В. Яглінський

Доцент, канд. техн. наук, Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

УДК 62-231:621.9.04

ПАРАМЕТРИ ЖОРСТКОСТІ БІГЛАЙДУ У СИНГУЛЯРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ

На основі рівняння сумісності деформацій з використанням принципу Лагранжа визначені пружні сили і параметри жорсткості одновісного та двовісного двокоординатних біглайдів. У результаті аналізу матриць жорсткості біглайду і дослідження функцій її елементів від положення механізму визначено умови виникнення квазінульової і від'ємної жорсткості для сингулярних конфігурацій. Розроблена методика і отримані результати забезпечують можливість оптимального пристосування змінних параметрів жорсткості біглайду до технологічного процесу з метою забезпечення необхідної точності обробки.

механізм паралельної структури, біглайд, квазінульова і від'ємна жорсткість

Вступ. Механізми паралельної структури (МПС) та промислові платформи (ПП) сприяють значному розширенню можливостей сучасного технологічного обладнання, особливо при великих динамічних завантаженнях і під час виконання операцій з обробки складних поверхонь з багатокоординатною системою керування [1]. Водночас недостатня жорсткість МПС, а також її мінливість при виконанні технологічних операцій спричиняє зміни частотних характеристик системи, небажані явища резонансного типу, збільшення часу перехідних процесів тощо.

Серед небагатьох відомих досліджень жорсткості МПС найбільш результативними уявляються наступні: моделювання жорсткості МПС методом кінцевих елементів [2]; експериментальне вимірювання жорсткості МПС [3]; теоретичний аналіз матричним методом жорсткості шестикоординатного МПС з використанням плюкерових координат ліній штанг [4]. Аналіз отриманих результатів показав, що проблема визначення та аналізу параметрів жорсткості МПС у робочому просторі досліджена недостатньо, зокрема: не визначено систему залежностей жорсткості МПС від формоутворюючої конфігурації; не визначені параметри жорсткості МПС у сингулярних конфігураціях; не досліджені умови виникнення квазінульової та від'ємної жорсткості МПС. Особливо важливою уявляється задача визначення областей оптимальних значень жорсткості обладнання з МПС на стадії проектування.

Мета роботи: 1 – отримання простих для аналізу математичних моделей жорсткості МПС типу біглайд з метою визначення та аналізу параметрів жорсткості у робочому просторі залежно від формоутворюючої конфігурації; 2 – визначення параметрів жорсткості біглайду у сингулярних конфігураціях; 3 – дослідження умов виникнення квазінульової та від'ємної жорсткості МПС.

Об'єкт дослідження. ПП на основі МПС за схемою біглайду у загальному вигляді складається з рухомої частини (платформи) і нерухомої (основи), з'єднаних між собою штангами постійної довжини (рис. 1). Штанги мають на кінцях циліндричні шарніри, один з яких має можливість поступального руху відносно основи [5, 6]. Платформа та її елементи здійснюють плоский рух. Створенням і дослідженням подібних механізмів займаються не лише виробничі фірми, але й наукові



Рис. 1. Модель одновісного двокоординатного біглайду

лабораторії університетів Мічигану, Мериленду, Генуї, Цюріха, Токіо, Лозани та ін., в результаті запропоновано понад 30 варіантів схем компонування [1].

Серед зразків діючих верстатів з МПС типу біглайд, що містять два паралельних кінематичних ланцюги з двома керованими приводами, розташованими по одному в кожному ланцюгу, відомо верстат типу SPECHT Xperimental (ФРН) з горизонтальним розташуванням шпинделя [1]. При цьому конструкція містить вертикальні паралельні напрямні і рухомий стіл, що рухається перпендикулярно площині напрямних. Така компоновка верстату забезпечує максимальну швидкість вихідної ланки (шпинделя) до 2 м/с, а пришвидшення до — 15 м/с². За таким самим принципом побудовано верстат моделі Trijoint 900 Н з горизонтальним розташуванням шпинделя, розроблений у Чеському технічному університеті (м. Прага) і виготовлений фірмою Kovosvit MAS [1]. Гарантована точність позиціонування біглайдів, за певних умов застосування, сягає 40...50 мкм.

Математичні моделі жорсткості одновісного двокоординатного біглайду. Структура МПС на основі біглайду складається з двох поступально рухомих опорних шарнірів A_1 і A_2 , які рухаються по напрямних згідно з програмою, заданою узагальненими координатами (рис. 2)

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t).$$
 (1)

Конфігурація біглайду визначається узагальненими координатами (див. рис. 2)

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = x - \sqrt{l^2 - y^2}, \\ q_2 = x + \sqrt{l^2 - y^2} \end{array} \right\}.$$
 (2)

Геометрія деформацій. Штанги $A_1B=A_2B=l$ з'єднані шарнірно у точці *B* с координатами *x* і *y*. Пунктиром зображена конфігурація біглайду після прикладання сил F_x , і F_y (рис. 2). Із геометрії спільності деформацій знайдено залежність деформацій x_1, x_2 приводів біглайду від переміщень *u* і *v* точки *B*:

$$x_{1} = -u - \sqrt{l^{2} - y^{2}} + \sqrt{l^{2} - (-y + v)^{2}},$$

$$x_{2} = u - \sqrt{l^{2} - y^{2}} + \sqrt{l^{2} - (-y + v)^{2}}.$$
(3)

Вважаючи, що переміщення u і v значно менші координати y біглайду (u << y), використовуючи розкладання (3) у ряд Тейлора за степенями деформацій



Рис. 2. Схема пружних деформацій одноосного двокоординатного біглайду

u і v та беручи до уваги лише декілька членів розкладу, отримано деформації x_1 і x_2 та їхні варіації у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -y/\sqrt{l^2 - y^2} \\ 1 & -y/\sqrt{l^2 - y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4)$$
$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix},$$

де *J* – якобіан функцій конфігурації біглайду.

Умови рівноваги біглайду. Після деформацій біглайд залишається в рівновазі, тому використано принцип віртуальних переміщень Лагранжа.

При можливому переміщенні $\delta u \neq 0$ (*v*=const, $\delta v=0$), а потім аналогічно при можливому переміщенні $\delta v \neq 0$ (*u*=const, $\delta u = 0$) складено суми можливих робіт

$$F_{x}\delta u - c_{1}x_{1}\delta x_{1} - c_{2}x_{2}\delta x_{2} = 0, F_{y}\delta v - c_{1}x_{1}\delta x_{1} - c_{2}x_{2}\delta x_{2} = 0$$

де $F_1 = c_1 x_1$, $F_2 = c_2 x_2 - лінійні сили пружності приводів; <math>c_1, c_2 -$ коефіцієнти жорсткостей приводів.

Після підстановки і скорочення на δu та δv отримані матричні рівняння для сил F_x і F_y :

$$\begin{pmatrix} F_{x} \\ F_{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1} + c_{2} & (c_{1} - c_{2})y / \sqrt{l^{2} - y^{2}} \\ (c_{1} - c_{2})y / \sqrt{l^{2} - y^{2}} & (c_{1} + c_{2})y^{2} / (l^{2} - y^{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} F_{x} \\ F_{y} \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J^{\mathrm{T}} K_{0} J \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad K_{0} = \begin{pmatrix} c_{1} & 0 \\ 0 & c_{2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де K_0 – діагональна матриця зосередженних жорсткостей приводів біглайду, $K = J^{T}K_0J$ – матриця жорсткості біглайду.

Вважаючи $c_1 = c_2 = c$, отримано

$$K = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2cy^2 / (l^2 - y^2) \end{pmatrix}.$$



Рис. 3. Сингулярна конфігурація одноосного двокоординатного біглайду (у=0, б=0)



Рис. 4. Графік залежності відносної жорсткості біглайду від конфігурації

Відносний коефіцієнт жорсткості біглайду у вертикальному напрямі має вигляд

$$c_{yy}/2c = y^2/(l^2 - y^2) = \operatorname{ctg}^2 \alpha$$
. (6)

Для біглайду сингулярною є конфігурація ($y=0, \alpha=90^{\circ}$) (рис. 3), в якій за формулою (6) відносна жорсткість біглайду дорівнює нулю, тобто конструкція має квазінульову жорсткість (рис. 4).

Друга сингулярна конфігурація ($\alpha = \pm 90^{\circ}$) відповідає положенню механізму, в якому обидві штанги вертикальні і відносна жорсткість біглайду нескінченно зростає.

У сингулярних конфігураціях приводи МПС спричиняють значні перевантаження ланок і шарнірів, зокрема, особливо небезпечного ударного характеру.

Врахування деформацій штанг. За певних умов навантаження жорсткість штанг можна вважати переважаючою, а деформаціями приводів можна знехтувати.

Після прикладання статичних сил F_x і F_y точка B(x, y) отримає переміщення u і v внаслідок деформацій x_3 і x_4 штанг. З геометричних співвідношень (рис. 5) знайдено деформації штанг у вигляді:

$$x_{3} = -l_{1} + \sqrt{(y - v)^{2} + (u + \sqrt{l_{1}^{2} - y^{2}})^{2}},$$

$$x_{4} = -l_{2} + \sqrt{(y - v)^{2} + (-u + \sqrt{l_{1}^{2} - y^{2}})^{2}}.$$
(7)

Розкладаючи (7) в ряд Тейлора за степенями u і v, отримано деформації (x_3, x_4) та їхні варіації:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - y^2 / l_1^2} & -y / l_1 \\ -\sqrt{1 - y^2 / l_2^2} & -y / l_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$
(8)



Рис. 5. Схема деформацій біглайду

$$\begin{pmatrix} \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix},$$

де J – якобіан функцій конфігурації біглайду.

Умови рівноваги біглайду визначаються відповідно до принципу віртуальних переміщень Лагранжа.

Лінійні сили пружності штанг визначаються так:

$$F_3 = c_3 x_3, \quad F_4 = c_4 x_4,$$

де c₃, c₄ – коефіцієнти жорсткості штанг.

Переміщення *u* і *v* незалежні, тому при можливому переміщенні $\delta u \neq 0$ (*v*=const, $\delta v=0$), а потім при можливому переміщенні $\delta v \neq 0$ (*u*=const, $\delta u=0$) складено суми можливих робіт:

$$F_x \delta u - c_3 x_3 \delta x_3 - c_4 x_4 \delta x_4 = 0,$$

$$F_y \delta v - c_3 x_3 \delta x_3 - c_4 x_4 \delta x_4 = 0$$

Після підстановки і скорочення на ди і ду знайдено

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J^{\mathsf{T}} K_0 J \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де K_0 – діагональна матриця коефіцієнтів жорсткості штанг; $K = J^{\mathrm{T}} K_0 J$ – матриця коефіцієнтів жорсткості біглайду.

За умови $c_3 = c_4 = c$, $l_1 = l_2 = l$ матриця K має вигляд

$$K = 2c \begin{pmatrix} 1 - y^2 / l^2 & 0 \\ 0 & y^2 / l^2 \end{pmatrix} = 2c \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Математичні моделі жорсткості двовісного двокоординатного біглайду (рис. 6).

Конфігурація біглайду визначається так (рис. 7):

$$q_1 = x - \sqrt{l_1^2 - (b_0 - y)^2} = f_1(x, y),$$

$$q_2 = x - \sqrt{l_2^2 - y^2} = f_2(x, y)$$
(10)

де q_1 і q_2 – узагальнені координати; х і у координати центрального шарніра В біглайду; b_0 – відстань між



Рис. 6. Модель двоосного двокоординатного біглайду



Рис. 7. Схема деформацій двоосного двокоординатного біглайду

напрямними біглайду; u і v – пружні переміщення у напрямах OX і OV відповідно; l_1 і l_2 – довжини ланок; x_1 і x_2 – деформації приводів; символ " δ " (рис. 7) означає варіацію; F_x і F_y – сили, прикладені у шарнірі B; F_1 і F_2 – сили пружності приводів.

Геометрія сумісності деформацій.

$$x_{1} = u + \sqrt{l_{1}^{2} - (b_{0} - y)^{2}} - \sqrt{l_{1}^{2} - (b_{0} - y - v)^{2}},$$

$$x_{2} = u + \sqrt{l_{2}^{2} - y^{2}} - \sqrt{l_{2}^{2} - (y + v)^{2}}$$

$$(11)$$

Розкладаючи в ряд Тейлора за степенями пружних переміщень *u* і *v*, знайдено

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_0 - y}{\sqrt{l_1^2 - (b_0 - y)^2}} \\ 1 & \frac{y}{\sqrt{l_2^2 - y^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$
(12)

Зауважимо, що квадратна матриця у рівнянні (12) є якобіаном функцій конфігурації (10) біглайду.

Варіації пружних переміщень (12) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$$

Умови рівноваги біглайду. Використовуючи ринцип віртуальних переміщень Лагранжа отримано матричні рівняння для сил F_x і F_y :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = J^{\mathrm{T}} K_0 J \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де K_0 – діагональна матриця коефіцієнтів лінійних зосереджених жорсткостей приводу.

Матриця коефіцієнтів жорсткості біглайду у напрямах *OX* і *OV* визначається за частковими похідними від силових залежностей (13):

$$\begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial u} & \frac{\partial F_y}{\partial u} \\ \frac{\partial F_x}{\partial v} & \frac{\partial F_y}{\partial v} \end{pmatrix} = J^{\mathrm{T}} K_0 J$$

де діагональні елементи c_{xx} і c_{yy} визначають парціальні жорсткості біглайду, недіагональні c_{xy} і c_{yx} – коефіцієнти впливу вертикальної і горизонтальної жорсткостей.

Враховуючи (13) знайдено:

$$c_{xy} = c_{yx} = -\frac{c_1(b_0 - y)}{\sqrt{l_1^2 - (b_0 - y)^2}} + \frac{c_2 y}{\sqrt{l_2^2 - y^2}},$$

$$c_{xx} = c_1 + c_2, \quad c_{yy} = \frac{c_1(b_0 - y)^2}{l_1^2 - (b_0 - y)^2} + \frac{c_2 y^2}{l_2^2 - y^2}$$
(14)

Враховуючи геометричні залежності (див. рис. 7), отримано

$$c_{xy} = c_{yx} = -c_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + c_2 \operatorname{tg} \alpha_2, c_{xx} = c_1 + c_2, \quad c_{yy} = c_1 \operatorname{tg}^2 \alpha_1 + c_2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \right\}.$$
 (15)

Кути α, і α, зв'язані співвідношенням

$$l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 = b_0, \Longrightarrow \sin \alpha_1 = b_0 / l_1 - l_2 / l_1 \sin \alpha_2.$$

Після підставлення у (15), за умови $c_1 = c_2 = c$, знайдено складові відносної жорсткості

$$\frac{c_{xy}}{c} = \frac{c_{yx}}{c} = \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 - \gamma_0^2}}, \qquad (16)$$

$$\frac{c_{yy}}{c} = \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + \frac{\gamma_0^2}{1 - \gamma_0^2}, \qquad \gamma_0 = \frac{b_0}{l_1} - \frac{l_2}{l_1} \sin \alpha_2$$

Зауважимо, що коефіцієнти жорсткості біглайду (16) змінюються залежно тільки від кута α_2 .

Аналіз коефіцієнтів жорсткості біглайду вказує на наявність сингулярних конфігурацій, у яких $l_1 = b_0 - y$ і $l_2 = y$, знаменники в (14) наближаються до нуля і коефіцієнти жорсткості нескінченно зростають (рис. 8).



Рис. 8. Сингулярні конфігурації біглайду: а – при $l_1 = b_0 - y$; б – $l_2 = y$



Рис. 9. Сингулярна конфігурація біглайду ($\alpha_1 = \alpha_2$)



Рис. 10. Діаграми відносної жорсткості біглайду: крива 1 відповідає c_{yy}/c , 2 – c_{xy}/c за умов $b_0/l_1 = 0.9$; $l_2/l_1 = 1.2$; 3 – c_{yy}/c , 4 – c_{xy}/c за умов $b_0/l_1 = 0.3$; $l_2/l_1 = 1.2$;

Для третьої сингулярної конфігурації (рис. 9) кути нахилу штанг до осі *ОХ* однакові: $\alpha_1 = \alpha_2$. З формул (15) за умови $c_1 = c_2$ біглайд набуває квазінульову жорсткість ($c_{xy} = c_{yx} = 0$) і при подальшому переміщенні – від'ємну жорсткість (рис. 10).

Аналіз діаграм складових відносної жорсткості біглайду (рис.10) вказує на наявність сингулярних конфігурацій: $\alpha_2 = \alpha_1$; $\alpha_2 = 20^\circ$; $\alpha_2 = 90^\circ$. При зміні кута від 10° до 80° коефіцієнти жорсткості змінюються у 100 разів. Істотний вплив на жорсткість біглайду має також відстань між напрямними b_0 .

Побудовані діаграми вказують на можливість керування жорсткістю біглайду у широких межах, запобігати прояві квазінульової жорсткості, а також сингулярних конфігурацій з надвисокими жорсткостями, які супроводжуються інтенсивними ударними процесами.

Висновки. 1. Розроблено методику визначення пружних сил і параметрів жорсткості МПС на основі рівнянь спільності деформацій з використанням принципу Лагранжа.

Отримано матриці жорсткості одновісного біглайду
 урахуванням пружності приводів і деформацій штанг;

виконано аналіз зміни коефіцієнтів жорсткості біглайду для широкого спектру конфігурацій.

3. В результаті аналізу матриць жорсткості біглайду і дослідження функцій її елементів від положення механізму визначено умови виникнення квазінульової і від'ємної жорсткості для сингулярних конфігурацій.

4. Встановлено, що в залежності від конфігурації біглайду, значення коефіцієнтів жорсткості можуть змінюватись більше, ніж у 100 разів.

5. Розроблена методика і отримані результати забезпечують можливість оптимального пристосування змінних параметрів жорсткості біглайду до технологічного процесу з метою забезпечення потрібної точності оброблення.

Література

1. Кузнецов Ю.М. Компоновки верстатів з механізмами паралельної структури / Ю.М. Кузнецов, Д.О. Дмитрієв, Г.Ю. Діневич. – Херсон: ПП Вишемирський В.С., 2009. – 456 с.

2. Кириченко А.М. Моделювання жорсткості верстатагексапода / А.М. Кириченко // Збірник наукових праць Кіровоградського національного технічного університету, вип. 20. – Кіровоград: КНТУ, 2008. – С. 122 – 126.

3. Вайнштейн И.В. Экспериментальное исследование статической жесткости пятикоординатного фрезерного станка с параллельной кинематикой / И.В. Вайнштейн, Н.А. Серков, Р.О. Сироткин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – № 5. – С. 102 – 109.

4. Струтинський В.Б. Теоретичний аналіз жорсткості шестикоординатного механізму паралельної структури / В.Б. Струтинський, А.М. Кириченко // Вісник Націон. техн. ун-ту України «КПІ», серія: машинобудування. – 2009. – № 57. – С. 198 – 207.

5. Струтинський В.Б. Кінематичні залежності верстата з механізмом паралельної структури «біглайд» / В.Б. Струтинський, А.М. Кириченко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2008. – № 1(50). –С. 45 – 59.

6. *Yaglinsky V.P.* Kinematics of robots with parallel structure / V.P. Yaglinsky, S. Rost, D.M. Chlyzov // MOTROL, MOTORIZATION AND POWER INDUSTRY IN AGRICULTURE, Volume 10A. Lublin, 2008. – P. 118–124.

Отримана 20.04.10

V. Yaglinsky

Stiffness parameters of biglides in a singular configurations Odesa National Polytechnical University, Odesa

Based on the strain compatibility equation using the Lagrange principle defined elastic strength and stiffness parameters of uniaxial and biaxility two coordinate biglides. The analysis of matrix stiffness biglide and research functions of the position of its elements are determined, the mechanism of negative quasi-zero and rigidity for singular configurations.. The method and the results allow the optimal adjustment of variable stiffness parameters biglide to process to ensure the required accuracy of processing.