжків існування оптимуму:  $d \in [0,0026 \text{ м}; 0,0032 \text{ м}]$ ,  $D \in [0,020 \text{ м}; 0,040 \text{ м}]$  з урахуванням конструкційних міркувань,  $W \approx 0,5 \text{ Н}$ .

Таким чином, переконуємось, що робота з геометричними моделями є доволі наочною та продуктивною, а також надає інженеру достатньої впевненості у правильності прийнятих рішень.

Завдяки проведеному попередньому аналізу ми змогли істотно скоротити досліджувану область існування шуканих оптимальних параметрів та визначити приблизне значення цільової функції.

Отримані дані стають у нагоді не тільки для більш ефективного використання програмних пакетів, що застосовують різноманітні градієнтні та інші методи локального знаходження екстремуму (коли напрям і значення кожного наступного кроку оптимізації визначаються шляхом дослідження обмеженої області цільової функції в околі попередньої точки), а й прийомів глобального пошуку, до яких можна віднести спосіб, запропонований автором у [3].

Зауважимо, що останній базується не на локальній, а на глобальній апроксимації функції мети.

Під час проектування в машинобудуванні достатньо важливим є визначення не одного, а декількох перспективних варіантів (для раціонального їх застосування відповідно до певних умов, наприклад, ефективного комбінування з іншими елементами складної технічної системи тощо), а також забезпечення необхідної стійкості одержаних оптимальних розв'язків при незначних відхиленнях значень змінних (у розглянутому випадку конструювання пружини це отримана під час виготовлення точність розмірів  $d$  і  $D$ ).

Відповідно до наведених вище міркувань для залежностей (5) і (6) та умов  $\Delta = 0,0001 \text{ Н}$ ;  $d \in [0,0026 \text{ м}; 0,0032 \text{ м}]$ ;  $\Delta_{\min} d = 0,00005 \text{ м}$ ;  $\Delta_{\max} d = 0,0001 \text{ м}$ ;  $D \in [0,020 \text{ м}; 0,040 \text{ м}]$ ;  $\Delta_{\min} D = 0,0005 \text{ м}$ ;  $\Delta_{\max} D = 0,005 \text{ м}$  (де  $\Delta$  – точність апроксимації цільової функції,  $\Delta_{\min}$  та  $\Delta_{\max}$  – відповідно мінімальний та максимальний кроки вздовж зазначених змінних,  $N=10$  – кількість потрібних розв'язків) було виконано обчислення й отримано дані, які подано в табл. 1.

Значення  $\Delta_{\min} d$  та  $\Delta_{\min} D$  вище обрано з точки зору обмеження невиправдано високих вимог до точності виготовлення пружин, що, як правило, зменшує вартість останніх.

На думку автора, дефініція в (7) діаметра  $d$  з точністю 0,001 мм є достатньо жорсткою, особливо коли врахувати ймовірні його зміни під час подальшої експлуатації.

Результати оптимізаційних розрахунків

№вар	$W, \text{ Н}$	$d, \text{ м}$	$D, \text{ м}$
1	0,433640	0,002800	0,021563
2	0,427575	0,002800	0,021875
3	0,427503	0,002825	0,022013
4	0,428510	0,002800	0,021888
5	0,428951	0,002825	0,021825
6	0,425441	0,002800	0,022500
7	0,425493	0,002825	0,021838
8	0,400372	0,002800	0,022813
9	0,400440	0,002825	0,022750
10	0,401017	0,002775	0,022862

Величини  $\Delta_{\max} d$  і  $\Delta_{\max} D$  визначено згідно зі зменшенням можливості пропуску розв'язків задачі.

Проаналізуємо дані табл. 1, що упорядковані за зростанням  $W$ , в аспекті обрання таких оптимальних  $d$  і  $D$ , які забезпечують певну необхідну стійкість значень досліджуваної цільової функції до вірогідних відхилень її параметрів.

Бачимо, що  $d \approx 0,0028 \text{ м}$  та  $D \in [0,025 \text{ м}; 0,040 \text{ м}]$  реалізують  $W \in [0,427 \text{ Н}; 0,431 \text{ Н}]$ .

Нехай реальні максимальні відхилення виготовлення та експлуатації розглянутих пружин складають  $|\pm \Delta d| = 0,01 \text{ мм}$  і  $|\pm \Delta D| = 0,2 \text{ мм}$ . Тоді в якості оптимальних можна прийняти розміри  $d = 2,8 \text{ мм}$  і  $D = 34 \text{ мм}$ , яким відповідає  $W(0,0028 \text{ м}; 0,034 \text{ м}) = 0,4339 \text{ Н}$ . При цьому маємо  $W_1(0,00279 \text{ м}; 0,0338 \text{ м}) = 0,4255 \text{ Н}$ ,  $W_2(0,00279 \text{ м}; 0,0342 \text{ м}) = 0,4267 \text{ Н}$ ,  $W_3(0,00281 \text{ м}; 0,0338 \text{ м}) = 0,4412 \text{ Н}$ ,  $W_4(0,00281 \text{ м}; 0,0342 \text{ м}) = 0,4424 \text{ Н}$ . У всіх чотирьох наведених випадках виконуються обмеження (6).

Таким чином, для обраних оптимальних значень параметрів  $d = 2,8 \text{ мм}$  і  $D = 34 \text{ мм}$  та наявних умов виробництва й експлуатації прогнозована вага пружин коливається в діапазоні  $W \in [0,4255 \text{ Н}; 0,4424 \text{ Н}]$ .

Отже, підвищення точності виготовлення та покращання умов використання пружин сприяє зменшенню їх маси, проте в цьому випадку можливим є збільшення сумарної вартості життєвого циклу зазначеної продукції.

Відомо, що система, яка створена з оптимальних елементів, сама не обов'язково є такою. Це справедливо й для довільного процесу щодо його складових.

Комплексне врахування потреб конструювання, виробництва та експлуатації нині становить одну з важливих загальних проблем машинобудування.

Звідси актуальними постають питання розроблення, впровадження й ефективного застосування відповідних інтегрованих математичних моделей та їх реалізації в середовищі сучасних комп'ютерних інформаційних систем.

На завершення доцільно сказати про те, що задачі параметричної оптимізації тісно пов'язані з раціональним вибором структури конструкторсько-технологічних систем у машинобудуванні.

Для успішного вирішення цих завдань також потрібно широко залучати математичні методи й обчислювальні засоби з метою досягнення нових якісних результатів у проектуванні, виготовленні та експлуатації різноманітної продукції.

**Висновки.** Створення сучасної техніки вимагає розвитку як аналітичних, так і обчислювальних методів оптимізації. Головною перевагою перших є можливість отримання точних розв'язків, а других – висока універсальність і простота застосування.

Практичне значення запропонованих у статті прийомів залучення геометричних моделей до вирішення питань параметричної оптимізації об'єктів машинобудування полягає в отриманні результатів, які сприяють поліпшенню наочності зазначених процесів і підвищенню ефективності обчислювальних процедур визначення не тільки локальних, а й глобальних екстремумів цільових функцій.

Викладений підхід є інваріантним стосовно виду опрацьовуваних конструкцій, технології їх виготовлення (обробка різанням, тиском, зварюванням тощо) та експлуатації.

Найперспективнішим напрямом, на нашу думку, є комплексне використання різних методів оптимізації згідно з конкретними сферами їх раціонального застосування.

### Література

1. Хог Э. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции: Пер. с англ. / Хог Э., Арора Я. – М.: Мир, 1983. – 478 с.

2. Пальчевський Б.О. Дослідження технологічних систем (моделювання, проектування, оптимізація) / Пальчевський Б.О. – Львів: Світ, 2001. – 232 с.

3. Вірченко Г.А. Структурно-параметричні методи апроксимації як засоби вирішення задач оптимізації / Вірченко Г.А. // Праці Тавр. держ. агротех. університету – Вип. 4, т. 47. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С. 61-66.

4. Ванін В.В. Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання / Ванін В.В., Вірченко Г.А. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 23. – Харків: ХДУХТ, 2009. – С. 42-48.

Отримана 20.05.10

G. Virchenko

**Use of geometric approximation methods for solving parametric optimization in mechanical engineering**

National Technical University of Ukraine  
«Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv

*A method of optimizing the engineering design and technological systems which is based on the automated structural-parametric geometric modeling is shown in this paper. The examples of its practical application are considered. The directions for further research are proposed.*

---

## Інформація

### II INTERNATIONAL CONFERENCE ON TISSUE ENGINEERING (ICTE 2011),

an ECCOMAS Thematic Conference  
Lisbon, Portugal  
2nd to 4th June 2011

[http://www.cdr-sp.ipleiria.pt/index.php/TE\\_home.html](http://www.cdr-sp.ipleiria.pt/index.php/TE_home.html)

Tissue engineering is a multidisciplinary field that has seen intense development in the past few years. It combines efforts from biology, engineering and material science methods towards the development of biological substitutes to restore, maintain, or improve tissue functions. Mathematical and Computational methods have been intensely used to study tissue engineering issues, and the computational mechanics research community has demonstrated a special interest in this field.

Therefore, the ICTE 2011 will in focus on:

- \* Understanding the fundamentals of tissue engineering;
- \* Modelling and characterisation of scaffolds for tissue engineering;
- \* Modelling the inter-relationships between scaffolds and cell attachment, proliferation and differentiation;
- \* Design and development of scaffolds for tissue engineering;
- \* Fabrication and testing of scaffolds for tissue engineering;
- \* Cell signalling;
- \* Computational Bone Mechanics.