

УДК 539.3

## ВІДШАРУВАННЯ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ В ОРТОТРОПНІЙ МАТРИЦІ

**М. Кундрат**

Доцент, докт. техн. наук,  
Національний університет водного  
господарства та природокористування,  
м. Рівне

**Г. Сулим**

Професор, докт. фіз.-мат. наук,  
Львівський національний університет  
імені Івана Франка,  
м. Львів

*Подано аналітичний розв'язок задачі про відшарування жорсткого лінійного включення в ортотропній матриці за умов плоскої задачі при розтягу на безмежності напруженнями паралельно лінії включення. Вважається, що відшаруванню передують розвиток локалізованих зон передруйнування вздовж межі матриця-включення, які моделюються розривами тангенціальних переміщень. Розв'язок сформульованої задачі зведено до задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку стосовно робочої довжини включення. Виявлено вплив ортотропії матеріалу пластини на відшарування включення.*

**ортотропія, пластина, включення, відшарування, робоча довжина, зона передруйнування, задача Коші**

Конструювання композиційних матеріалів з високою питомою міцністю та в'язкістю руйнування досягається армуванням матриці високоміцними та жорсткими включеннями у вигляді волокон чи стрічок. Для теоретичного з'ясування руйнування таких композитів під статичним чи змінюваним навантаженням потрібно проводити поглиблений аналіз полів напружень та деформацій біля включень.

Поля напружень і переміщень біля вершин включень та їх асимптотичні подання досліджувалися в широкому колі праць, найбільш повно їх огляд подано в монографії [1]. На цей час з аналітичного розв'язку плоскої задачі теорії пружності для тіла з жорстким еліптичним ядром [2] граничним переходом отримано результати і для лінійного (стрічкового) включення. Докладно вивчено [3–5] поля напружень і переміщень біля вершин гострокінцевих абсолютно жорстких включень і на основі результатів [2, 6] знайдено їх асимптотичні подання. Внаслідок підвищеної неоднорідності напруженого стану біля включень [4, 7] слід очікувати більших пластичних

деформацій порівняно з тріщинами чи гострокінцевими отворами. Дослідні дані свідчать, що пластичне течіння починається біля кутів на торцях включення і зі збільшенням навантаження поширюється вздовж поверхні поділу матеріалів до його центральної частини (див., напр., [8, 9]). Це підтверджують оптичні [10] та мікролазерні [11] дослідження полів напружень біля армувальних елементів. Методами скінченних елементів та локальних варіацій виявлено [12], що на відміну від тріщини пластична зона біля тонкого включення повинна бути зміщена в бік його центральної частини. Отримано також аналітичні розв'язки плоских задач для лінійного включення з зонами передруйнування, що змодельовані локалізованими тонкими прошарками пластично деформованого матеріалу (поверхнями зсуву) [13–16]. Особливість напружень в околі вершин включення у цих розв'язках змінилася з кореневої на логарифмічну, що, з одного боку, є певним покращанням фізичної адекватності моделі, а з другого – свідчить про передбачуване позитивне зменшення концентрації напружень внаслідок

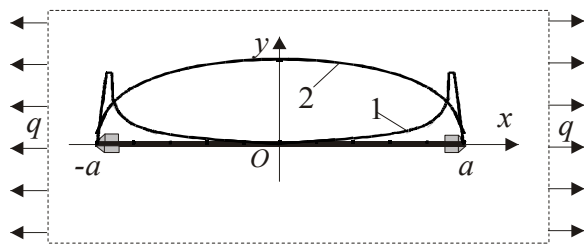


Рис. 1. Характер зміни величини дотичних (1) та осьових нормальних (2) напружень уздовж включення

таких явищ. Це добре узгоджується із загальнотеоретичним прагненням системи у стані рівноваги мінімізувати енергію деформування.

Пізніше із застосуванням нової двофазної моделі зони передруйнування [17–19] вдалося удосконалити формулювання крайових умов, позбутися необхідності використовувати особливості напружень та отримати механічно коректні обмежені значення напружень в усіх точках композиції. У межах цієї концепції для аналізу гранично рівноважного стану ізотропного тіла зі стрічковими включеннями використано відомі [20] положення  $\delta_c$ -моделі Леонова – Панасюка – Витвицького – Дагдейла. Згадувану модель [17–19] у праці [21] застосовано до випадку ортотропної матриці.

За результатами [21] на рис. 1 за умов плоскої задачі (узагальнений плоский напружений стан) подано значення нормованих  $\tilde{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} / \tau_s^*$  дотичних напружень (лінія 1) на межі включення-матриця та розривних  $\tilde{\sigma}_{xx}^c = \sigma_{xx}^c / (2\tau_s^*)$  за довжиною включення (лінія 2) при одноосному розтягу сталими напруженнями на нескінченності  $\tilde{q} = q / (2\tau_s^*) = 0,25$ . Тут і далі  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $2a$  – довжина включення. Параметр  $\tau_s^*$  трактуємо або як теоретичну зсувну міцність межі поділу, тобто межю напружень зсуву (зсувної взаємодії) між двома атомними площинами на межі контакту пластини з включенням, або як технічну зсувну міцність межі поділу з урахуванням її структурних недосконалостей, а за пластичного деформування – як зсувний поріг пластичності.

Максимального значення дотичні напруження  $\sigma_{xy} = \tau_s^*$  набувають в околах кінців включення, і саме тут йому передається більша частина навантаження від матриці. За межами деякого околу біля країв включення дотичні напруження швидко зменшуються і, з огляду на непарність, у центрі дорівнюють нулю. Прийнята модель і результати її застосування добре узгоджуються як з експериментальними даними [22, 8], так і з числовим експериментом [23 – 25] на основі методу скінченних елементів.

Зображені на рис. 1 напруження визначають [21] два обумовлені безпосередньо включенням найбільш очікувані механізми локального руйнування в композиції: розрив включення або його відшарування від матриці. Конкретний з них залежить від механічних та міцнісних характеристик включення, матриці, контактної межі та довжини включення. Руйнування всередині матриці тут не розглядається, хоч розв'язок задачі створює всі передумови для аналізу цього явища.

Якщо міцнісні та пружні характеристики композиції відомі, то існує певна критична довжина включення  $2a = 2a_{cr}^*$  зміни характеру руйнування в композиції: при довжині включення меншій від  $2a_{cr}^*$  руйнування проходить методом його відшарування, при більшій від  $2a_{cr}^*$  – шляхом його розриву. Там же отримано значення граничного навантаження  $q = q^*$  відшарування включення за деформаційним критерієм  $u_{max} = \delta_{2c}$  ( $\delta_{2c}$  – гранична межа взаємного зсуву вздовж контактної межі) та граничного навантаження  $q = q^{**}$  розриву включення за критерієм  $P_{max} = P_{ut}$  ( $P_{ut}$  – міцність включення на розрив,  $P_{max}$  – максимальні осьові зусилля).

У цій праці з використанням енергетичного критерію дослідимо відшарування включення за сталого навантаження для випадку, коли довжина включення є меншою від довжини зміни характеру його руйнування. Дослідження такого типу задач за різними підходами проводилося також у працях [26–29].

**Постановка задачі.** За умов плоскої задачі теорії пружності розглядаємо ортотропну пластину, що містить абсолютно жорстке лінійне включення завдовжки  $2a$ , розміщене уздовж осі  $Ox$  (рис. 2) декартової системи координат  $xOy$ . Вважається, що осі паралельні до осей ортотропії.

Приймаємо, що довжина макроскопічного включення менша від критичної довжини зміни характеру руйнування і при навантаженні композиції включення відшарується від матриці. Пластина розтягується паралельно до осі включення напруженнями на нескінченності

$$\sigma_{xx}^\infty = q. \quad (1)$$

Приймаючи на себе дію зовнішнього навантаження, включення одночасно є й потужним концентратором напружень, а околи його вершин – місцями найбільш інтенсивного локального деформування. Вважаємо, що саме тут формуються зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини вздовж межі включення і охоплюють вершини включення. Останні можуть імітувати області накопичення пошкоджень, порушення адгезійного зв'язку, пластичне деформування, проковзування та інше.

Зони передруйнування моделюємо тріщинами ковзання вздовж межі поділу матриця-включення при заданих на їх поверхнях значеннях дотичних напружень, тобто включення відшарується від матриці шляхом розвитку в околах його вершин тріщин за механізмом поперечного зсуву.

Довжину включення без відшарованих на кінцях частин позначаємо через  $2a_{wr}$  і називаємо робочою

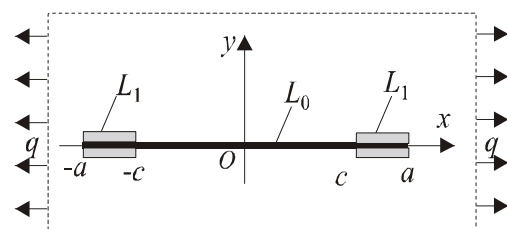


Рис. 2. Схема задачі

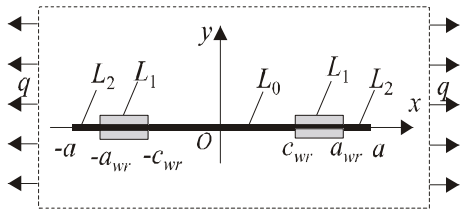


Рис. 3. Схема відшарування включення

довжиною включення (рис. 3). Коефіцієнт тертя на ділянках  $L_2 \approx a_{wr} < |x| \leq a$ , де вже відбулося розшарування між включенням та нелінійно здеформованим матеріалом матриці, приймаємо рівним нулю.

Рівняння відшарування включення побудуємо використовуючи енергетичний критерій, який передбачає існування певного критичного значення енергії, необхідної для того, щоб робоча довжина включення зменшилася на одиницю довжини (зруйнувалася одиниця довжини межі поділу), і знайдемо аналітичні залежності зміни робочої довжини включення  $2a_{wr}$  залежно від навантаження, міцнісних та пружних характеристик матеріалів пластини. Також дослідимо умови автономності зон передруйнування в околах вершин макроскопічного включення.

Спочатку розглянемо відповідну крайову задачу, умови якої сформулюємо наступним чином. На відрізку  $|x| \leq c_{wr}$  включення ( $a = a_{wr}$ ) бездефектно зв'язане з матрицею і тому поздовжні деформації матриці там відсутні:

$$\partial u(x)/\partial x = 0 \quad (x \in L_0). \quad (2)$$

У зонах передруйнування дотичні напруження досягають свого граничного значення:

$$\sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x) = \tau_s^* \text{sign}(x) \quad (c_{wr} \leq |x| \leq a_{wr}). \quad (3)$$

Поза межами включення на його осі

$$\sigma_{xy}(x) = 0 \quad (|x| \geq a_{wr}, \quad y = 0). \quad (4)$$

Тут  $a_{wr} - c_{wr} = d$  – довжина смуг передруйнування; інші позначення – очевидні.

**Розв'язок крайової задачі.** Згідно з працею [6] напруження та деформації в плоскій задачі для ортотропної пластини виражаються через дві аналітичні функції комплексних змінних  $z_j = x + s_j y$  ( $j = 1; 2$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \text{Re}[s_1^2 \Phi(z_1) + s_2^2 \Psi(z_2)], \\ \sigma_{yy} &= 2 \text{Re}[\Phi(z_1) + \Psi(z_2)], \\ \sigma_{xy} &= -2 \text{Re}[s_1 \Phi(z_1) + s_2 \Psi(z_2)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u'_x &= 2 \text{Re}[p_1 \Phi(z_1) + p_2 \Psi(z_2)], \\ v'_x &= 2 \text{Re}[q_1 \Phi(z_1) + q_2 \Psi(z_2)], \end{aligned} \quad (6)$$

де  $p_1 = a_{11}s_1^2 + a_{12}$ ,  $p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12}$ ,

$q_1 = (a_{12}s_1^2 + a_{22})/s_1$ ,  $q_2 = (a_{12}s_2^2 + a_{22})/s_2$ ,

$$a_{11} = 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2, \quad a_{12} = -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2.$$

Параметри  $s_1, s_2$  є коренями характеристичного рівняння  $s^4 + (E_1/G - 2\nu_{12})s^2 + E_1/E_2 = 0$  і визначаються співвідношеннями  $s_1 \cdot s_2 = -\alpha_0$ ,  $s_1 + s_2 = i[2(\alpha_0 + \beta_0)]^{1/2}$ , в яких

$$\alpha_0 = (E_1/E_2)^{1/2}, \quad \beta_0 = E_1/(2G) - \nu_{12}; \quad (7)$$

$E_1, E_2$  – модулі пружності для розтягу (стиску) у головних напрямках  $Ox$  та  $Oy$ ;  $G$  – модуль зсуву, що характеризує зміну кута між головними напрямками  $Ox$  та  $Oy$ ;  $\nu_{12}$  – коефіцієнт Пуассона, що описує скорочення в напрямі  $Oy$  за розтягу в напрямі  $Ox$ .

Розглянутий частковий випадок ортотропії є практично важливим, оскільки для таких матеріалів як боро-, вугле- та склопластики, деревина з правильними річними шарами, дикт (фанера), тобто для значної кількості ортотропних матеріалів, що використовуються в практиці, отримані з розв'язку характеристичного рівняння значення  $s_1, s_2$  є суто уявними.

Розв'язок крайової задачі (1) – (4) отримаємо за схемою уже згадуваної праці [21] при безмежно малих ділянках розпушення. Вирази для функцій напружень (5), (6) будуть такими:

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{1}{2} f_0 + \frac{\tau_s^*}{\pi} g_2(\alpha_0, \beta_0) \Gamma_1(z_1, a_{wr}, c_{wr}), \\ \Psi(z_2) &= -\frac{p_1}{2p_2} f_0 - \frac{\tau_s^* q_1}{\pi} g_2(\alpha_0, \beta_0) \Gamma_1(z_2, a_{wr}, c_{wr}), \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$f_0 = -2A_1 g_1(\alpha_0, \beta_0), \quad A_1 = \Phi(\infty) = \frac{q}{2(s_1^2 - s_2^2)},$$

$$g_1(\alpha_0, \beta_0) = \frac{p_2(q_1 - q_2)}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, \quad g_2(\alpha_0, \beta_0) = \text{Im} \frac{1}{s_1 q_2 - s_2 q_1},$$

$$\Gamma_1(z, a_{wr}, c_{wr}) = \ln \frac{z \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} - a_{wr} \sqrt{z^2 - c_{wr}^2}}{a_{wr} \sqrt{z^2 - c_{wr}^2} + z \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}.$$

Довжина зон передруйнування

$$a_{wr} - c_{wr} = c_{wr} \left( \text{ch} \frac{\pi q g_3(\alpha_0, \beta_0)}{2\tau_s^*} - 1 \right), \quad (9)$$

де

$$g_3(\alpha_0, \beta_0) = \frac{i(s_1 q_2 - s_2 q_1)}{E_1(p_1 q_2 - p_2 q_1)}.$$

Переміщення матеріалу матриці стосовно включення у зонах передруйнування ( $c_{wr} \leq x \leq a_{wr}$ ) описується формулою

$$u(x) = \frac{\tau_s^*}{\pi E_1 g_3(\alpha_0, \beta_0)} [x \Gamma_1(x, a_{wr}, c_{wr}) - a_{wr} \Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr})], \quad (10)$$

де

$$\Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr}) = \ln \frac{\sqrt{x^2 - c_{wr}^2} - \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} + \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}}.$$

**Автономність смуг передруйнування.** Для достатньо довгих включень  $a \gg \delta_{2c}$ ,  $a \gg a - c$  справджується гіпотеза автономності локалізованих кінцевих зон передруйнування біля вершини включення. Якщо параметри навантаження такі, що напружено-деформований стан є гранично рівноважним, то виконується умова  $u(a) = \delta_{2c}$ . В цьому випадку довжина смуг  $\varepsilon = (a - c)/a$  досягає деякого критичного значення  $\varepsilon_* = (a - c_*)/a$ . Враховуючи, що для розривів переміщень (10), у першому наближенні після розвинення в ряд за степенями  $\varepsilon$

$$u(a) = \frac{\tau_s^* a}{\pi E_1 g_3(\alpha_0, \beta_0)} \varepsilon, \quad (11)$$

то у гранично рівноважному стані виконується залежність

$$\varepsilon_* = \frac{\pi E_1 \delta_{2c}}{\tau_s^* a} g_3(\alpha_0, \beta_0).$$

Звідси отримуємо, що

$$a - c_* = \frac{\pi E_1 \delta_{2c}}{\tau_s^*} g_3(\alpha_0, \beta_0), \quad (12)$$

де  $c_*$  – значення параметра  $c$  у гранично рівноважному стані. У правій частині формули (12) знаходяться величини, що не залежать від навантаження чи довжини включення, тому в гранично рівноважному стані розміри смуг передруйнування для конкретного ортотропного матеріалу є сталими, тобто для макроскопічних включень справедлива гіпотеза автономності областей в її кінцевих зонах. Оцінку мінімальної довжини макроскопічного включення із заданою наперед точністю виконуємо за порівнянням результатів розрахунків граничного навантаження розшарування за точним розв’язком та відповідною формулою для першого наближення. Зокрема, для ізотропної матриці при  $G\delta_{2c}/(\tau_s^* a) < 0,16$  розбіжність між двома прогнозами граничного навантаження не виходить за межі 5%. Відтак з такою похибкою при  $a > 6G\delta_{2c}/\tau_s^*$  включення можна вважати макроскопічним.

**Відшарування включення.** Нехай у деякий момент, що відповідає значенням параметрів довжини включення  $a_{wr}$  та навантаження  $q$ , величини переміщень  $u(x, a_{wr})$  на відрізках смуг передруйнування  $(a_{wr} - c_{wr}, a_{wr})$  згідно з рис. 4 схематично зображаються умовним трикутником  $A_0 B_0 C_0$ .

Переміщення в зонах передруйнування [21], а значить і кут нахилу прямої  $B_0 C_0$ , залежать від параметрів ортотропії пластини. Через деякий час, що відповідає зміні робочої довжини включення  $a_{wr}$  та навантаження  $q$  на деякі малі величини  $\delta a_{wr}$  та  $\delta q$  відповідно, розглянутий трикутник переміщується в напрямі до центра включення, трансформуючись у трикутник  $A_1 B_1 C_1$ . Точки  $C_0$  та  $C_1$  відповідають кінцям локалізованих зон передруйнування,

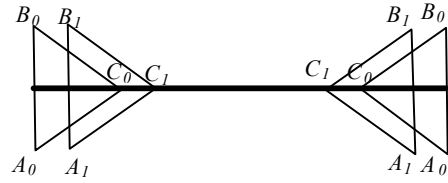


Рис. 4. Схема переміщень у зонах передруйнування

а точки  $A_0, B_0$  та  $A_1, B_1$  – кінцям робочої частини включення до і після його відшарування на величину  $\delta a_{wr}$  відповідно.

Енергію відшарування включення на одиницю довжини  $\gamma_\tau^*$  вважаємо відомою характеристикою композиції. При зменшенні робочої довжини включення на величину  $\delta a_{wr}$  напруження виконують роботу на відповідному зміщенні, яка дорівнює повній дисипації енергії

$$\gamma_\tau^* \cdot \delta a_{wr} = \int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}-\delta a_{wr}} 2\sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, q + \delta q) - u(x, a_{wr}, q)] dx. \quad (13)$$

Знехтуємо у цьому виразі членами порядку  $(\delta a_{wr})^2$ , тоді

$$\gamma_\tau^* \cdot \delta a_{wr} = \int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} 2\sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, q + \delta q) - u(x, a_{wr}, q)] dx + O((\delta a_{wr})^2). \quad (14)$$

При цьому використано оцінки

$$\int_{c-\delta a_{wr}}^c \sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, q + \delta q) - u(x, a_{wr}, q)] dx \approx \left( \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial a_{wr}} \right)_{x=a_{wr}-d} \cdot (\delta a_{wr})^2,$$

$$\int_{a_{wr}-\delta a_{wr}}^{a_{wr}} \sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, q + \delta q) - u(x, a_{wr}, q)] dx \approx \left( \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial a_{wr}} \right)_{x=a_{wr}} \cdot (\delta a_{wr})^2.$$

Подамо функцію  $u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, q + \delta q)$  у формулі (14) у вигляді ряду Тейлора за степенями  $\delta a_{wr}$  та спрямуємо  $\delta a_{wr}$  до нуля, вважаючи, що параметр  $a_{wr}$  залежить від навантаження  $q$ . Тоді отримаємо, що

$$\gamma_\tau^* = 2\tau_s^* \int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} \left( \frac{\partial u}{\partial a_{wr}} + \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a_{wr}} \right) dx. \quad (15)$$

Останню формулу перетворимо так:

$$\tau_s^* \int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} \left( \frac{\partial u}{\partial a_{wr}} + \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a_{wr}} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} \int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} u(x, a_{wr}, q) dx + \tau_s^* u(a_{wr}, a_{wr}, q) = \\
&= \tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} \int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr}, q)}{\partial x} dx + \\
&+ \tau_s^* a_{wr} \frac{\partial u(a_{wr}, a_{wr}, q)}{\partial a_{wr}} = \frac{1}{2} \gamma_\tau^* . \quad (16)
\end{aligned}$$

Використовуючи подання (10), знаходимо, що

$$\frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} = \frac{-\tau_s^*}{\pi E_1 g_3(\alpha_0, \beta_0)} \ln \frac{a_{wr} \sqrt{x^2 - c_{wr}^2} - x \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{a_{wr} \sqrt{x^2 - c_{wr}^2} + x \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}} ,$$

а після інтегрування і деяких очевидних перетворень

$$\begin{aligned}
&\int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} dx = \frac{\tau_s^*}{\pi E_1 g_3(\alpha_0, \beta_0)} \times \\
&\times a_{wr} \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \ln \frac{a_{wr} + \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{c_{wr}} .
\end{aligned}$$

Враховуючи зв'язок між розмірами зон переддрунування і навантаженням (9), останню формулу подамо як

$$\begin{aligned}
&\int_{c_{wr}}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} dx = \frac{\tau_s^* H_2}{\pi E_1} a_{wr}^2 \operatorname{th}(H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)) , \\
&H_2 = \pi q / (2\tau_s^*) .
\end{aligned}$$

Тепер перший доданок формули (16), після диференціювання за параметром  $a_{wr}$ , матиме вигляд

$$\begin{aligned}
&\tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} \int_c^a x \frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} dx = \\
&= \frac{\tau_s^* a_{wr}}{\pi E_1} \{ 2H_2 \operatorname{th}(H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)) + a_{wr} [\operatorname{th}(H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)) + \\
&+ H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0) \cosh(H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0))] \frac{dH_2}{da_{wr}} \} . \quad (17)
\end{aligned}$$

Для обчислення другого доданка у формулі (16) з формули (10) знаходимо переміщення у вершині включення:

$$\begin{aligned}
u(a_{wr}, a_{wr}) &= \lim_{x \rightarrow a_{wr}} u(x, a_{wr}) = \frac{2a_{wr} \tau_s^*}{\pi} \ln \frac{c_{wr}}{a_{wr}} = \\
&= \frac{2\tau_s^*}{\pi E_1 g_3(\alpha_0, \beta_0)} \ln(\operatorname{ch} H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)) .
\end{aligned}$$

Після диференціювання

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(a_{wr}, a_{wr})}{\partial a_{wr}} &= \frac{2\tau_s^*}{\pi E_1 g_3(\alpha_0, \beta_0)} [\ln(\operatorname{ch} H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)) + \\
&+ a_{wr} g_3(\alpha_0, \beta_0) \operatorname{th}(H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)) \frac{dH_2}{da_{wr}}] . \quad (18)
\end{aligned}$$

Остаточно, з урахуванням виразів (17), (18), формула (16) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\gamma_\tau^* &= \frac{-2a_{wr} (\tau_s^*)^2}{\pi E_1 g_3(\alpha_0, \beta_0)} \{ 2[-H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0) \operatorname{th}(H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)) + \\
&+ \ln(\operatorname{ch} H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0))] + a_{wr} g_3(\alpha_0, \beta_0) \times \\
&\times \left[ \operatorname{th}(H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)) - \frac{H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)}{\operatorname{ch}^2(H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0))} \right] \frac{dH_2}{da_{wr}} \} . \quad (19)
\end{aligned}$$

Вона описує залежність між робочою довжиною включення  $a_{wr}$  та навантаженням, яке враховане параметром  $H_2$  і є аналогічною за структурою до формули Г.П. Черепанова [30] у теорії тріщин.

Введемо в розгляд безрозмірну робочу довжину включення:

$$\lambda_3 = (\tau_s^*)^2 a_{wr} / (\pi E_1 \gamma_\tau^* g_3(\alpha_0, \beta_0)) \quad (20)$$

і позначення  $H_3 = H_2 g_3(\alpha_0, \beta_0)$ . Тоді

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_3}{dH_3} &= \frac{(\tau_s^*)^2}{\pi E_1 \gamma_\tau^* g_3(\alpha_0, \beta_0)} \frac{da_{wr}}{dH_3} = \frac{\lambda_3}{a_{wr}} \frac{da_{wr}}{dH_3} ; \\
\frac{dH_3}{da_{wr}} &= \frac{\lambda_3}{a_{wr}} \frac{dH_3}{d\lambda_3} . \quad (21)
\end{aligned}$$

Залежність між параметром навантаження  $H_3$  та знерозміреною довжиною включення  $\lambda_3$  подамо з урахуванням (19) – (21) у вигляді диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{dH_3}{d\lambda_3} = \frac{1/2 - 2\lambda_3 (H_3 \operatorname{th} H_3 - \ln \operatorname{ch} H_3)}{\lambda_3^2 (H_3 / \operatorname{ch}^2 H_3 - \operatorname{th} H_3)} . \quad (22)$$

Для однозначності розв'язку доповнюємо його початковою умовою, яка задає навантаження для конкретної початкової робочої довжини включення

$$H_3 |_{\lambda_3 = \lambda_0} = H_0 , \quad (23)$$

де  $\lambda_0$  – деяка відома робоча довжина включення при фіксованому навантаженні  $H_0$ .

У задачі Коші (22), (23) характеристики ортотропії містяться у безрозмірних параметрах  $H_3$ ,  $\lambda_3$ . Для наочного оцінювання впливу параметрів ортотропії на характер розшарування введемо замість них такі величини:

$$\lambda_1 = (\tau_s^*)^2 a_{wr} / (0,4\pi E_1 \gamma_\tau^*) , \quad H_1 = q / (2\tau_s^*) . \quad (24)$$

Тоді диференціальне рівняння для робочої довжини включення (22) набуде вигляду

$$\frac{dH_1}{d\lambda_1} = \frac{\pi g_3(\alpha_0, \beta_0) - 1,6\lambda_1(H_3 \text{th} H_3 - \text{lnch} H_3)}{0,8\pi\lambda_1^2(H_3/\text{ch}^2 H_3 - \text{th} H_3)}. \quad (25)$$

Коефіцієнт 0,4 у формулі (24) введено для можливості прямого переходу у результатах до випадку ізотропної матриці.

**Аналіз прикладів.** За результатами розв'язування рівняння (25) на рис. 5 та рис. 6 зображені інтегральні криві для робочої довжини включення при двох початкових робочих довжинах включення  $\lambda_0 = 1$  та  $\lambda_0 = 2$ . Числа біля ліній відповідають різним відношенням параметрів ортотропного тіла.

На рис. 5: лінія 1 –  $E_1/E_2 = 4$ ,  $E_1/G_{12} = 6$  ( $\alpha_0 = 2$ ,  $\beta_0 = 2,75$ ); лінія 2 –  $E_1/E_2 = 0,01$ ,  $E_1/G_{12} = 10$  ( $\alpha_0 = 0,1$ ,  $\beta_0 = 4,75$ ); 3 – (ізотропія)  $E_1/E_2 = 1$ ,  $E_1/G_{12} = 2,5$  ( $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 1$ ); 4 –  $E_1/E_2 = 25$ ,  $E_1/G_{12} = 50$  ( $\alpha_0 = 5$ ,  $\beta_0 = 24$ ).

На рис. 6: лінія 5 – епоксидна смола, армована склом:  $E_1 = 5,49 \cdot 10^4$  МПа,  $E_2 = 1,83 \cdot 10^4$  МПа,  $G_{12} = 8,8 \cdot 10^3$  МПа ( $s_1 = 2,2712 i$ ,  $s_2 = 0,7626 i$ ,  $\alpha_0 = 1,73$ ,  $\beta_0 = 2,87$ ); 6 – епоксидна смола, армована бором:  $E_1 = 2,81 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 2,81 \cdot 10^4$  МПа,  $G_{12} = 1,05 \cdot 10^4$  МПа ( $s_1 = 5,0773 i$ ,  $s_2 = 0,6228 i$ ,  $\alpha_0 = 3,16$ ,  $\beta_0 = 13,14$ ); 7 – епоксидна смола, армована графітом:  $E_1 = 2,81 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 1,12 \cdot 10^4$  МПа,  $G_{12} = 5,6 \cdot 10^3$  МПа ( $s_1 = 6,9992 i$ ,  $s_2 = 0,7144 i$ ,  $\alpha_0 = 5,01$ ,  $\beta_0 = 24,86$ ).

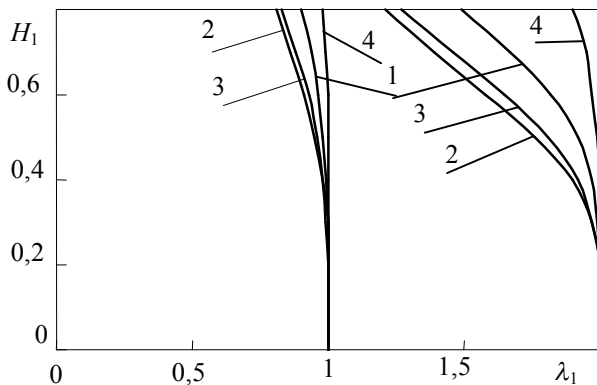


Рис. 5. Робоча довжина включення

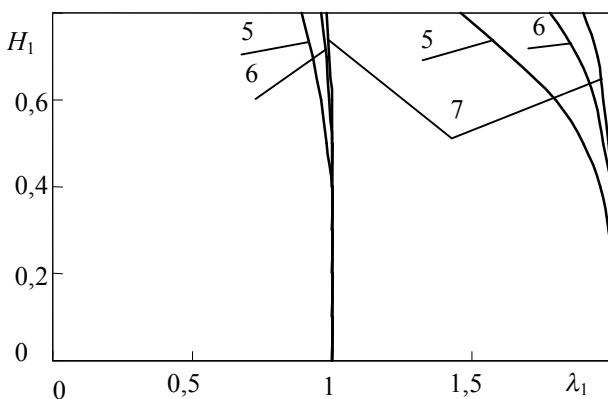


Рис. 6. Робоча довжина включення

Для всіх матеріалів  $\nu_{12} = 0,25$ , для відношення  $E_1/E_2 > 1$  включення орієнтоване вздовж напрямку більшої жорсткості. Характеристики для матеріалів взяті з праць [5, 31].

Відшарування включення проходить повільніше при його орієнтуванні вздовж напрямку більшої жорсткості матриці. Зі зростанням навантаження робоча довжина включення зменшується, але повного вилучення включення не відбувається. Чим менша початкова робоча довжина включення, тим більше навантаження потрібне для його відшарування.

## Література

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги де формівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. Sih G.C. Plane extension of rigidly embedded line inclusions // Developments in mechanics. – V. 3, Pt. 1. Solid mech. and mater. – New York: Willey, 1965. – P. 61–79.
4. Панасюк В.В., Бережницький Л.Т., Труш И.И. Распределение напряжений около дефектов типа жестких остроугольных включений // Проблемы прочности. – 1972. – № 7. – С. 3–9.
5. Бережницький Л.Т., Садивский В.М. О напряженно-деформированном состоянии вблизи жестких остроугольных включений в однородном анизотропном теле // Физико-химическая механика материалов. – 1975. – Т. 11, № 6. – С. 55–62.
6. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
7. Бережницький Л.Т., Громьяк Р.С. К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроконечного жесткого включения // Физико-химическая механика материалов. – 1977. – V. 13, № 2. – С. 39–47.
8. Эберт Л.Дж., Райт П.К. Механические поверхности раздела. – Композиционные материалы. Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах / Редактор А. Меткалф. – М.: Мир, 1978. – С. 42–76.
9. Fukuda Hiroshi, Chou Tsu-Wei. Stiffness and strength of short fibre composites as affected by crack and plasticity // Fibre Sci. and Technol. – 1981. – V. 15, № 4. – P. 243–256.
10. Iremonger M.J., Wood W.G. Effects of geometry on stress in discontinuous composite materials // Strain Anal. – 1969. – V. 4, № 2. – P. 121–126.
11. Paipetis A., Galotis C. Modeling the stress-transfer efficiency of carbon-epoxy interfaces // Proc. Roy. Soc. London. A. – 2001. – V. 457, № 2011. – P. 1555–1577.
12. Бережницький Л.Т., Сенюк М.Н. Применение метода локальных вариаций для определения зон пластичности возле дефектов // Тез. докл. 3 Респ. конф. “Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе”. – Киев, 1982. – С. 113–114.
13. Brussat T.R., Westmann R.A. Interfacial slip around rigid fiber inclusions // J. Comp. Mater. – 1974. – Т. 8, № 4. – P. 364–377.

14. *Shioiri J., Inoue K.* Micromechanics of interfacial failure in short fiber reinforced composite materials // Rep. 1-st Soviet-Japanese Symp. on Composite Materials. – Moscow, 1979. – P. 286–295.
15. *Бережницький Л.Т., Кундрат Н.М.* Упруго-пластическіе деформації в окрестности жесткого включения // Проблемы прочности. – 1984. – № 11. – С. 62–69.
16. *Кундрат Н.М.* Локальне руйнування ортотропної матриці з лінійним включенням // Прикладна механіка. – 1996. – Т. 32, № 8. – С. 63–71.
17. *Кундрат Н.М.* Локальне руйнування в композиції з жорстким лінійним включенням // Механіка композиційних матеріалів і конструкцій. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 115–127.
18. *Кундрат М.М., Сулим Г.Т.* Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним стрічковим включенням за симетричного та антисиметричного навантажень // Машинознавство. – 2003. – № 11. – С. 3–8.
19. *Кундрат М.М., Сулим Г.Т.* Композиція з включенням за розтягу зосередженими силами // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2005. – Т. 48, № 1. – С. 88–97.
20. *Панасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 248 с.
21. *Сулим Г.Т., Кундрат М.М.* Гранична рівновага та руйнування в ортотропному тілі зі жорстким стрічковим включенням // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 69–79.
22. *Шами К.* Механизм передачи нагрузки через поверхность раздела / Композиционные материалы. Т. 6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – М.: Мир, 1978. – С. 42–87.
23. *Thomason P.F.* Plastic flow and fracture in fibre composites // J. Mech. Phys. Solids. – 1972. – V. 20. – P. 19–32.
24. *Сулим Г.Т., Рокач И.В.* Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении / “Материалы 10 Конф. мол. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов. Львов, 12–16 окт., 1981”. Львов, 1983. – 3 с. – Деп. в ВИНТИ 12 апр. 1983 г. № 1948-83 Деп.
25. *Gdoutos E.E., Giannakopoulou A.* Stress and failure analysis of brittle matrix composites. Part1: Stress analysis / Int. J. of Fracture. – 1999. – V. 98. – P. 263–277.
26. *Maekawa Z., Hamada H., Yoshioka S., Ikuta N., Tanimoto T., Hirashima T.* Fiber fragment distribution in embedded single filament test // Interface Polym., Ceram. and Metal Matrix Compos.: Proc. 2-nt Int. Conf. Compos. Interfaces, Cleveland, Ohio, June 13–17, 1988. – New-York etc., 1988. – P. 553–565.
27. *Kim J.K, Mai Y.W.* Engineered interfaces in fiber reinforced composites. – Elsevier Science Ltd, 1998. – 418 p.
28. *Кундрат М.М.* Про відшарування жорсткого лінійного включення // Доповіді НАН України. – 2001. – № 2. – С. 60–65.
29. *Сулим Г.Т., Кундрат М.М.* Відшарування тонкого жорсткого включення при циклічному навантаженні за умов плоскої задачі термопружності // Праці 13-го міжнародного колоквиуму “Механічна втома металів - 2006” 25–28 вересня 2006р, Тернопіль. – Тернопіль: Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя, 2006. – С 504–509.
30. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
31. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.

Отримана 25.06.10

*M. Kundrat, H.Sulym*

**Separation the line inclusion in a orthotropic matrix**

*National University of Water Management and Natural Resources Application, Rivne; Ivan Franko Lviv National University, Lviv*

*The analytical decision the problem of fiber rigid inclusion separation from the orthotropic plate in conditions of plane problem is obtained. The body is subjected to the uniaxial stresses tension parallel to the fibre on infinite distance. The develop of localized zones of prefracture are precede to process of separation along the plate-inclusion boundary from it ends to central part. The decision of the problem are reduce to the Cauchy problem for the differential equation of the first order relative to working length of inclusion. Influence of orthotropy plate material on inclusion separation are research.*

*Диференціальна*

## 9-th European Fluid Mechanics Conference

9-13 September 2012 University of Rome “Tor Vergata”

The 9th European Fluid Mechanics Conference will be held at the Main lecture hall of the University of Rome “Tor Vergata”

([Faculty of Economics, via Columbia 2, I-00133 Rome](#))

The European Fluid Mechanics Conferences are run under the auspices of the [EUROMECH](#) organization and covers all aspects of theoretical, experimental and computational fluid mechanics.