

УДК 539.3

Н. Гук

Доцент, канд. фіз.-мат. наук,  
Дніпропетровський національний  
університет ім. О. Гончара,  
м. Дніпропетровськ

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ НАВАНТАЖЕННЯ, ЩО ДІЄ НА ТОНКОСТІННІ СИСТЕМИ, ПОБЛИЗУ КРИТИЧНИХ СТАНІВ

*Розглядається задача відновлення функції початкового прогину і зовнішнього навантаження, що діє на циліндричну оболонку, з урахуванням особливостей нелінійного пружно-деформованого стану. Початкове наближення, що забезпечує збіжність методу Ньютона, вибрано відповідно до запропонованої оцінки. Підхід дає можливість відновити невідомі параметри в усьому діапазоні дії навантаження.*

**ідентифікація, циліндрична оболонка, нелінійний пружно-деформований стан, обернена задача, початкове наближення**

При оцінюванні поточного стану тонкостінних конструкцій виникає задача про реконструкцію фактичного діючого навантаження, значення якого в системах з переважаним стискувачим напруженим станом близькі до критичних. Як відомо, розв'язання відповідної прямої задачі є особливим. Такі задачі належать до класу некоректних, оскільки для них не виконуються умови Адамара [1].

При розв'язанні оберненої задачі некоректність матиме два джерела: наявність особливих розв'язків прямої задачі і неєдиність розв'язку власне оберненої задачі, яка пов'язана з наявністю цілком безперервного оператора, що «обертає» відповідну пряму задачу [2]. Труднощі, пов'язані з формулюванням оберненої задачі, зазвичай, усуваються введенням обмежень на властивості розв'язків і зведенням задачі до варіаційної постановки [3]. Слід зазначити, що вибір вказаних обмежень і критерію у варіаційній задачі залежить від властивостей розв'язків прямої задачі, які вважаються за відомі.

Дослідження присвячене формулюванню граничної оберненої задачі теорії оболонок і розробленню методу й алгоритму її розв'язання.

**Постановка задачі.** Розглядається тонкостінна циліндрична оболонка в обмеженій просторовій області  $\Omega = \{X : X \in \Omega\}$ , яка знаходиться під дією зовнішнього

навантаження у вигляді поверхневих або (та) зосереджених дій  $R(X)$ . Поведінка такої оболонки описується системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних:

$$L(U(X), R(X)) = 0; \quad (1)$$

$$L_{\Gamma}(U(X), R(X)) = 0, \quad (2)$$

де  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  – вектор просторових координат;  $U(X)$  – вектор-функція переміщень у напрямках  $x_1, x_2, x_3$ ;  $\Gamma$  – контур області  $\Omega$ ;  $L(\cdot)$ ,  $L_{\Gamma}(\cdot)$  – задані диференціальні оператори, що діють в області  $\Omega$  та на межі  $\Gamma$  відповідно;  $R(X)$  – вектор-функція, що описує зовнішню дію.

Відомі сліди розв'язків, які описують пружно-деформований стан (ПДС) оболонки, подані деякою вектор-функцією:

$$\sigma(X) = \sigma^*. \quad (3)$$

Переходячи до варіаційної постановки задачі, визначимо невідому функцію навантаження як

$$R = \arg \inf_{R \in \bar{R}} \rho_W(\sigma(R), \sigma^*), \quad \sigma^* \in \bar{\sigma}, \quad (4)$$

де  $\bar{R}$  – область визначення розв’язків  $R(X)$ ;  $\bar{\sigma}$  – множина можливих станів оболонки;  $\rho_W$  – метрика у деякому функціональному просторі  $W$ , який має властивості, відповідні властивостям розв’язку задачі (1), (2);  $\sigma(R)$  – значення функції стану, обчислені з використанням моделі (1), (2), при відомому значенні  $R(X)$ .

**Математична модель.** Розв’язок задачі (1), (2) будуватиметься за допомогою узагальненого розв’язку [4], що задовольняє інтегральні тотожності:

$$(w, \varphi)_{W_\kappa} = \int_{\Omega} [T^{ij} (B_{ij} \varphi - w_{,x_i} \varphi_{,x_i}) + q \varphi] d\Omega + \int_{\Gamma_c} \bar{M}_{ii} \varphi_{,x_i} ds + \int_{\Gamma_z} \bar{Q}_{ii} \varphi ds, \quad (5)$$

$$(\omega(u_1, u_2) \cdot \kappa(\varphi_1, \varphi_2))_{W_t} = \int_{\Gamma_e} \bar{T}_{ii} \varphi_i dS + \int_{\Gamma_p} \bar{T}_{ij} \varphi_j dS + \int_{\Omega} \left[ (B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{,x_k} w_{,x_l}) D_P^{ijkl} \nabla_i \varphi_j + q_i \varphi_i \right] d\Omega, \quad (6)$$

де  $U = (u_1, u_2, w)$  – повний вектор переміщень точки серединної поверхні в напрямках  $\{x_i\}$ ;  $\omega(u_1, u_2)$  – вектор тангенціальних переміщень точки серединної поверхні;  $B_{ij}$ ,  $B_{kl}$  – кривини серединної поверхні;  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$  – будь-яка вектор-функція, що належить тому ж простору, що і розв’язок прямої задачі;  $\bar{M}_{ii}$ ,  $\bar{Q}_{ii}$ ,  $\bar{T}_{ii}$ ,  $\bar{T}_{ij}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q$  – навантаження, які потрібно визначити;  $\Gamma_c, \Gamma_p, \Gamma_z, \Gamma_e$  – ділянки граничного контуру  $\Gamma$ ;  $i, j, k, l = 1, 2$ . Прийнято, що підсумовування відбувається за індексами, які повторюються.

У якості граничних умов вважаємо виконаними умови  $w|_{\Gamma} = 0$ , решта умов на  $\Gamma$  вважаються природними [4]. Поєднання граничних умов є таким, що можливе утворення спеціальних функціональних просторів  $W_\kappa, W_t$  зі скалярними добутками:

$$(w_1, w_2)_{W_\kappa} = \int_{\Omega} D_P^{ijkl} \kappa_{ij}(w_1) \kappa_{kl}(w_2) d\Omega, \\ (\omega_1, \omega_2)_{W_t} = \int_{\Omega} D_u^{ijkl} \varepsilon_{ij}(\omega_1) \varepsilon_{kl}(\omega_2) d\Omega \quad (7)$$

та нормами

$$\|w\|_{W_\kappa}^2 = \int_{\Omega} D_P^{ijkl} \kappa_{ij}(w) \kappa_{kl}(w) d\Omega, \\ \|\omega\|_{W_t}^2 = \int_{\Omega} D_u^{ijkl} \varepsilon_{ij}(\omega) \varepsilon_{kl}(\omega) d\Omega. \quad (8)$$

Складові тангенціальної  $\varepsilon_{ij}$  і згинної  $\kappa_{ij}$  деформації для циліндричної оболонки визначаються з нелінійних геометричних співвідношень, які зв’язують деформації та переміщення серединної поверхні:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,x_j} + u_{j,x_i}] - B_{ij} w + \frac{1}{2} w_{,x_i} w_{,x_j}; \\ \kappa_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Функції  $D_P^{ijkl}$ ,  $D_u^{ijkl}$ , що характеризують геометричні й фізичні параметри оболонки, мають вигляд:

$$D_P^{ijkl} = \int_{-h(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} B^{ijkl}(x_1, x_2, x_3) dx_3; \\ D_u^{ijkl} = \int_{-h(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} \bar{B}^{ijkl}(x_1, x_2, x_3) x_3^2 dx_3,$$

пружинні сталі визначаються співвідношеннями:

$$B^{iiii} = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad B^{ijij} = \frac{\mu E}{1-\mu^2}; \quad B^{ijji} = \frac{E}{1+\mu}.$$

Кривини серединної поверхні для циліндричної оболонки дорівнюють:

$$B_{11} = 0; \quad B_{22} = 1/r; \quad B_{12} = 0,$$

де  $h, r$  – товщина і радіус оболонки відповідно;  $E$  – модуль Юнга;  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона.

Поздовжні зусилля й поперечні навантаження, що діють на оболонку, будемо характеризувати за допомогою введених функціональних просторів. Розглянемо множини  $\bar{W}_t$ ,  $\bar{W}_\kappa$  таких поздовжніх  $[q_i, \bar{T}_{ii}, \bar{T}_{ij}] \in \bar{W}_t$  і поперечних  $[q, \bar{M}_{ii}, \bar{Q}_{ii}] \in \bar{W}_\kappa$  навантажень, що агрегати, які описують їх і входять у рівняння (5), (6), є обмеженими функціоналами в просторах  $W_t, W_\kappa$  відповідно. З умови обмеженості виходить, що існують елементи  $\omega_n \in W_t$ ,  $w_n \in W_\kappa$  такі, що

$$\int_{\Omega} q_i \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_{e(H)}} \bar{T}_{ii}(\bar{H}) \varphi_i dS + \int_{\Gamma_{p(H)}} \bar{T}_{ij}(\bar{H}) \varphi_j dS = (\omega_n, \varphi)_{W_t}; \\ \int_{\Omega} q \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_{i(H)}} \bar{M}_{ii}(\bar{H}) \varphi_{,x_i} ds + \int_{\Gamma_{k(H)}} \bar{Q}_{ii}(\bar{H}) \varphi ds = (w_n, \varphi)_{W_\kappa}.$$

Ці співвідношення дають можливість ввести норми для елементів  $[q_i, \bar{T}_{ii}, \bar{T}_{ij}] \in \bar{W}_t$ ,  $[q, \bar{M}_{ii}, \bar{Q}_{ii}] \in \bar{W}_\kappa$  у вигляді:

$$\|[q_i, \bar{T}_{ii}, \bar{T}_{ij}]\|_{\bar{W}_t} = \|\omega_n\|_{W_t}; \\ \|[q, \bar{M}_{ii}, \bar{Q}_{ii}]\|_{\bar{W}_\kappa} = \|w_n\|_{W_\kappa}.$$

Введемо загальний функціональний простір  $W_{tk}$  вектор-функцій  $U(u_1, u_2, w)$ , в яких  $w \in W_\kappa$ , вектор  $\omega(u_1, u_2) \in W_t$  з нормою:

$$\|w\|_{W_{tk}}^2 = \|w\|_{W_\kappa}^2 + \|\omega\|_{W_t}^2.$$

Скалярний добуток для комплексу навантаження  $[q_i, \bar{T}_{ii}, \bar{T}_{ij}, q, \bar{M}_{ii}, \bar{Q}_{ii}] \in \bar{W}_{tk}$  у просторі  $W_{tk}$  описується співвідношеннями:

$$([q_i, \bar{T}_{ii}, \bar{T}_{ij}, q_1, \bar{M}_{ii}, \bar{Q}_{ii}], [q_i, \bar{T}_{ii}, \bar{T}_{ij}, q_2, \bar{M}_{ii}, \bar{Q}_{ii}])_{W_{tk}} = \\ = (w_{n_1}, w_{n_2})_{W_\kappa} + (\omega_{n_1}, \omega_{n_2})_{W_t}.$$

Простір  $W_{TK}$  дає можливість визначити метрику  $\rho_W(\sigma(R), \sigma^*)$  у вигляді

$$\rho_W(\sigma(R), \sigma^*) = \rho_{W_{TK}}(\sigma, \sigma^*), \quad (9)$$

де  $\sigma(R) = \{\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}\}^T$  – вектор, що характеризує нелінійний ПДС оболонки при фіксованому значенні вектора навантаження  $R(X)$ ;  $\varepsilon_{ij}(R), \kappa_{ij}(R)$  – компоненти узагальнених деформацій, які виражені через компоненти вектора переміщень  $U(X)$ ;  $\sigma^* = \{\varepsilon_{ij}^*, \kappa_{ij}^*\}^T$  – вектор значень узагальнених деформацій, що спостерігаються.

Звідси витікає, що,  $\{\varepsilon_{ij}(R), \kappa_{ij}(R)\}^T = \sigma(R)$ , а для опису функцій узагальнених деформацій може бути вибрано простір  $W_2^0$ , метрика в якому визначається як

$$\rho_{W_2^0} = \int_{\Omega} (D_p^{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) + D_u^{ijke} (\kappa_{ij} - \kappa_{ij}^*) (\kappa_{kl} - \kappa_{kl}^*)) d\Omega. \quad (10)$$

**Метод розв'язання.** Для визначення невідомої функції навантаження  $R(X)$  пряма задача (5), (6) формулюється як задача, що містить незалежний параметр, який характеризує рівень навантаження. При цьому розв'язок будується як функція цього параметру з використанням методу скінченних елементів (МСЕ), при підході до особливої точки прямої задачі використовується прийом зміни параметра продовження.

Застосування МСЕ припускає дискретизацію всіх функцій задачі і їх подальшу апроксимацію. Для дискретизації функцій задачі вводяться такі сітки: сітка  $X_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , для опису вектор-функції  $U(X_k) = \{U_k\}$  та  $\Phi = \{\Phi_k\}$ , де  $U_k$ ,  $\Phi_k$  – вузлові значення відповідних функцій; сітка  $X_v$ ,  $v = \overline{1, V}$ , у вузлах якої спостерігаються або задаються значення функції  $\sigma^*(X_v) = \{\sigma_v^*\}$ ; сітка  $X_z$ ,  $z = \overline{1, Z}$  (може бути нерівномірною), у вузлах якої визначаються значення невідомих функцій  $R(X_z) = \{R_z\}$ .

Невідомі функції  $U(X)$  та  $\Phi$  на елементі задаються за допомогою апроксимацій через їхні вузлові значення [5]:

$$U^e(X) = \sum_1^L U_k \Psi_k(X), \quad \varphi_1^e = \sum_1^L \Psi_i(X), \\ \varphi_2^e = \sum_1^L \Psi_j(X), \quad \varphi^e = \sum_1^L \Psi_n(X),$$

де  $\Psi(X)$  – функції форми;  $L$  – кількість вузлів елемента.

Після виконання відповідної процедури інтегрування і підсумовування матриць елементів отримуємо систему алгебричних рівнянь у вигляді:

$$K(U) = P(R), \quad (11)$$

де  $K(U)$  – нелінійна матриця жорсткості;  $U = \{U_k\}$  – вектор вузлових переміщень;  $P(R) = \{P_z\}$  – проекція вектора  $R = \{R_z\}$  на функції форми.

Розв'язок системи рівнянь (11) дає можливість побудувати вектор значень  $\sigma(R)$  у вузлах сітки  $X_v$ ,  $v = \overline{1, V}$  у вигляді  $\sigma(R) = \{\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}\}^T = \{\sigma_v\}$ .

Для визначення невідомого вектора  $R$  при заданому векторі  $\sigma^*$  використовується дискретне формулювання умови (4) у вигляді

$$R = \arg \min_{R \in \bar{R}} (\sigma(R) - \sigma^*)^T (\sigma(R) - \sigma^*). \quad (12)$$

Для виконання числової мінімізації функціоналу (12) застосуємо метод Ньютона, ітераційний процес пошуку вектора параметрів матиме вигляд

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} - J^{-1}(R^{(k)}) \varepsilon(R^{(k)}), \quad (13)$$

де  $J(R^{(k)})$  – матриця похідних функції похибки  $\varepsilon(R^{(k)}) = (\sigma(R^{(k)}) - \sigma^*)$  за компонентами вектора-аргументу;  $k$  – номер кроку ітераційного процесу.

При числовій реалізації матриця замінюється різницеvim аналогом, така заміна не порушує збіжності процесу методу Ньютона.

Для забезпечення збіжності ітераційного алгоритму (13) потрібно обрати таке початкове наближення  $R_0$ , щоб воно належало множині  $R^* \subseteq \bar{R}$ . У якості множини  $R^*$  на підставі принципу регуляризації має бути вибрана компактна множина [3]. Розглянемо спосіб визначення  $R_0$  з використанням інформації про властивості розв'язків  $R$  і  $\sigma$ .

Вибір початкового наближення  $R_0 = \|R\|_{L_2(\Omega)}$  здійснюватимемо з множини  $\bar{R}^*$ , кожний елемент  $\bar{R}_i \in \bar{R}^*$  якої визначається як  $\bar{R}_i = \|R\|_{L_2(\Omega)}$ . Якщо множину  $\bar{R}^*$  сформувати в деякій області  $S = \{s : -0.5 \leq s \leq 0.5\}$  як спадячу послідовність елементів  $\bar{R}_i$  то, враховуючи, що  $R(\sigma)$  на компактній множині є безперервною функцією, можна прийняти для аналізу

$$\bar{R}^* = R_0(\lambda, p) e^{-\alpha s}, \quad (14)$$

де  $s$  – координатна вісь в області  $S$ ; параметри  $\lambda$ ,  $p$  характеризують рівень навантаження і його змінність в області  $\Omega$ .

Враховуючи (14), очевидно, що на області  $S$  досягається максимальне значення  $R_{max} = R_0(\lambda, p) e^{0.5\alpha}$ , і параметр  $\alpha$  може бути визначений з умови

$$R_0(e^{0.5\alpha} - 1) = (R_{max} - R_0)$$

у вигляді

$$\alpha = 2 \ln \frac{R_{max}}{R_0},$$

де  $R_{max}$  – граничне значення норми розв'язку на області  $S$ ;  $R_0$  – середнє значення, яке вибирається як початкове наближення.

Введемо такі припущення про властивості розв'язків прямої та оберненої задач [2]. Нехай

$$\exists \gamma > 0 : m \|R\|_{W_2^{-\gamma}(S)} \leq \|\sigma\|_{W_2^0(S)} \leq M \|R\|_{W_2^{-\gamma}(S)}, \quad (15)$$

$$m, M > 0;$$

$$R \in W_2^\beta(S), \quad \beta > 0 \quad \|R\|_{W_2^\beta(S)} \leq \rho, \quad (16)$$

де величини  $\gamma, \beta$  характеризують змінність елементів множин  $\sigma, R$  на області  $S$ .

В якості компактноі множини будемо використовувати простори підсумовуваних функцій, зокрема, простори Соболева, що є замиканням по нормі множин функцій Банахового простору  $L_2(\Omega)$ , для яких скінченна величина

$$\|R\|_{W_2^\beta(S)} = \left( \sum_{0 \leq |c| \leq \beta} \int (D^c R)^2 dS \right)^{1/2}, \quad (17)$$

$$\text{де } D^c R = \frac{\partial^{|c|} R}{\partial s_1^{k_1} \partial s_2^{k_2} \dots \partial s_n^{k_n}}; \quad c = (k_1, k_2, \dots, k_n); k_i \geq 0;$$

$$|c| = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \beta \in \mathbb{N}, \beta > 0.$$

Використання інтерполяційної нерівності в просторі Соболева дає можливість сформуувати оцінку

$$\|R\|_{W_2^0(S)} \leq \|R\|_{W_2^{\beta+\gamma}(S)}^\beta \|R\|_{W_2^\beta(S)}^\gamma. \quad (18)$$

Нехай  $\|\sigma\|_{W_2^0(S)} \leq \sigma^*$ , де  $\sigma^* = \|\sigma^*\|_{L_2(\Omega)}$ ;  $\sigma^*$  – вектор значень, які спостерігаються. З (15) визначимо:

$$\|R\|_{W_2^{-\gamma}(S)} \leq \frac{\sigma^*}{m},$$

тоді (18), враховуючи (16), матиме вигляд

$$\|R\|_{W_2^0(S)} \leq \left( \frac{\sigma^*}{m} \right)^{\beta+\gamma} \rho^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}.$$

Нехай значення  $R_i = R_0$ , тоді константу  $m$  визначимо на розв'язку  $\sigma(R_0)$  як

$$m = \frac{\sigma(R_0)}{R_0}.$$

Для норми  $\rho$  в області  $S$ , враховуючи (17), отримаємо

$$\rho = R_0 \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}} (e^\alpha - e^{-\alpha}) = R_0 \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\alpha}} \operatorname{sh} \alpha = R_0 \mu(\alpha).$$

Оцінка наближення  $\|R\|_{W_2^0(S)}$ , яке може бути отримане при  $R_i = R_0$ , має вигляд

$$\|R\|_{W_2^0(S)} \leq \left( \frac{\sigma^* R_0}{\sigma(R_0)} \right)^{\beta+\gamma} \rho^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}$$

або при  $\gamma = 1; \beta = 1$ :

$$\|R\|_{W_2^0(S)} \leq \left( \frac{\sigma^*}{\sigma(R_0)} \right)^{\frac{1}{2}} R_0 \mu(\alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи аксіому норми [6]

$$\|R_0 + \Delta R\| \leq R_0 + \|\Delta R\|,$$

отримаємо, що

$$\frac{\|\Delta R\|}{R_0} \leq \left( \frac{\sigma^*}{\sigma(R_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(\alpha)^{\frac{1}{2}} - 1$$

або

$$\frac{\|\Delta R\|}{R_0} \leq \left( \frac{\sqrt{\sigma^* \mu(\alpha)} - \sqrt{\sigma(R_0)}}{\sqrt{\sigma(R_0)}} \right).$$

З умови (18) виходить, що при  $\gamma \rightarrow 0$  похибка  $\frac{\|\Delta R\|}{R_0}$

дорівнює  $\frac{\sigma^* - \sigma(R_0)}{\sigma(R_0)}$ . У цьому випадку втрати точності

розв'язку не відбувається, а, отже, можливе використання ітераційних алгоритмів типу методу Ньютона [7].

Для виконання умови  $\gamma \rightarrow 0$  повинно виконуватися

$$\frac{\partial \sigma(R)}{\partial R} \rightarrow 0, \text{ тоді}$$

$$\frac{\|\Delta R\|}{R_0} = \min_{\lambda, p} \frac{\left( \sqrt{\sigma^* \mu(\alpha)} - \sqrt{\sigma(R_0)} \right)}{\sqrt{\sigma(R_0)}}. \quad (19)$$

Умову (19) можна виконати, якщо для побудови розв'язку використовувати процес продовження за параметром  $\lambda$  [8]. Тоді на кожному кроці  $p_{i+1} = p_i + \Delta p$  розв'язок знаходиться з системи рівнянь

$$K(U) = P(p, \lambda, \alpha),$$

при рухові за параметром  $\lambda$  визначається значення

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \frac{\|\Delta R(\lambda, \alpha, p)\|}{R_0}, \quad (20)$$

потім, при рухові за параметром  $p$  із зафіксованим значенням  $\lambda^*$  визначається

$$p_i^* = \arg \min_p \frac{\|\Delta R(\lambda^*, \alpha, p)\|}{R_0}. \quad (21)$$

При організації ітераційного процесу (20), (21) у якості параметра  $\alpha$  вибирається його значення з попереднього кроку розрахунку.

Розв'язок може бути знайдений у всьому діапазоні зміни навантаження, включаючи особливу точку розв'язку. При підході до особливої точки розв'язку здійснюється перехід на рух за деяким елементом вектора, що характеризує ПДС. Це усуває особливість матриці системи, що розв'язується, проте спосіб визначення вектора  $R$  не змінюється.

**Алгоритм визначення діючого навантаження.** Запропонований підхід до визначення навантаження, що діє, складається з етапів вибору початкового наближення та ітераційного уточнення розв'язку і може бути описаний таким алгоритмом:

*Етап 1. Формування початкового наближення:*

1. Ініціалізація змінних: задати  $\alpha = \alpha_0$ ;  $\lambda = \lambda_0$ ;  $p = p_0$ ;  $\Delta\lambda$ ;  $\Delta p$ ;  $i = 1$ ;  $j = 1$ ;  $k = 1$ ;  $flag := 1$ .

2. Виміряти (задати) значення  $\sigma^*$ .

3. Задати  $R_0 \in \bar{R}$ .

4. Розв'язати пряму задачу (5), (6); обчислити  $\sigma(R_{011})$ ,

$$\frac{\|\Delta R_{11}\|}{R_{011}}$$

5.  $j = j + 1$ ;  $\lambda_j = \lambda_{j-1} + \Delta\lambda$ .

6.  $\alpha_{ij} = \ln \frac{R_{ij-1}}{R_{0ij-1}}$ ;  $\frac{\|\Delta R_{ij}\|}{R_{0ij}}$  визначається з (5), (6) методом

продовження за параметром  $\lambda$ .

7. Якщо  $i = 1$ , то перейти до п. 8, інакше — до п. 11.

8. Якщо  $\frac{\|\Delta R_{ij}\|}{R_{0ij}} \leq \frac{\|\Delta R_{i-1j}\|}{R_{0i-1j}}$ , то перейти до п. 5, інакше

перейти до п. 9.

9.  $\lambda^* = \lambda_j - \Delta\lambda$ ;  $j^* = j - 1$ .

10.  $i = i + 1$ ;  $p_i = p_{i-1} + \Delta p$ ; перейти до п. 6.

11. Якщо  $\frac{\|\Delta R_{ij^*}\|}{R_{0ij^*}} \leq \frac{\|\Delta R_{i-1j^*}\|}{R_{0i-1j^*}}$ , то перейти до п. 12,

інакше перейти до п. 13.

12. Якщо  $k < 2$ , то  $flag := 1$ ; перейти до п. 10, інакше  $flag := 1$ ; перейти до п. 14.

13. Якщо  $flag := 1$  або ( $i = 2$  и  $k = 2$ ), то  $i^* = i - 1$ ,  $R_0 = R_{0i^*j^*}$ , перейти до п. 15, інакше перейти до п. 14.

14.  $k = k + 1$ ;  $i := k$ ;  $p_i = p_{i-1} - \Delta p$ ; перейти до п. 6.

*Етап 2. Ідентифікація навантаження:*

15. Ітераційний алгоритм методу Ньютона.

**Результати обчислювального експерименту.** Запропонований алгоритм був застосований для ідентифікації функції навантаження, яке діє на циліндричну оболонку, що має початковий прогин. У якості навантаження розглядалося стискування вздовж твірної і зовнішній тиск. Оболонка ( $L/r = 4$ ,  $r/h = 200$ ,  $L$ ,  $r$ ,  $h$  – довжина, радіус, товщина оболонки,  $E = 2 \cdot 10^6$   $H/m^2$ ) шарнірно оберта на торцях. Модель конструкції було представлено у скінченноелементній формі.

Як приклад розглядалися задачі двох типів: відновлення параметрів початкового прогину за дії рівномірного осьового стиску в докритичній області; відновлення параметрів довільно розподіленого навантаження типу осьового стиску і зовнішнього тиску.

У результаті розв'язання прямих задач із задалегідь заданим видом функції зовнішньої дії і функції початкового прогину визначався пружно-деформований стан конструкції, а набуті значення деформації у верхньому і нижньому шарі конструкції у вузлах сітки були використані у якості векторів значень результатів вимірювань  $\sigma^*$

[9]. Невідомі функції зовнішньої дії і початкового прогину представляються відповідними векторами значень, заданими у вузлах скінченноелементної сітки, і визначаються в ітераційному процесі.

Для ідентифікації функції початкового прогину оболонка навантажувалася рівномірним стиском вздовж твірної, при цьому зовнішня дія задавалася так, що стан оболонки залишався істотно однорідним ( $\bar{\lambda} = 0.2$ ;  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_{крит}$ ;  $\lambda_{крит}$  – власні значення нелінійної задачі (5) (6)), зростання напружень відбувалося плавно і спостерігалось в зонах, прилеглих до областей, що мають початковий прогин.

Як початкове наближення для ідентифікації прогину було обрано розподіл у вигляді

$$w_0 = f_0 \sin \frac{\pi c x}{L} \cos \frac{(d\theta + \eta)}{r},$$

де  $\theta$  – кутова координата;  $x$  – координата вздовж твірної;  $f_0, c, d, \eta$  – параметри розподілу (початкові значення параметрів, задані довільно  $f_0 = 0.0001$ ;  $\eta = 0$ ;  $c = 3$ ;  $d = 6$ ). Вигляд фрагменту ( $0 \leq \theta \leq 60$ ) розподілу у центральній перетині оболонки (при  $x = L/2$ ) наведено на рис. 1 пунктирною лінією. Вигляд фрагменту дійсної функції прогину також наведено на рис. 1 (тонка суцільна лінія, для побудови кривих використовується поліноміальна апроксимація).

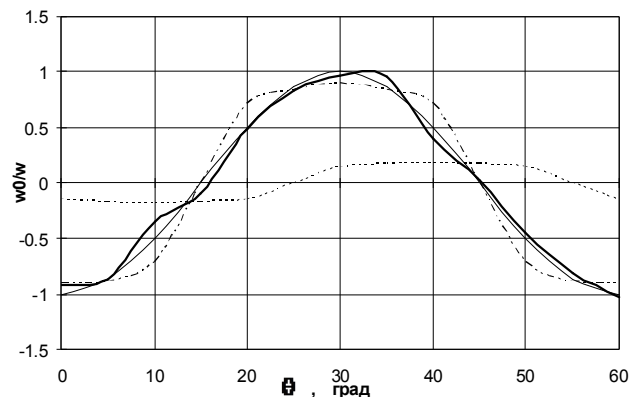


Рис. 1. Результат ідентифікації функції початкового прогину

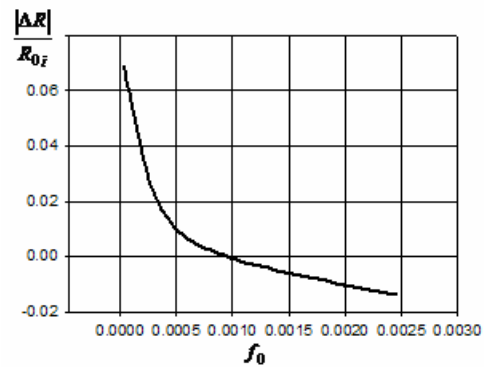


Рис. 2. Зміна відношення  $\frac{\|\Delta R\|}{R_{0i}}$  за параметром  $f_0$

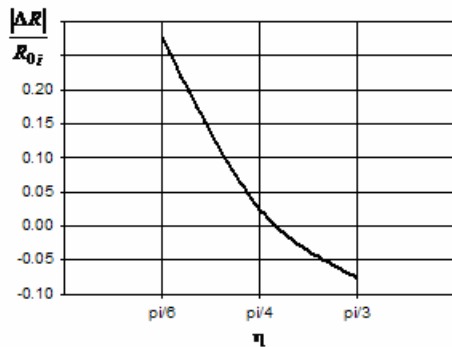


Рис. 3. Зміна відношення  $\frac{|\Delta R|}{R_{0i}}$  за параметром  $\eta$

Відповідно до запропонованого алгоритму здійснювався вибір початкового наближення. Процедура визначення параметрів  $f_{0i}$ ,  $\eta_i$  показана на рис. 2, рис. 3. Приріст за параметром  $f_0$  здійснюється до тих пір, поки

спостерігається зменшення величини відношення  $\frac{|\Delta R|}{R_{0i}}$ ,

потім із зафіксованим значенням  $f_0$  здійснюється рух за параметром  $\eta$ .

Після виконання цієї процедури отримано початкове наближення для ідентифікації функції прогину (на рис. 1 позначено штрих-пунктирною лінією). Близьке до дійсної залежності початкове наближення дає змогу отримати задовільний результат ідентифікації з використанням методу Ньютона, який також подано на рис. 1 (жирна суцільна лінія).

Був проведений числовий експеримент, в якому задавалися різні початкові наближення. Слід зазначити, що при виборі довільного початкового наближення, яке не задовольняє умову близькості до «доброго» початкового наближення, означеної в алгоритмі, ітераційний процес методу Ньютона є розбіжним.

Ідентифікація довільно розподіленого навантаження типу осьового стиску і зовнішнього тиску також виконувалася відповідно до запропонованого алгоритму.

Початковий розподіл навантаження приймався у вигляді:  $p = \lambda(a + b \cos(\theta + \eta))^n$  – для нерівномірно розподіленого зовнішнього тиску;  $q = \lambda(a + b \cos(m\theta + \eta))^n$  – для осьового стиску, де  $\lambda$ ;  $a$ ;  $b$ ;  $m$ ;  $n$ ;  $\eta$  – параметри розподілу.

Початкові значення параметрів було обрано довільно:  $\lambda = 1$ ;  $a = 0.5$ ;  $b = 0.1$ ;  $n = 2$ ;  $\eta = 0$  – для зовнішнього тиску;  $\lambda = 0.3$ ;  $a = 0$ ;  $b = 1$ ;  $m = 6$ ;  $n = 5$ ;  $\eta = 0$  – для осьового стиску (відповідний початковий розподіл у центральному перетині оболонки (при  $x = L/2$ ) наведено на рис. 4, рис. 5 пунктирною лінією).

У якості відновлюваних функції навантаження використовувалися нерівномірно розподілені навантаження, вигляд яких подано на рис. 4, рис. 5. (дійсний розподіл позначено тонкою суцільною лінією). Тут же подані результати етапів ідентифікації – вибір початкового наближення з використанням алгоритму (штрих-пунктирна лінія відповідає вибраному початковому наближенню;

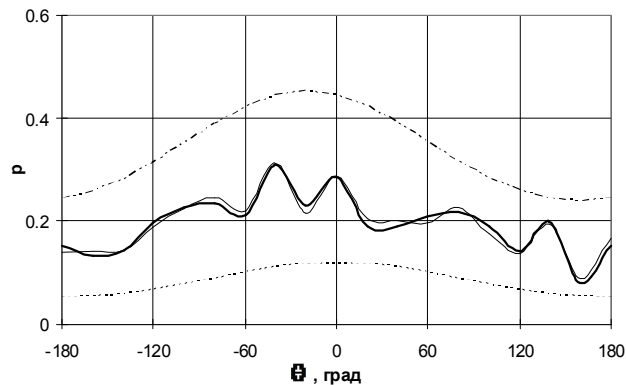


Рис. 4. Результат ідентифікації довільно розподіленого зовнішнього тиску

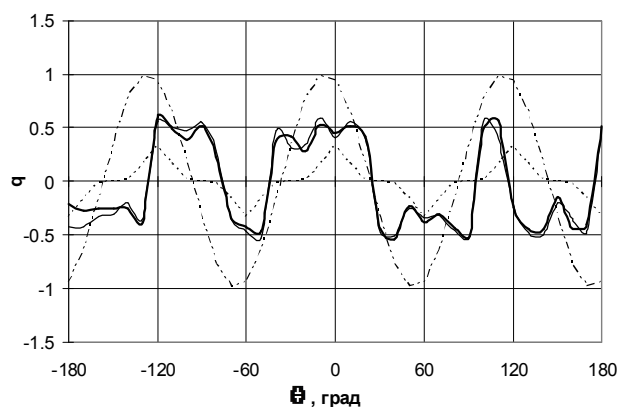


Рис. 5. Результат ідентифікації довільно розподіленого осьового стиску

параметри розподілу набули значень:  $\lambda = 1$ ;  $a = 1$ ;  $b = 0.08$ ;  $n = 4$ ;  $\eta = 20$  – для зовнішнього тиску;  $\lambda = 1$ ;  $a = 0$ ;  $b = 1$ ;  $n = 1$ ;  $\eta = 20$  – для осьового стиску) та ітераційна процедура методу Ньютона (суцільна жирна лінія позначає результат ідентифікації).

Ідентифікація зовнішніх навантажень з вибраним початковим наближенням здійснювалась при різних рівнях навантаження. У випадку, коли дія викликає істотно однорідний стан ( $\bar{\lambda} < 0.4$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_{крит}$ ), процес відновлення сходиться за меншу кількість ітерацій незалежно від вигляду розподілу навантаження.

У табл. 1 наведені фрагменти векторів навантаження, що ілюструють процедуру ідентифікації довільно розподіленого осьового стиску для рівня навантаження ( $\bar{\lambda} = 0.9$ ), що викликає нелінійну деформацію. Результати на ітераціях наближаються до дійсних значень вектора навантаження. Похибка наближення складає до 5%. Слід зазначити, що зі зростанням рівня навантаження для досягнення заданої точності ідентифікації функції навантаження потрібно виконати більшу кількість ітерацій.

Рівень навантаження (близькість його до критичного значення) не істотно впливає на процес пошуку складових вектора навантаження. Це підтверджує відповідне припущення про відсутність впливу неєдності розв'язків

Таблиця 1

Результати ідентифікації довільно розподіленого осевого стиску у випадку нелінійного деформування оболонки

Кут, град	Дійсне навантаження	Початкове наближення	Результат 1-ї ітерації	Результат 3-ї ітерації	Результат ідентифікації	Похибка, %
45	0.2080	0.0000	0.3650	0.7071	0.2171	4.38
50	0.5490	-0.5000	-0.1430	0.2588	0.5582	1.67
55	-0.8491	-0.8660	0.0000	-0.9460	-0.8600	1.28
60	-0.7400	-1.0000	-0.7844	-0.7071	-0.7071	4.45
65	-0.8800	-0.8660	-0.9328	-0.9659	-0.8966	1.89
70	-0.1520	-0.5000	-0.9540	0.3460	-0.1462	3.82
75	-0.880	0.000	0.4380	-0.3180	-0.8632	1.91
80	0.9920	0.5000	0.7250	-0.2588	0.9775	1.46
85	0.3920	0.8660	0.5220	1.1580	0.3780	3.57
90	0.7140	1.0000	1.1770	0.7071	0.7271	1.84
95	0.8800	0.8660	0.9328	0.9659	0.8659	1.60

прямої задачі на процес ідентифікації у разі адекватного вибору метрики  $\rho_W$  у просторі та початкового наближення  $R_0$ .

**Висновки.** Запропонований підхід дає змогу ідентифікувати функцію зовнішньої дії, враховуючи особливості нелінійного ПДС; отримана оцінка, яка характеризує вибір «доброго» початкового наближення, що забезпечує збіжність методу Ньютона; регуляризація задачі здійснюється за рахунок вибору спеціального функціонального простору, який враховує нелінійність розв'язків прямої задачі; порівняльний аналіз результатів обчислювального експерименту показав, що відновлення параметрів можливе у всьому діапазоні дії навантаження.

Автор висловлює щирю подяку професорові Ободан Наталії Ллвіні за цінні поради і пропозиції, висловлені при обговоренні результатів роботи.

## Література

1. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач – М.: Наука, 1986. – 286 с.
2. Ватульян А.О. обратные задачи в механике деформируемого твердого тела – М.: Физматлит, 2007. – 222 с.
3. Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении – М.: Машиностроение, 1990. – 263 с.
4. Ворovich И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – М.: Наука, 1989. – 373 с.
5. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике – М.: Мир, 1975. – 541 с.
6. Ворovich И.И., Лебедев Л.П. Функциональный анализ – М.: Вузовская книга, 2000.–316 с.
7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач – М.: Наука, 1988. – 549 с.
8. Валивили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976.–278 с.
9. Гук Н.А., Ободан Н.А., Гавеля Г.М. Выбор критерия идентификации в обратных задачах теории оболочек // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д.: Наука і освіта, 2010. – Вип. 14. – С. 123-133

Отримана 24.11.09

N. Guk

Identification of loading, operating on the thin-walled systems, near-by critical state

Dnipropetrovsk National University named by O. Gonchar, Dnipropetrovsk

The problem of identification of initial deflection and external loading, account the nonlinear stress-strain state of cylinder shell, is considered. An estimation which characterizes the choice of the initial approaching is offered. Solutions of the load parameters recovery boundary problem are presented.

## Інформація

### 5th MPA Meeting (International Meeting on Developments in Materials, Processes and Applications of Emerging Technologies)

Alvor, Portugal, 27-29 June 2011

<http://www.mpa-meeting.com/>

#### Topics include:

1. Commercialisation of Nanotechnology
2. Surface Science, Engineering & Technology
3. Materials for Energy Applications
4. Applied Bio-Nanotechnology
5. Carbon Nanotubes/Wires/Rods & their Applications
6. Advanced Nanometrology and Nanomanufacturing