УДК 539.3

ДО ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ НЕПОЛОГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ З ВКЛЮЧЕННЯМ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Т. Шопа
Кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Івано-Франківськ

У роботі розглянуто задачу про усталені поперечні коливання шарнірно опертої ортотропної циліндричної непологої панелі з абсолютно жорстким включенням довільної форми та розташування, яке жорстко приєднане до панелі, в рамках теорії оболонок, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Розв'язок ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь та секвенціальному підході до побудови функції Гріна. Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, яку розв'язано методом колокацій.

непологa циліндрична ортотропна панель, включення, функція Гріна, секвенціальний підхід, коливання, частоти вільних коливань.

У праці [1] знайдено розв'язок задачі про коливання ортотропної шарнірно опертої циліндричної панелі з круговим масивним абсолютно жорстким включенням у рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви, однак не враховує повороти навколо нормалі до серединної поверхні. В цій статті розв'язано задачу про коливання ортотропної непологої циліндричної панелі з абсолютно жорсткким включенням довільної конфігурації, яке жорстко приєднане до панелі в рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні.

1. Постановка задачі. Розглянемо усталений режим поперечних коливань циліндричної ортотропної шарнірно опертої панелі з абсолютно жорстким масивним включенням, контуром якого є крива L. Циліндричну систему координат вибрано так, що вісь α_1 спрямовано вздовж осі панелі, а колова координата $\alpha_2 = R\varphi$, де φ — центральний кут. Нехай осі ортотропії матеріалу співпадають з відповідними напрямками введеної криволінійної системи координат. На включення діє система сил, рівнодійною якої є сила $P = P_0 \sin(\omega_0 t)$. Сила P діє вздовж нормалі до поверхні панелі в точці центра мас включення та змінюється за гармонічним законом з частотою ω_0 та амплітудою P_0.

Використовуватимемо такі позначення: $\vec{n}, \vec{\tau}$ – нормальний та дотичний вектор вдовж деякого напрямку, E_1, E_2 – модулі Юнга матеріалу, G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву матеріалу, ν_{12}, ν_{21} – коефіцієнти Пуасона матеріалу, ρ – густина матеріалу, k_1, k_2 – головні кривини панелі, $l, R, 2h$ – довжина, радіус і товщина панелі відповідно, q_i, m_i – компоненти зовнішнього навантаження, w – прогин панелі, $\gamma_{in}, \gamma_{i\tau}, u_{in}, u_{i\tau}$ – нормальні та тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні та осьових переміщень, Q_n – нормальна компонента перерізувальної сили, M_n, M_τ, N_n, N_τ – нормальні та тангенціальні компоненти момента та осьової сили.

Умови шарнірного опирання на краях панелі

$$w = 0,\ M_n = 0,\ N_n = 0,\ u_\tau = 0,\ \gamma_\tau = 0\,. \qquad (1)$$

Крайові умови на контурі L, що відповідають жорсткому контакту панелі та включення, такі:

$$u_n = 0, \gamma_\tau = 0, u_n = 0, \gamma_\tau = 0,\ w = w_0(\alpha)\sin(\omega_0 t), \qquad (2)$$

де w_0 — амплітуда переміщення включення;

Рівняння руху масивного включення має вигляд

$$m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P - \int_L p(\xi, t)\, d(\xi)\,, \qquad (3)$$

де $p(\xi,t) = p(\xi)\sin(\omega_0 t)$ — сили взаємодії панелі та включення , де $p(\xi) = -Q_n(\xi)$.

2. Розв'язувальна система рівнянь. Дослідження проводитимемо за використання рівнянь теорії непологих оболонок, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Рівняння руху непологої оболонки, що враховують нормальну компоненту інерційної сили для випадку поперечних коливань, мають вигляд:

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} - k_i Q_i = -q_i \quad (i = 1, 2),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) - 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_3,$$

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i \quad (i = 1, 2). \qquad (4)$$

На основі розподілу напружень та переміщень

$$U_i = u_i + \gamma_i \alpha_3,\ U_3 = w\,,\ \ \sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h\ , \\ \sigma_{33}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h\ , \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3 \quad (-h \le \alpha_3 \le h),$$

$$\sigma_{i3} = \begin{cases} \dfrac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \quad (i, j = 1,\ 2,\ \ i \ne j). \qquad (5)$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду

$$M_{11} = D_1\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \nu_{12}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right),\ \ M_{22} = D_2\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \nu_{21}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$M_{12} = M_{21} = D_{12}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$N_{12} = N_{21} = B_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$N_{11} = B_1\left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \nu_{12}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + (k_1 + \nu_{12}k_2)w\right],$$

$$N_{22} = B_2\left[\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \nu_{21}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + (k_2 + \nu_{21}k_1)w\right],$$

$$Q_1 = \Lambda_1\left(\gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1\right),\ Q_2 = \Lambda_2\left(\gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2\right),$$

$$D_i = \frac{2h^3 E_i}{3(1 - \nu_{12}\nu_{21})},\ \ D_{12} = \frac{2h^3 G_{12}}{3},$$

$$B_{12} = 2hG_{12},\ \ B_i = \frac{2hE_i}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})},\ \ \Lambda_i = 2hG_{i3}. \qquad (6)$$

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль визначаються за формулами:

$$\gamma_n = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2,\ \gamma_\tau = \tau_1\gamma_1 + \tau_2\gamma_2,\ w,$$
$$u_n = n_1 u_1 + n_2 u_2,\ u_\tau = \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2,$$

$$M_n = (M_{11}n_1 + M_{12}n_2)n_1 + (M_{21}n_1 + M_{22}n_2)n_2,$$

$$M_\tau = (M_{11}n_1 + M_{12}n_2)\tau_1 + (M_{21}n_1 + M_{22}n_2)\tau_2,$$

$$N_n = (N_{11}n_1 + N_{12}n_2)n_1 + (N_{21}n_1 + N_{22}n_2)n_2,$$

$$N_\tau = (N_{11}n_1 + N_{12}n_2)\tau_1 + (N_{21}n_1 + N_{22}n_2)\tau_2,$$

$$Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2. \qquad (7)$$

Внаслідок підстановки фізичних співвідношень (6) у рівняння руху (4) розв'язувальна система динамічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$[\mathbf{L}]\{U\} = -\{P\}, \qquad (8)$$

$$\{U\} = \{u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2\},\ \{P\} = \{q_1, q_2, q_3, m_1, m_2\},$$

$$\mathbf{L}_{11} = B_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2\Lambda_1,$$

$$\mathbf{L}_{22} = B_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{33} = \Lambda_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} -$$

$$-\left(k_1 B_1(k_1 + \nu_{12}k_2) + k_2 B_2(k_2 + \nu_{21}k_1)\right) - 2h\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{14} = \mathbf{L}_{41} = k_1\Lambda_1, \mathbf{L}_{25} = \mathbf{L}_{52} = k_2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{44} = D_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1,$$

$$\mathbf{L}_{55} = D_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{34} = -\mathbf{L}_{43} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \mathbf{L}_{35} = -\mathbf{L}_{53} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{12} = \left(B_1 \nu_{12} + B_{12}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{21} = \left(B_{12} + B_2 \nu_{21}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{45} = \left(D_1 \nu_{12} + D_{12}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \ \mathbf{L}_{15} = \mathbf{L}_{51} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{54} = \left(D_{12} + D_2 \nu_{21}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \mathbf{L}_{24} = \mathbf{L}_{42} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{13} = \left(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 \nu_{12}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{31} = -\left(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 \nu_{21}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{23} = \left(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 \nu_{21}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{32} = -\left(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 \nu_{12}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}.$$

3. Побудова функції Ґріна задачі. Функцію Ґріна для вищезгаданої крайової задачі знайдено за допомогою методу Фур'є та секвенціального подання дельта-функції (у вигляді послідовності дельтаподібних функцій). Подамо в системі рівнянь (8)

$$\begin{aligned} q_1 &= \mathrm{T}_1^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right) \delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right) \sin\left(\omega_0 t\right), \\ q_2 &= \mathrm{T}_2^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right) \delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right) \sin\left(\omega_0 t\right), \\ q_3 &= \mathrm{T}_3^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right) \delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right) \sin\left(\omega_0 t\right), \\ m_1 &= \mathrm{T}_4^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right) \delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right) \sin\left(\theta_0 t\right), \\ m_2 &= \mathrm{T}_5^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right) \delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right) \sin\left(\omega_0 t\right), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{\left|\xi - \xi^r\right|}{\varepsilon}\right), & \left|\xi - \xi^r\right| \le \varepsilon, \\ 0, & \left|\xi - \xi^r\right| > \varepsilon, \end{cases}$$

де $g(\varepsilon)\left(0 \le \varepsilon \le 1\right)$ – спадна гладка функція, $g(1) = 0, \ \int_0^1 g(\xi) d\xi = 1$.

Розкладемо співвідношення (9) у ряди Фур'є

$$q_3^r = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_3^r C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right) \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right) \sin\left(\omega_0 t\right),$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} q_1^r \\ m_1^r \end{Bmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_4^r \end{Bmatrix} C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right) \Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\right) \sin\left(\omega_0 t\right), \\ \begin{Bmatrix} q_2^r \\ m_2^r \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} T_2^r \\ T_5^r \end{Bmatrix} C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right) \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right) \sin\left(\omega_0 t\right), \end{aligned} \tag{10}$$

де

$$\begin{aligned} &\Phi_{km}^{cs}(\alpha) = \cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right) \sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right), \\ &\Phi_{km}^{sc}(\alpha) = \sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right) \cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right), \\ &\Phi_{km}^{ss}(\alpha) = \sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right) \sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right); \\ &\Phi_{km}^{cc}(\alpha) = \cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right) \cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right), \\ &\lambda_{1k} = \frac{k\pi}{l_1}, \lambda_{2m} = \frac{m\pi}{l_2}, \ l_2 = R\psi, \ l_1 = l, \\ &C_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2} \varphi\left(\lambda_{1k}\varepsilon\right) \varphi\left(\lambda_{2m}\varepsilon\right), \end{aligned}$$

φ – вагова функція, яка визначає тип узагальненого підсумовування, що відповідає певному вибору базової функції дельтаподібної послідовності.

Розв'язки шукаємо у такій формі:

$$w\left(\alpha, \alpha^r, t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w_{\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \sin\left(\omega_0 t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} u_1\left(\alpha, \alpha^r, t\right) \\ \gamma_1\left(\alpha, \alpha^r, t\right) \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{1\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{1\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \end{Bmatrix} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) \sin\left(\omega_0 t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} u_2\left(\alpha, \alpha^r\right) \\ \gamma_2\left(\alpha, \alpha^r\right) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{2\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{2\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \end{Bmatrix} \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \sin\left(\omega_0 t\right). \tag{11}$$

Після підстановки співвідношень (9), розкладених в ряди (10), та рядів (11) у розв'язувальну систему рівнянь (8), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів невідомих функцій. Часової координати вдається позбутись у випадку усталених гармонічних коливань.

У результаті одержимо функцію Ґріна задачі в аналітичному вигляді:

$$U\left(\alpha, \alpha^r, t\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} U\left(\alpha, \alpha^r, \varepsilon, t\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) *$$

$$*\left[\mathbf{E_{km}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U_{km}}\right]\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{T^r\right\} \sin\left(\omega_0 t\right) \tag{12}$$

$$U\left(\alpha, \alpha^r, t\right) = \left\{u_1(\alpha, \alpha^r, t), u_2(\alpha, \alpha^r, t), w(\alpha, \alpha^r, t), \gamma_1(\alpha, \alpha^r, t), \gamma_2(\alpha, \alpha^r, t)\right\}$$

$$\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} \Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right) \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{U_{km}}\right]=\begin{bmatrix} u_{1\varepsilon km}^1 & u_{1\varepsilon km}^2 & u_{1\varepsilon km}^3 & u_{1\varepsilon km}^4 & u_{1\varepsilon km}^5 \\ u_{2\varepsilon km}^1 & u_{2\varepsilon km}^2 & u_{2\varepsilon km}^3 & u_{2\varepsilon km}^4 & u_{2\varepsilon km}^5 \\ w_{\varepsilon km}^1 & w_{\varepsilon km}^2 & w_{\varepsilon km}^3 & w_{\varepsilon km}^4 & w_{\varepsilon km}^5 \\ \gamma_{1\varepsilon km}^1 & \gamma_{1\varepsilon km}^2 & \gamma_{1\varepsilon km}^3 & \gamma_{1\varepsilon km}^4 & \gamma_{1\varepsilon km}^5 \\ \gamma_{2\varepsilon km}^1 & \gamma_{2\varepsilon km}^2 & \gamma_{2\varepsilon km}^3 & \gamma_{2\varepsilon km}^4 & \gamma_{2\varepsilon km}^5 \end{bmatrix},$$

$$u_{1km}^1=\frac{1}{\det\left|\mathbf{L^{km}}\right|}\det\begin{vmatrix} \mathbf{L}_{22}^{km} & \mathbf{L}_{23}^{km} & \mathbf{L}_{24}^{km} & \mathbf{L}_{25}^{km} \\ \mathbf{L}_{32}^{km} & \mathbf{L}_{33}^{km} & \mathbf{L}_{34}^{km} & \mathbf{L}_{35}^{km} \\ \mathbf{L}_{42}^{km} & \mathbf{L}_{43}^{km} & \mathbf{L}_{44}^{km} & \mathbf{L}_{45}^{km} \\ \mathbf{L}_{52}^{km} & \mathbf{L}_{53}^{km} & \mathbf{L}_{54}^{km} & \mathbf{L}_{55}^{km} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{11}^{km}=-B_1\lambda_{1k}^2-B_{12}\lambda_{2m}^2-k_1^2\Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}_{22}^{km}=-B_{12}\lambda_{1k}^2-B_2\lambda_{2m}^2-k_2^2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{33}^{km}=-\Lambda_1\lambda_{1k}^2-\Lambda_2\lambda_{2m}^2-$$
$$-\left(k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)+k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right)+2\rho h\omega_0^2,$$

$$\mathbf{L}_{44}^{km}=-D_1\lambda_{1k}^2-D_{12}\lambda_{2m}^2-\Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}_{55}^{km}=D_{12}\lambda_{1k}^2-D_2\lambda_{2m}^2-\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{12}^{km}=-\left(B_1\nu_{12}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{21}^{km}=-\left(B_2\nu_{21}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{45}^{km}=-\left(D_1\nu_{12}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{54}^{km}=-\left(D_2\nu_{21}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{34}^{km}=\mathbf{L}_{43}^{km}=-\Lambda_1\lambda_{1k},$$
$$\mathbf{L}_{35}^{km}=\mathbf{L}_{53}^{km}=-\Lambda_2\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{13}^{(km}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_1k_2\nu_{12}\right)\lambda_{1k},$$
$$\mathbf{L}_{31}^{km}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}_{23}^{km}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{32}^{km}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_1k_1\nu_{12}\right)\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{14}^{km}=\mathbf{L}_{41}^{km}=k_1\Lambda_1,\ \mathbf{L}_{25}^{km}=\mathbf{L}_{52}^{km}=k_2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{15}^{km}=\mathbf{L}_{51}^{km}=\mathbf{L}_{24}^{km}=\mathbf{L}_{42}^{km}=0,$$

4. Зведення крайової задачі до системи інтегральних рівнянь та розв'язання методом колокацій. На основі знайденої функції Ґріна (12), граничних умов (2), (3), фізичних співвідношень, виразів для нормальних та дотичних компонент переміщень і зусиль (4) отримано систему шести інтегральних рівнянь:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega_{km}^{(U)}}(\alpha)\right]*$$

$$*\left[\mathbf{E_{km}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E_{km}}(\xi)\right]\begin{Bmatrix} T_1(\xi) \\ T_2(\xi) \\ T_3(\xi) \\ T_4(\xi) \\ T_5(\xi) \end{Bmatrix}dl(\xi)\qquad,$$

$$\left[\mathbf{\Omega_{km}^{(U)}}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix} u_{1n}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & u_{5n}(\alpha) \\ u_{1\tau}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & u_{5\tau}(\alpha) \\ w_{1n}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & w_{5n}(\alpha) \\ \gamma_{1n}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & \gamma_{5n}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & \gamma_{5\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$u_{in}(\alpha)=n_1(\alpha)u_{1\varepsilon km}^i+n_2(\alpha)u_{2\varepsilon km}^i,$$
$$u_{i\tau}(\alpha)=\tau_1(\alpha)u_{1\varepsilon km}^i+\tau_2(\alpha)u_{2\varepsilon km}^i,$$
$$w_{in}(\alpha)=w_{\varepsilon km}^i,$$
$$\gamma_{1n}(\alpha)=n_1(\alpha)\gamma_{1\varepsilon km}^i+n_2(\alpha)\gamma_{2\varepsilon km}^i,$$
$$\gamma_{1\tau}(\alpha)=\tau_1(\alpha)\gamma_{1\varepsilon km}^i+\tau_2(\alpha)\gamma_{2\varepsilon km}^i,$$

$$m_0\omega_0^2w_0=P_0-\int_L Q_n(\xi)d(\xi),$$

де $Q_n(\xi)=\sum_{i=1}^{5}Q_{in}(\xi)T_i(\xi)$,

$$Q_{in}=\Lambda_1n_1\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(\gamma_{1\varepsilon km}+\lambda_{1k}w_{\varepsilon km}-k_1u_{1\varepsilon km}\right)+$$
$$\Lambda_2n_2\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\gamma_{2\varepsilon km}+\lambda_{2m}w_{\varepsilon km}^i-k_2u_{2\varepsilon km}\right),$$

$$Q_{in}=\Lambda_1n_1\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(\gamma_{1km}^i+\lambda_{1k}w_{km}^i-k_1u_{1km}^i\right)+$$
$$\Lambda_2n_2\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\gamma_{2km}^i+\lambda_{2m}w_{km}^i-k_2u_{2km}^i\right).$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь використовуємо метод колокацій. Для цього контур кривої L замінюємо ламаними (N - кількість відрізків розбиття кон-

туру, α^r — середини відрізків розбиття контуру, $r=1\ldots N$). На кожному з прямолінійних відрізків контурів для фіктивних зусиль задаємо розподіл

$$T^r(\xi)=T^r\delta\left(\alpha^r,\xi\right)$$

та мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій α^q. Е результаті система, що відповідає системі інтегральних рівнянь (13), міститиме $5N+1$ лінійних алгебричних рівнянь і матиме такий вигляд:

$$\begin{Bmatrix}0\\0\\w_0\\0\\0\end{Bmatrix}=\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{U})}\left(\alpha^q\right)\right]*$$

$$*\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\begin{Bmatrix}T_1^r\\T_2^r\\T_3^r\\T_4^r\\T_5^r\end{Bmatrix},\qquad q=1....N.$$

$$m_0\omega_0^2w_0=P_0-\sum_{i=1}^{5}\sum_{r=1}^{N}Q_{in}(\xi)T_i^r.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідної системи лінійних алгебричних рівнянь. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\vec{n}(\alpha)=\left(n_1(\alpha),n_2(\alpha)\right)$ та дотичною $\vec{\tau}(\alpha)=\left(\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)\right)$ знаходимо на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на контурі включення.

Висновки. У рамках знайденого розв'язку можна розглядати випадки, коли контур включення містить кутові точки та вироджується в тріщину, оскільки на етапі числового розв'язку методом колокацій проводиться дискретизація його контуру.

Література

1. *Шопа Т.* Поперечні коливання циліндричної ортотропної панелі з круговим масивним включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 170–179.

Отримана 21.05.10

T. Shopa

To the construction of the solution of the problem on the vibration of the orthotropic cylindric non-shallow panel with inclusion of the arbitrary configuration

Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Ivano-Frankivsk

In the framework of the shell theory that takes into consideration the shear displacements and the rotation angles around the normal to the middle surface of the panel the problem on the vibration of simply supported orthotropic cylindrical non-shallow panel with the inclusion of the arbitrary configuration is considered in the paper. Solution is built on the base of the sequential approach to the construction of the Green function. The boundary value problems are reduced to systems of integral equations that are solved using the collocation method.

Інформація

XVI INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS

May 24 — 28, 2010
Riga, Latvia

The present Conference follows the previous meetings in this series held in Riga from 1965 to 2008. The XVI International Conference intends to keep the customary themes of discussion. Traditionally on the Riga conferences, the number of participants is approximately 250 from many countries. So, the conference offers a good opportunity to meet colleagues from all over the world. The meeting history is avaliable on the Conference website.

CONFERENCE SCIENTIFIC SECRETARY:
Dr. K. Cirule, Institute of Polymer Mechanics, University of Latvia
23 Aizkraukles St., Riga, LV 1006, Latvia
phone: +371-67543121, mob. phone: +371-29662710, fax: +371-67820467;
e-mail: cirule@pmi.lv
http://www.pmi.lv/html/Conflnf.htm.