УДК 539.3

ДО ПОБУДОВИ РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ ТА РОЗТАШУВАННЯ

Т. Шопа

Канд. фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів

Розглянуто задачу про усталені поперечні коливання шарнірно спертої ортотропної пластини з множиною отворів довільної форми розташування та з різними типами граничних умов на їхніх контурах у рамках теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Розв’язок ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь та секвенціальному підході до побудови функції Гріна. Задачу зведено до систем інтегральних рівнянь, які розв’язано методом колокацій.

ортотропна пластина, отвір, функція Гріна, секвенціальний підхід, коливання, частота вільних коливань

Вступ. Основні відомі результати, які тісно пов’язані з цією тематикою, отримано в рамках класичної теорії [1 — 6]. Відомі праці, в яких знайдено розв’язки задач про коливання анізотропних шарнірно спертих пластин з отворами та включеннями в рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви, однак не враховує повороти навколо нормалі до серединної поверхні [7, 8]. У цій статті розв’язано задачу про коливання ортотропної пластини з множиною отворів довільної конфігурації та крайових умов на їхніх контурах у рамках теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні.

Постановка задачі. Розглянемо задачу про усталені поперечні коливання шарнірно спертої ортотропної пластини, яка містить N отворів довільної форми та розташування, контури яких є криві $L^{(j)}, j=1...N$. Нехай осі ортотропії збігаються з відповідними напрямами сторін пластини і пластина працює в режимі усталених коливань за гармонічним законом у часі.

Використовуватимемо такі позначення: $\vec{n}, \vec{\tau} -$ нормальний і дотичний вектор вздовж деякого напряму; $E_1, E_2 -$ модулі Юнга матеріалу; $G_{12}, G_{13}, G_{23} -$ модулі зсуву матеріалу; $\nu_{12}, \nu_{21} -$ коефіцієнти Пуасона матеріалу; $\rho -$ густина матеріалу; $l_1, l_2, 2h -$ довжини сторін і товщина пластини відповідно; $q_3, m_i -$ компоненти зовнішнього навантаження; $w -$ прогин панелі; $\gamma_{in}, \gamma_{i\tau} -$ нормальні й тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні; $Q_n -$ нормальна компонента перерізувальної сили; $M_n, M_\tau -$ нормальні й тангенціальні компоненти моменту.

Крайові умови за шарнірного спирання на торцях оболонки — такі:

$$w = 0,\ M_n = 0,\ \gamma_\tau = 0 \tag{1}$$

при $\alpha_1 = 0,\ \alpha_1 = l_1$

Розглянемо два типи крайових умов на контурах:

А. Задані розподілені переміщення:

$$\gamma_n^{(i)} = \gamma_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \gamma_\tau^{(i)} = \gamma_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),$$
$$w_n^{(i)} = w_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad i = 1,....,N. \tag{2}$$

Б. Задані розподілені зусилля

$$Q_n^{(i)} = Q_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),$$
$$M_n^{(i)} = M_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),$$
$$M_\tau^{(i)} = M_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t) \quad i = 1,....,N. \tag{3}$$

Розв'язувальна система рівнянь. Дослідження проведемо з використанням рівнянь теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Рівняння руху пластини, що враховують нормальну компоненту інерційної сили для випадку поперечних коливань, мають вигляд:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q,$$
$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i \quad (i = 1, 2). \tag{4}$$

На основі розподілу напружень та переміщень

$$U_i = u_i + \gamma_i \alpha_3, \; U_3 = w, \; \sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$
$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3 \quad (-h \le \alpha_3 \le h),$$
$$\sigma_{i3} = \begin{cases} \dfrac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \quad (i, j = 1, \; 2, \; i \ne j). \tag{5}$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду:

$$M_{11} = D_1\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \nu_{12}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right), M_{22} = D_2\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \nu_{21}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}\right),$$
$$M_{12} = M_{21} = D_{12}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}\right),$$
$$Q_1 = \Lambda_1\left(\gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1\right), \; Q_2 = \Lambda_2\left(\gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2\right),$$
$$D_i = \frac{2h^3 E_i}{3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \; D_{12} = \frac{2h^3 G_{12}}{3}, \; \Lambda_i = 2hG_{i3}. \tag{6}$$

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль визначаємо з формул:

$$\gamma_n = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2, \; \gamma_\tau = \tau_1\gamma_1 + \tau_2\gamma_2, \; w,$$
$$M_n = \left(M_{11}n_1 + M_{12}n_2\right)n_1 + \left(M_{21}n_1 + M_{22}n_2\right)n_2,$$
$$M_\tau = \left(M_{11}n_1 + M_{12}n_2\right)\tau_1 + \left(M_{21}n_1 + M_{22}n_2\right)\tau_2,$$
$$Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2. \tag{7}$$

Після підстановки фізичних співвідношень (6) у рівняння руху (4) система ключових динамічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$[\mathbf{L}]\{U\} = -\{P\}, \tag{8}$$
$$\{U\} = \{w, \gamma_1, \gamma_2\}, \; \{P\} = \{q, m_1, m_2\},$$
$$\mathbf{L}_{11} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$
$$\mathbf{L}_{22} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}_{33} = D_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2,$$
$$\mathbf{L}_{12} = -\mathbf{L}_{21} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \mathbf{L}_{13} = -\mathbf{L}_{31} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$
$$\mathbf{L}_{23} = (D_1\nu_{12} + D_{12})\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$
$$\mathbf{L}_{32} = (D_{12} + D_2\nu_{21})\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}.$$

У результаті отримуємо дві крайові задачі: задача (1), (2), (8) та задача (1), (3), (8).

Побудова функції Ґріна задачі. Функцію Ґріна для вищезгаданих крайових задач знайдемо за допомогою методу Фур'є та секвенціального подання дельта-функції у вигляді послідовності дельтаподібних функцій. Подамо в системі рівннянь (8):

$$q = \mathrm{T}_3^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right)\sin(\omega_0 t),$$
$$m_1 = \mathrm{T}_4^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right)\sin(\theta_0 t),$$
$$m_2 = \mathrm{T}_5^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right)\sin(\omega_0 t), \tag{9}$$

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{|\xi - \xi^r|}{\varepsilon}\right), & |\xi - \xi^r| \le \varepsilon, \\ 0, & |\xi - \xi^r| > \varepsilon, \end{cases}$$

де $g(\varepsilon)\,(0 \le \varepsilon \le 1) -$ спадна гладка функція,

$$g(1) = 0, \; \int_0^1 g(\xi)d\xi = 1.$$

Розкладемо співвідношення (9) у ряди Фур'є:

$$q_3^r = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_1^r C_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}(\alpha \quad),$$

$$m_1^r = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_2^r C_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\right),$$

$$m_2^r = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_3^r C_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right). \qquad (10)$$

де

$$\Phi_{km}^{cs}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2),$$
$$\Phi_{km}^{sc}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\cos(\lambda_{2m}\alpha_2),$$
$$\Phi_{km}^{ss}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2);$$
$$\Phi_{km}^{cc}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k}\alpha_1)\cos(\lambda_{2m}\alpha_2),$$
$$\lambda_{1k} = \frac{k\pi}{l_1}, \lambda_{2m} = \frac{m\pi}{l_2},\ l_2 = R\psi,\ l_1 = l,$$
$$C_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{2m}\varepsilon),$$

$\varphi-$ вагова функція, яка визначає тип узагальненого підсумовування, що відповідає певному вибору базової функції дельтаподібної послідовності.

Розв'язки шукаємо у такій формі:

$$w\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} w_{\varepsilon km}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\sin(\omega_0 t),$$

$$\gamma_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{1\varepsilon km}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\sin(\omega_0 t),$$

$$\gamma_2\left(\alpha,\alpha^r\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{2\varepsilon km}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\sin(\omega_0 t). \qquad (11)$$

Підставимо співвідношення (9), розкладені в ряди (10), та ряди (11) у систему ключових рівнянь (8). Отримаємо сукупність систем лінійних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів невідомих функцій, яку розв'яжемо методом Крамера. Часову координату у випадку усталених гармонічних коливань мржна відокремити.

Функція Гріна задачі в аналітичному вигляді набуває форми

$$U\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} U\left(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}^{(1)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}_{\mathbf{km}}^{(1)}\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{T^r\right\}\sin(\omega_0 t); \qquad (12)$$

$$U\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \left\{w(\alpha,\alpha^r,t), \gamma_1(\alpha,\alpha^r,t), \gamma_2(\alpha,\alpha^r,t)\right\};$$

$$\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^r\right)\right] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right) \end{bmatrix};$$

$$\left[\mathbf{U}_{\mathbf{km}}\right] = \begin{bmatrix} w_{\varepsilon km}^1 & w_{\varepsilon km}^2 & w_{\varepsilon km}^3 \\ \gamma_{1\varepsilon km}^1 & \gamma_{1\varepsilon km}^2 & \gamma_{1\varepsilon km}^3 \\ \gamma_{2\varepsilon km}^1 & \gamma_{2\varepsilon km}^2 & \gamma_{2\varepsilon km}^3 \end{bmatrix},$$

$$u_{1km}^1 = \frac{1}{\det\left|\mathbf{L}^{\mathbf{km}}\right|}\det\begin{vmatrix} \mathbf{L}_{22}^{km} & \mathbf{L}_{23}^{km} \\ \mathbf{L}_{32}^{km} & \mathbf{L}_{33}^{km} \end{vmatrix}, \ . \ . \ . \ ,$$

$$\mathbf{L}_{11}^{km} = -\Lambda_1\lambda_{1k}^2 - \Lambda_2\lambda_{2m}^2 + 2\rho h\omega_0^2,$$

$$\mathbf{L}_{22}^{km} = -D_1\lambda_{1k}^2 - D_{12}\lambda_{2m}^2 - \Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}_{33}^{km} = D_{12}\lambda_{1k}^2 - D_2\lambda_{2m}^2 - \Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{23}^{km} = -\left(D_1\nu_{12} + D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{32}^{km} = -\left(D_2\nu_{21} + D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{12}^{km} = \mathbf{L}_{21}^{km} = -\Lambda_1\lambda_{1k},\ \mathbf{L}_{13}^{km} = \mathbf{L}_{31}^{km} = -\Lambda_2\lambda_{2m}.$$

Зведення основних крайових задач до систем інтегральних рівнянь і розв'язування методом колокацій. Для зведення крайової задачі до інтегральних рівнянь, коли на отворі задаються переміщення, розглянемо узагальнений контур $L = L^{(1)} \cup L^{(2)} ..... \cup L^{(N)}$ і такі функції на ньому:

$$T(\xi) = \begin{cases} T^{(1)}(\xi),\ \xi\in L^{(1)}, T^{(1)\mathrm{T}}(\xi) = \left\{T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}\right\}^T; \\ T^{(2)}(\xi), \xi\in L^{(2)}, T^{(2)\mathrm{T}}(\xi) = \left\{T_1^{(2)}, T_2^{(1)}, T_3^{(2)}\right\}^T; \\ \vdots \\ \vdots \\ T^{(N)}(\xi),\ \xi\in L^{(N)}, T^{(2)\mathrm{T}}(\xi) = \left\{T_1^{(N)}, T_2^{(1)}, T_3^{(N)}\right\}^T; \end{cases}$$

$$U_0(\alpha) = \begin{cases} U_0^{(1)}(\alpha), & \alpha\in L^{(1)}; \\ U_0^{(2)}(\alpha), & \alpha\in L^{(2)}; \\ \vdots \\ \vdots \\ U_0^{(N)}(\alpha), & \alpha\in L^{(N)}, \end{cases}$$

де

$$U_0^{(1)}(\alpha) = \left\{\ w_{n0}^{(1)}(\alpha),\ \gamma_{n0}^{(1)}(\alpha),\ \gamma_{\tau 0}^{(1)}(\alpha)\right\}^T;$$
$$U_0^{(2)}(\alpha) = \left\{\ w_{n0}^{(2)}(\alpha),\ \gamma_{n0}^{(2)}(\alpha),\ \gamma_{\tau 0}^{(2)}(\alpha)\right\}^T;$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$U_0^{(N)}(\alpha) = \left\{\ w_{n0}^{(N)}(\alpha),\ \gamma_{n0}^{(N)}(\alpha),\ \gamma_{\tau 0}^{(N)}(\alpha)\right\}^T.$$

Використовуючи знайдену функцію Ґріна (12), граничні умови на отворах (6), фізичні співвідношення

(3), вирази для нормальних і дотичних компонент переміщень та зусиль (4), отримуємо систему $3N$ інтегральних рівнянь:

$$U_0(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{U})}(\alpha)\right]\times$$

$$\times\left[\mathbf{E_{km}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E_{km}}(\xi)\right]\left\{T\ \ (\xi)\right\}dl(\xi); \qquad (13)$$

$$\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{U})}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix} w_{1n}(\alpha) & w_{2n}(\alpha) & w_{3n}(\alpha)\\ \gamma_{1n}(\alpha) & \gamma_{2n}(\alpha) & \gamma_{3n}(\alpha)\\ \gamma_{1\tau}(\alpha) & \gamma_{2\tau}(\alpha) & \gamma_{3\tau}(\alpha)\end{bmatrix},$$

$$w_{in}(\alpha)=w^i_{\varepsilon km};$$

$$\gamma_{1n}(\alpha)=n_1(\alpha)\gamma^i_{1\varepsilon km}+n_2(\alpha)\gamma^i_{2\varepsilon km},$$

$$\gamma_{1\tau}(\alpha)=\tau_1(\alpha)\gamma^i_{1\varepsilon km}+\tau_2(\alpha)\gamma^i_{2\varepsilon km},$$

Аналогічно на основі знайденої функції Ґріна (12) отримуємо систему інтегральних рівнянь у випадку, коли на отворі задані зусилля. Для цього вводимо в розгляд функцію на узагальненому контурі L:

$$F_0(\alpha)=\begin{cases} F_0^{(1)}(\alpha), & \alpha\in L^{(1)};\\ F_0^{(2)}(\alpha), & \alpha\in L^{(2)};\\ \qquad\vdots & \\ \qquad\vdots & \\ F_0^{(N)}(\alpha), & \alpha\in L^{(N)},\end{cases}$$

де

$$F_0^{(1)}(\alpha)=\left\{\,Q_{n0}^{(1)}(\alpha),\,M_{n0}^{(1)}(\alpha),\,M_{\tau 0}^{(1)}(\alpha)\right\}^T;$$

$$F_0^{(2)}(\alpha)=\left\{Q_{n0}^{(2)}(\alpha),\,M_{n0}^{(2)}(\alpha),\,M_{\tau 0}^{(2)}(\alpha)\right\}^T;$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$F_0^{(N)}(\alpha)=\left\{\,Q_{n0}^{(N)}(\alpha),\,M_{n0}^{(N)}(\alpha),\,M_{\tau 0}^{(N)}(\alpha)\right\}^T,$$

і отримуємо $3N$ інтегральних рівнянь:

$$\left\{F_0(\alpha)\right\}=\frac{1}{2}\left\{T(\alpha)\right\}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{P})}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E_{km}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E_{km}}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi); \qquad (14)$$

$$\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{P})}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix} Q_{1n}(\alpha) & Q_{2n}(\alpha) & Q_{3n}(\alpha)\\ M_{1n}(\alpha) & M_{2n}(\alpha) & M_{3n}(\alpha)\\ M_{1\tau}(\alpha) & M_{2\tau}(\alpha) & M_{3\tau}(\alpha)\end{bmatrix},$$

$$M_{in}=D_1n_1^2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{1k}\gamma^i_{1km}-\nu_{12}\lambda_{2m}\gamma^i_{2km})+$$
$$+2D_{12}n_1n_2\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}\gamma^i_{1km}+\lambda_{1k}\gamma^i_{2km}\right)+$$
$$+D_2n_2^2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{2m}\gamma^i_{2km}-\nu_{21}\lambda_{1k}\gamma^i_{1km}),$$

$$M_{i\tau}=D_1n_1\tau_1\Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{1k}\gamma^i_{1km}-\nu_{12}\lambda_{2m}\gamma^i_{2km})+$$
$$+D_{12}(n_1\tau_2+n_2\tau_1)\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}\gamma^i_{1km}+\lambda_{1k}\gamma^i_{2km}\right)+$$
$$+D_2n_2\tau_2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{2m}\gamma^i_{2km}-\nu_{21}\lambda_{1k}\gamma^i_{1km}),$$

$$Q_{in}=\Lambda_1n_1\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(\gamma^i_{1km}+\lambda_{1k}w^i_{km}\right)+$$
$$\Lambda_2n_2\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\gamma^i_{2km}+\lambda_{2m}w^i_{km}\right).$$

Для розв'язання систем інтегральних рівнянь використовуємо метод колокацій. Для цього контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ - кількість відрізків розбиття j-го контуру, $\alpha^{(j)r}$ — середини відрізків розбиття j-го контуру, $r=1\ldots S^{(j)}$). На кожному з прямолінійних відрізків контурів для фіктивних зусиль задаємо такий розподіл:

$$T^{(i)r}(\xi)=T^{(i)r}\delta\left(\alpha^{(i)r},\xi\right)$$

і мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій α^q.

У результаті система, що відповідає системі інтегральних рівнянь (13), міститиме

$$3N\sum_{j=1}^{N}S^{(j)}$$

лінійних алгебричних рівнянь і матиме вигляд

$$\left\{U_0\left(\alpha^q\right)\right\}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{U})}\left(\alpha^q\right)\right]\times$$

$$\times\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}, \qquad q=1....\sum_{j=1}^{N}S^{(j)}.$$

Система лінійних алгебричних рівнянь, що відповідає системі інтегральних рівнянь (14), буде такою:

$$\left\{F_0\left(\alpha^q\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{T\left(\alpha^q\right)\right\}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{P})}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\},$$

$$q=1....\sum_{j=1}^{N}S^{(j)}.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування рівності нулю визначників відповідних систем лінійних алгебричних рівнянь. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напряму з нормаллю $\vec{n}(\alpha)=\left(n_1(\alpha),n_2(\alpha)\right)$ і дотичною $\tau(\alpha)=\left(\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)\right)$ на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на контурі отвору отримуємо з таких формул:

$$\begin{Bmatrix} w_n(\alpha)\\ \gamma_n(\alpha)\\ \gamma_\tau(\alpha)\end{Bmatrix}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}C_{km}(\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{U})}\left(\alpha\;\right)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}\left(\alpha\;\right)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^{r}\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\};$$

$$\begin{Bmatrix} Q_n(\alpha) \\ M_n(\alpha) \\ M_\tau(\alpha) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{P})}\left(\alpha\;\right)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}\left(\alpha\right)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^{r}\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}.$$

Висновки. Комбінуючи відповідні, отримані в роботі, інтегральні рівняння, можна розглядати випадки різних типів крайових умов на різних контурах, а також різні випадки мішаних крайових умов у межах одного контру. В рамках знайденого розв'язку можна розглядати випадки, коли контур отвору містить кутові точки й вироджується в тріщину, бо на етапі числового розв'язування методом колокацій проводиться дискретизація його контуру.

Література

1. *Nagaya K.* Transverse vibration of a rectangular plate with the eccentric inner boundary // Int. J. Solids and Structures. – 1980. – **16**. – P. 1007–1016.
2. *Takahashi S.* Vibration of rectangular plates with circular holes // Bulletin of JSMA. – 1958. – **4**. – P. 380–385.
3. *Hegharty R. F., Ariman T.* Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes // Int. J. Solids and Structures. – 1975. – **11**, № 7/8-1. – P. 895–906.
4. *Aksu G., Ali R.* Determination of dynamic characteristics of rectangular plates with cutouts using a finite difference formulation // Journal of Sound and Vibration. – 1976. – **44**, № 1. – P. 147–158.
5. *Li N., Gorman D. J.* Free vibration analysis of simply supported rectangular plates with internal line support along diagonals // Journal of Sound and Vibration. – 1993. – **165,** № 2. – P. 361–368.
6. *Shastry B. P., Rao G. V.* Free vibration of thin rectangular plates with arbitrary oriented stiffeners / B. P. Shastry, // Computers and Structures. – 1977. – **7,** № 5. – P. 627–629.
7. *Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок. — Львів: Інтелект-Захід. – 2007. – 240 с.
8. *Sukhorolsky M., Shopa T.* The vibration of rectangular orthotropic plate with massive / Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. – 2008. – **15. –** P. 369-376.

Отримана 21.03.10

T. Shopa

To the construction of the solution of the problem on the vibration of the orthotropic cylindric non-shallow panel with the domain of the cutouts of the arbitrary configuration

In the framework of the shell theory that takes into consideration the shear displacements and the rotation angles around the normal to the middle surface of the shell the problem on the vibration of simply supported orthotropic cylindrical non-shallow plate with the domain of cutouts of the arbitrary form, location, and types of boundary conditions on their contours is considered in the paper. Solution is built on the base of the sequential approach to the construction of the Green function. The boundary value problems are reduced to systems of integral equations that are solved using the collocation method.