

УДК 539.3

І. Ольховий

Доцент, канд. техн. наук,  
Львівський державний університет  
безпеки життєдіяльності,  
м. Львів

Х. Ліщинська

Канд. техн. наук,  
Національний університет  
«Львівська політехніка»,  
м. Львів

## ПРО ВПЛИВ ДИНАМІЧНИХ СИЛ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИКЛІВ НАПУЖЕНЬ ПРИ ПОВТОРНО- ЗМІННОМУ НАВАНТАЖЕННІ БАЛОК

*Розглянуто питання визначення коефіцієнта асиметрії циклів при випробуваннях на повторно-змінний згин балок на двох опорах з врахуванням динамічних сил інерції, які виникають при таких випробуваннях. Показано, що врахування цих сил приводить до зменшення коефіцієнта асиметрії циклів.*

цикл, коефіцієнт асиметрії, динамічні сили, згин балок

При оцінюванні втомної міцності балок, що працюють при повторно-змінних навантаженнях, значний вплив має цикл напружень, при якому працює балка. Встановлення дійсного циклу напружень і точне визначення характеристик циклу є актуальною задачею. Процес і час руйнування балки та величина межі витривалості значною мірою залежать від характеристики асиметрії циклу. Від точності визначення останньої залежить величина розрахованої межі витривалості і коефіцієнта запасу відносно втомного руйнування.

При експериментальному дослідженні процесу руйнування балок на пульсаторах величину коефіцієнта асиметрії циклів задають як відношення мінімального і максимального навантажень на балку. При цьому не враховуються динамічні сили, що виникають в процесі випробування, які мають вплив на величину дійсних напружень, що виникають у перерізах балки.

**Постановка задачі.** Метою цієї статті є дослідження впливу динамічних сил, що виникають у процесі випробувань на циклічний згин двохопорних балок, що навантажуються змінними силами за схемою, яка показана на рис.1.

При визначенні коефіцієнта асиметрії циклів через відношення розрахункових мінімального і максимального напружень не враховується перерозподіл навантажень і

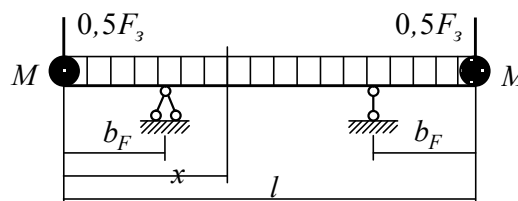


Рис. 1. Схема навантаження балок

напружень, пов'язаний з наявністю при випробуваннях сил інерції. Врахування цих сил, як буде показано, веде до певної зміни типу циклів напружень і величини коефіцієнта асиметрії циклів.

**Результати дослідження.** При циклічному навантаженні балок величини середнього навантаження циклу  $F_c$ , амплітудне значення сили  $F_a$ , величина змінної сили циклу  $F(t)$  і повне навантаження  $F$  визначаються із виразів

$$F_c = \frac{F_{max}}{2}(1+r), \quad F_a = \frac{F_{max}}{2}(1-r),$$
$$F_3(t) = F_a \cdot \sin \omega t, \quad F = F_c \pm F_3, \quad (2)$$

де  $F_{max}$  – найбільше значення сили при циклічному навантаженні;  $\omega = \pi n/30$  – частота вимушених коливань балки;  $r = r_F$  – теоретичний коефіцієнт асиметрії циклу, який визначається зі співвідношення

$$r_F = \frac{F_{min}}{F_{max}}. \quad (2)$$

Аналогічно до виразів (1) можна записати вирази для згинальних моментів у балці при циклічних навантаженнях. Величини максимальних і мінімальних значень моментів при циклічному згині є такою:

$$\begin{aligned} M_{max} &= M_c + M_a = M_n + \max M_3; \\ M_{min} &= M_c - M_a = M_n - \max M_3; \\ M_3 &= M_a \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $M_3 = M_3(x, t)$  – величина змінної складової згинального моменту при циклічних динамічних випробуваннях.

На величину змінної складової моменту  $M_3$ , крім змінних сил  $F_3 = F_a \sin \omega t$  (рис. 1), значний вплив мають сили інерції, які виникають при повторно-змінному навантаженні балок. Вони пов'язані як з коливанням зосереджених мас  $M$ , що прикладені до балки (сили інерції  $I$ ), так і з коливанням розподілених по довжині балки мас (розподілені сили інерції інтенсивності  $i$ ). Ці сили інерції визначають з таких виразів:

$$\begin{aligned} I &= M \cdot a = M \cdot \omega^2 \cdot y; \\ i &= m(x) \cdot a = m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $y$ ,  $y(x, t)$  – відповідно прогин балки в точці, де прикладена маса  $M$ , і функція прогинів осі балки від розподілених мас.

При відомих значеннях згинальних моментів коефіцієнт асиметрії циклів визначається за формулою

$$r_M = \frac{M_{min}}{M_{max}} = \frac{M_c - M_a}{M_c + M_a}. \quad (5)$$

Покажемо, що величина коефіцієнта асиметрії циклів  $r_M$ , визначеного за формулою (5), при врахуванні динамічних явищ, що існують при циклічних випробуваннях, відрізняється від коефіцієнта  $r_F$ , обчисленого за формулою (2) без врахування названих явищ.

Спосіб визначення коефіцієнта  $r_M$  проілюструємо на прикладі балки, навантаженої повторно-змінним навантаженням (див. рис. 1). Сили інерції, що виникають при випробуванні, пов'язані з рухом траверси  $M$ , за допомогою якої передається циклічне навантаження на балку (сили інерції  $I$ ) та з коливанням балки з розподіленою масою  $m$  (розподілені сили інерції  $i$ ).

Диференціальне рівняння вимушених коливань балки, що відбуваються під час її навантаження повторно-змінними силами, можна, при нехтуванні силами опору, записати у вигляді

$$\begin{aligned} B_k \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial t^4} + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \\ = -\frac{F_a + I}{2} \delta(x - b_F) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $B_k$  – згинна жорсткість балки;  $y(x, t)$  – функція прогинів

осі балки;  $\delta(x - b_F) = \begin{cases} 1, (x > b_F) \\ 0, (x < b_F) \end{cases}$  – дельта-функція;  $b_F$

– відстані точок прикладання змінних сил до опор балки.

Використавши для розв'язування рівняння (6) метод Бубнова-Гальоркіна, прийнявши

$$y(x, t) = y(x) \cdot \sin \omega t,$$

де

$$y(x) = \sum_1^n a_i \varphi_i(x) \quad (7)$$

і взявши один член ряду (7), отримуємо з рівняння (6):

$$\begin{aligned} B_k \cdot a_1 \varphi_1^{IV}(x) - m(x) \cdot \omega^2 \cdot a_1 \varphi_1(x) = \\ = -\sum \frac{F_a + I}{2} \delta(x - b_F). \end{aligned} \quad (8)$$

Для визначення невідомого параметра  $a_1 = a$  запишемо вираз

$$\begin{aligned} \int_0^l [B_k \cdot a \varphi_1^{IV}(x) - m(x) \cdot \omega^2 \cdot a \varphi_1(x)] \cdot \varphi_1(x) dx = \\ = -\sum \frac{F_a + I}{2} \varphi_1(b_F). \end{aligned} \quad (9)$$

Для шарнірно опертої балки довжиною  $l$  можна прийняти  $\varphi_1(x) = \sin(\pi x/l)$ . Обчисливши при цьому виразі значення інтегралів зі співвідношення (9), знаходимо

$$a = \frac{2l^3 (F_a + I) \sin \frac{\pi b_F}{l}}{\pi^4 \cdot B_k - \omega^2 \cdot ml^4}. \quad (10)$$

Тоді

$$y(x) = \frac{2l^3 (F_a + I) \sin \frac{\pi b_F}{l}}{\pi^4 B_k - \omega^2 \cdot ml^4} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (11)$$

Згинальний момент у довільному перерізі балки

$$\begin{aligned} M_3(x) = -B_k \cdot y''(x) = \frac{\pi^2 B_k}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \cdot a = \\ = \frac{2\pi^2 l \cdot B_k (F_a + I) \sin \frac{\pi b_F}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{\pi^4 \cdot B_k - \omega^2 \cdot ml^4}. \end{aligned} \quad (12)$$

Змінний в часі момент  $M_3(x, t)$  визначається з виразу

$$M_3(x, t) = M_3(x) \cdot \sin \omega t.$$

У вираз (12), що служить для визначення моменту  $M_3$ , входить величина сили інерції  $I$ , пов'язаної з коливанням зосереджених мас  $M$ . Підставивши у перший з виразів (4) значення прогинів балки в місцях розташування цих мас, тобто прийнявши

$$y = y(b_F) = a \cdot \sin \frac{\pi b_F}{l},$$

отримуємо для визначення цієї величини вираз

$$I = M \cdot \omega^2 \frac{2l^3 (F_a + I) \sin^2 \frac{\pi b_F}{l}}{\pi^4 \cdot B_k - \omega^2 \cdot ml^4}.$$

Звідси знаходимо

$$I = \frac{M \cdot F_a \cdot \sin^2 \frac{\pi b}{l}}{\frac{\pi^4 B_k}{2\omega^2 l^3} - \frac{ml}{2} - M \cdot \sin^2 \frac{\pi b}{l}}. \quad (13)$$

Знаючи величину сили інерції  $I$ , за формулою (12) можна визначити амплітудне значення змінної складової моменту при циклічних навантаженнях балки. Тоді коефіцієнт асиметрії циклів  $r_M$ , обчислений з врахуванням сил інерції, які виникають при циклічному навантаженні балок, визначається з виразу (5), де

$$M_c = F_c \cdot b_F,$$

$$M_a = 2\pi^2 l \cdot B_k \frac{(F_a + I) \sin \frac{\pi b_F}{l}}{\pi^4 \cdot B_k - \omega^2 \cdot ml^4}. \quad (14)$$

На основі наведених викладок можна запропонувати таку методику визначення коефіцієнта асиметрії циклів  $r_M$  при випробуваннях балок на двох опорах на втомне руйнування:

1. За вибраними значеннями  $F_{max}$  і  $F_{min}$  з виразів (1) визначаємо  $F_c$  і  $F_a$ .

2. Обчислюємо величину  $M_c = F_c \cdot b_F$ .

3. Визначаємо згинну жорсткість балки  $B_k$ .

4. За формулою (13) обчислюємо силу інерції  $I$ .

5. За виразом (14) визначаємо амплітудне значення моменту  $M_a$ .

6. За співвідношенням (5) обчислюємо величину  $r_M$ .

Для ілюстрації методики визначення коефіцієнтів асиметрії циклів напружень з врахуванням сил інерції і оцінки розбіжності між розрахунковим коефіцієнтом  $r_F$

Визначення коефіцієнтів асиметрії циклів

№ з/п	$B_k \cdot 10^{-6}$ кгсм <sup>2</sup>	$F_{max}$ кг	$F_{min}$ кг	$r_F$	$F_{cp}$ кг	$F_a$ кг
1	1660	7000	2310	0,33	4655	2345
2	1890	7000	2310	0,33	4655	2345
3	1734	5000	1650	0,33	3325	1675

Продовження Табл. 1

№ з/п	$M_{cp}$ кгсм	$I$ кг	$M_a$ кгсм	$r_F$	$(r_M - r_F) / r_M$
1	128012	147	74990	0,26	-0,26
2	128012	128	74363	0,26	-0,25
3	91437	100	53437	0,25	-0,27

і коефіцієнтом  $r_M$ , що враховує наявність сил інерції, були проведені розрахунки для трьох залізобетонних балок, які піддавались випробуванням за схемою, що наведена на рис. 1. Розрахунковий коефіцієнт асиметрії циклів напружень приймався рівним  $r_F = 0,33$ . Дані для визначення коефіцієнта  $r_M$  наведено в табл. 1.

**Висновки.** Як видно з наведених у таблиці даних, дійсний коефіцієнт асиметрії циклів  $r_M$ , обчислений з врахуванням сил інерції, які виникають при випробуваннях балок на циклічне навантаження за вибраною схемою є меншим порівняно з відповідним коефіцієнтом, обчисленим без врахування цих сил на 25 – 27 %. Цей факт слід враховувати при визначенні величини розрахованої межі витривалості і коефіцієнта запасу відносно втомного руйнування.

## Література

1. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Є. С. Сопротивление материалов. – К., Вища шк., 2004. – 655 с.
2. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1969. – 320 с.

Отримана 28.06.10

I. Olkhovy<sup>1</sup>, K. Lishchynska<sup>2</sup>

About agency of dynamic forces on performances of cycles at repeatedly-variable curving of beams

<sup>1</sup>Lviv State University of lige safety, Lviv;

<sup>2</sup>National University "Lvivska Politechnika", Lviv

The question of definition of coefficient of asymmetry of cycles is considered at cyclic bending test of beams on two bearing parts taking into account the dynamic forces (inertial force) originating at specified trials. It is displayed that the account of these forces leads to coefficient diminution of asymmetry of cycles.