УДК 624.075: 539.3

МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦІЇ В ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПІДКРІПЛЕНОЇ ПЛАСТИНИ

Т.Ушак

Конструкторське бюро
ТзОВ "Ю.Ді.Сі.Холдинг",
м. Львів

У статті запропонований новий наближений метод розв'язування задач про вільні коливання пластин, підкріплених ребрами жорсткості. Задача знаходження частот вільних коливань таких пластин зводиться до розв'зування диференціальних рівнянь з сингулярними коефіцієнтами у формі дельта-функцій. В основу методу покладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Стаття містить порівняльні результати та демонструє ефективність методу при розв'язуванні задач динаміки. Отримані нові результати, які є невідомі в спеціалізованій літературі.

метод дискретизації, узагальнене квазідиференціальне рівняння 4-го порядку, підкріплена пластина, вільні коливання

Силові тонкостінні конструкції, які застосовують у машинобудуванні, будівництві та інших галузях, являють собою, як правило, складені пластини та оболонки, підкріплені повздовжнім та поперечним набором стрингерів (ребер жорсткості) та шпангоутів. Підкріплення конструкції в місцях передачі зосереджених сил і моментів розвантажують пластину (оболонку) від згину і наближує її напружений стан до безмоментного, найбільш раціонального з точки зору вагової віддачі.

Задача про вільні коливання стрингерної пластини є узагальненням класичної задачі про коливання гладкої пластини. При цьому в напрямку, перпендикулярному набору, приходимо до узагальненого квазідиференціального рівняння (УКДР) 4-го порядку зі змінними коефіцієнтами у формі дельта-функції та її похідної (якщо жорсткість ребра на кручення враховується). Граничні умови, як і при відсутності набору, на краях паралельних цьому напрямку передбачаються шарнірними.

Для дослідження вільних коливань та стійкості підкріплених пластин використовують, як правило, наближені методи [1, 2]. Для цієї цілі часто використовують варіаційний підхід. Однак розрахункові схеми, які ґрунтуються на варіаційних методах, не застосовні до пружних систем, що описуються диференціальними рівняннями з узагальненими функціями в коефіцієнтах (системи з дискретно-неперервним розподілом параметрів). У статті для розв'язання задачі вільних коливань підкріпленої пластини застосовується метод дискретизації [3, 4] , який ґрунтується на концепції квазіпохідних для квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами та апроксимації розв'язків відповідних їм систем лінійних диференціальних рівнянь із мірами [5].

Постановка задачі про коливання пластини сталої товщини підкріпленої ребрами жорсткості. Рівняння вільних згинних коливань пластин сталої товщини $D\nabla^4 y + \rho H \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ можна узагальнити для випадку пластини підкріпленої ребрами жорсткості, якщо використати узагальнені функції [6]. Нехай пластина підкріплена ребрами, які орієнтовані по лініям $x = x_i$ $(i = 1, 2, ...)$ симетрично відносно серединної площини. В цьому випадку співвідношення пружності, які встановлюють зв'язок погонних згинаючих моментів та моментів

кручення в поперечних перерізах пластини з функцією прогину приймається у вигляді [6]:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right),$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - D^*_{zz}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2},$$

$$H_x = -(1-\mu)D\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z},\ \ H_y = -(1-\mu)D\frac{\partial^2 y}{\partial z\partial x} - D^*_{yx}\frac{\partial^2 y}{\partial z\partial x},$$

де $D = \dfrac{EH^3}{12(1-\mu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластинки;

$D^*_{zz} = \sum_i E_i(z)I_{xi}(z)\delta(x-x_i)$; $D^*_{zx} = \sum_i G_i(z)I_{кpi}(y)\delta(x-x_i)$ – згинна жорсткість та жорсткість на кручення ребра; $I_x = Fy^2_{ц.в} + I_{x'}$; $y_{ц.в.}$ – координати центра ваги ребра жорсткості, відносно осі x, яка проходить через серединну площину пластини; F – площа ребра жорсткості; $I_{x'}$ – головний момент інерції відносно x'; $I_{кр}$ – момент інерції на кручення; E – модуль пружності сталі; $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль зсуву сталі; μ – коефіцієнт Пуасона, H – товщина пластини.

Рівняння вільних згинних коливань пластини буде

$$D\nabla^4 y + \frac{\partial}{\partial x}\left(D^*_{zx}\frac{\partial^3 y}{\partial z^2\partial x}\right) + D^*_{zz}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} +$$

$$+\left[\rho H + \sum_i m_i\delta(x-x_i)\right]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

де ρ – густина сталі, $m_i = \rho F_i$ – погонна маса ребер жорсткості, F_i – площа ребра.

Приймаємо, що кожне з ребер має сталу за довжиною згинну жорсткість та жорсткість на кручення. Краї пластини $z = 0$ та $z = b$ будемо рахувати вільно опертими:

$$y_{z=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}_{z=0} = y_{y=b} = \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}_{z=b} = 0.$$

Застосувавши до рівняння (1) метод Фур'є, отримаємо

$$D\nabla^4 y + \frac{\partial}{\partial x}\left(D^*_{zx}\frac{\partial^3 y}{\partial z^2\partial x}\right) + D^*_{zz}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} -$$

$$-\left[\rho H + \sum_i m_i\delta(x-x_i)\right]\omega^2 y = 0. \qquad (2)$$

Розв'язок рівняння (2) шукаємо [6] у вигляді одинарного тригонометричного ряду

$$y(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(x)\sin\frac{k\pi z}{b}. \qquad (3)$$

Підставивши (3) в (2), отримаємо рівняння

$$Y_k^{IV} - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2\left[\left(2 + \frac{D^*_{zx}}{D}\right)Y_k{}'\right]' +$$

$$+\left(\frac{k\pi}{b}\right)^4\left(1 + \frac{D^*_{zz}}{D}\right)Y_k - \frac{\left[\rho H + \sum_i m_i\delta(x-x_i)\right]\omega^2}{D}Y_k = 0. \qquad (4)$$

Узагальнене квазідиференціальне рівняння 4-го порядку. На відкритому інтервалі E дійсної осі розглядаємо таке рівняння:

$$\left(a_0(x)y''\right)'' + a_2(x)y + \left(a_1(x)y'\right)' = 0, \qquad (5)$$

де $a_0^{-1}(x)$ – локально обмежена і вимірна на I функція, I – відкритий інтервал дійсної осі; $a_1(x) = b_1'(x)$; $a_2(x) = b_2'(x)$; $b_0(x); b_1(x); b_2(x)$ – функції локально обмеженої на I варіації (клас $BV^+_{loc}(I)$ [7]), $b_1'(x), b_2'(x)$ – узагальнені похідні (міри на I) [7]. Для розв'язування рівняння (5) введемо квазіпохідні наступним чином:

$$y^{[0]}(x) \overset{def}{\equiv} y(x);\ y^{[1]} = y'(x);\ y^{[2]} = a_0 y''(x);$$

$$y^{[3]}(x) = a_1 y'(x) + (a_0 y''(x))'. \qquad (6)$$

Вихідне КДР (5) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = C'(x)\mathbf{Y}(x), \qquad (7)$$

де

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix};\ C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & -a_1(x) & 0 & 1 \\ -a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Система (7) коректна [7], оскільки виконується необхідна й достатня умова коректності:

$$\left(\Delta C(x)\right)^2 = 0,\ \forall x \in I, \qquad (9)$$

де

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta b_1(x) & 0 & 0 \\ -\Delta b_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

– матриця стрибків цієї системи.

Нехай $B(x,s)$-фундаментальна матриця системи (7), структура якої добре вивчена в [7, 8], з такими властивостями:

1. $B(s,s) = E$, де E – одинична матриця;
2. $B(x,s) = \left(E + \Delta\mathbf{C}(x)\right)\cdot B(x-0,s)$; (11)

3. $\forall x_1, x_2, x_3 \in I \;\; B(x_3, x_2) \cdot B(x_2, x_1) = B(x_3, x_1)$.

За допомогою цієї матриці для довільного початкового вектора $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(x_0)$, $x_0 \in I$, розв'язок системи (3) записується у вигляді

$$\mathbf{Y}(x) = B(x, x_0)\mathbf{Y}_0 . \qquad (12)$$

Апроксимуємо змінні коефіцієнти рівняння (5) так. Розіб'ємо стрижень довжиною l на n рівних ділянок. Нехай початкова точка $x_0 = 0$, кінцева $x_n = l$, крок розбиття $h = x_{k+1} - x_k$, де $k = 0,...,n$.

Апроксимуємо коефіцієнт $a_0(x)$ наступним чином (l - апроксимація [5]). На кожному з проміжків $[x_k; x_{k+1})$ величина $a_0(x)$ є сталою:

$$a_0(x) \approx \frac{b_0(x_{k+1}) - b_0(x_k)}{h} = a_k, \; x \in [x_k, x_{k+1}),$$

де

$$b_0(x) = \int_0^x a_0(t)dt. \qquad (13)$$

Апроксимуємо відповідним чином [9] коефіцієнти $a_2(x) = b_2'(x)$ та $a_1(x) = b_1'(x)$ (d – апроксимація) на проміжку $[x_k; x_{k+1})$:

$$a_1(x) \approx b_1(x_k)\delta(x - x_k) \overset{def}{=} c_k \delta(x - x_k),$$

$$a_2(x) \approx b_2(x_k)\delta(x - x_k) \overset{def}{=} d_k \delta(x - x_k). \qquad (14)$$

Тут $\delta(x - x_k)$ – δ -функція Дірака з носієм у точці $x = x_k$.

Після апроксимації КДР (5) матиме вигляд:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta_k y_n''\right)'' + \left\{\sum_{k=0}^{n-1} d_k \delta(x - x_k)\right\} y_n + \qquad (15)$$

$$+ \left[\left\{\sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta(x - x_k)\right\} y_n'\right]' = 0,$$

що є частковим (конкретизованим) випадком КДР (1), де θ_k – характеристична функція проміжку $[x_k; x_{k+1})$:

$$\theta_k = \begin{cases} 1, \; x \in [x_k, x_{k+1}[, \\ 0, \; x \notin [x_k, x_{k+1}[. \end{cases}$$

Відомо [5], що при $n \to \infty$ усі розв'язки цього рівняння (15) разом із своїми квазіпохідними $y^{[1]}$, $y^{[2]}$ і $y^{[3]}$ рівномірно прямують до відповідних розв'язків і квазіпохідних рівняння (5):

$$\lim_{n \to \infty} \left| y_n^{[i]}(x) - y(x)^{[i]} \right| = 0, \;\; i = \overline{0,3}. \qquad (16)$$

Матриця стрибків (10) у нашого випадку є такою:

$$\Delta C(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_k & 0 & 0 \\ -d_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

При такому визначенні коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 фундаментальна матриця $B(x_{k+1}, x_k)$ квазідиференціального рівняння $(a_0 y'')'' = 0$ має вигляд [8]:

$$B(x_{k+1}, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & h & \dfrac{h^2}{2!a_k} & \dfrac{h^3}{3!a_k} \\ 0 & 1 & \dfrac{h}{a_k} & \dfrac{h^2}{2!a_k} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Фундаментальну матрицю диференціальної системи (7), враховуючи властивості (11) можна знайти за формулою [8]:

$$B(x_n, x_0) = B(l, 0) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(E + \Delta C(x_k)\right) B(x_{k+1}, x_k). \qquad (19)$$

Матрицю $B(l,0)$ можна побудувати й іншим шляхом [10].

Реалізація методу дискретизації в задачі про коливання пластини сталої товщини, підкріпленої ребрами жорсткості. Розглянемо вільні коливання пластини (лист товщиною 2 мм), яка підкріплена ребрами жорсткості (див. рис.1), довжиною взовж осі z – 2 м, а вздовж осі x – 1 м. Краї пластини $z = 0$ та $z = b = 2\,м$, а також $x = 0$ та $x = 1\,м$ шарнірно оперті. Ребра жорсткості складаються з прокатних кутників L20x20x4 (рис. 1), які розміщені вздовж осі z в точках $x_i = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9\,м$

Вихідні дані задачі: матеріал листа та ребер жорсткості – сталь; $E = 2{,}1 \cdot 10^6\,кг/см^2$; $F = 1{,}46\,см^2$; $y_{ц.в.} = 7\,мм$; $\mu = 0{,}3$; $G = 8{,}07692 \cdot 10^5\,кг/см^2$; $I_{x'} = 0{,}218311\text{см}^4$; $I_{кр} = 0.0739856\text{ см}^4$; $\rho = 7850\,кг/м^3$.

Введемо в рівняння (4) параметр $\alpha = 0;1$. При $k = 1$ задача про вільні коливання підкріпленої пластини

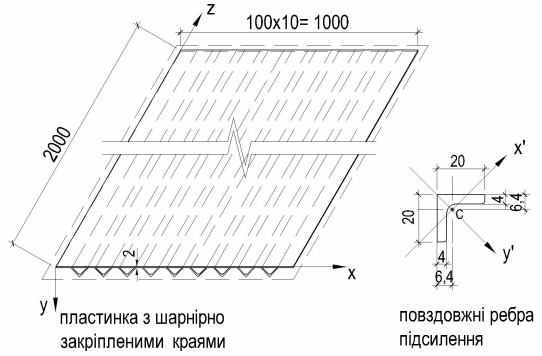

Рис.1

зводиться до розв'язання узагальненого квазідиференціального рівняння 4-го порядку (УКДР):

$$y^{IV} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left[\left(2 + \frac{\alpha\, GI_{кр}}{D} \sum_i \delta(x - x_i)\right) y'\right]' +$$

$$\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \left(1 - \frac{\rho\, H\omega^2 b^4}{D\pi^4} + \alpha \left[\frac{\pi^4 EI_x + m_i b^4}{D\pi^4}\right] \sum_i \delta(x - x_i)\right) y = 0 \tag{20}$$

з такими крайовими умовами:

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0. \tag{21}$$

Квазіпохідні для розв'язку рівняння (20) позначимо наступним чином:

$$y^{[0]}(x) \overset{def}{\equiv} y(x)\,;\; y^{[1]}(x) = y'(x)\,;\; y^{[2]}(x) = y''(x)\,;$$

$$y^{[3]}(x) = -\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(2 + \frac{\alpha\, GI_{кр}}{D} \sum_i \delta(x - x_i)\right) y'(x) + y'''(x)\,, \tag{22}$$

Вихідне КДР (20) зводиться до системи рівнянь першого порядку:

$$\mathbf{Y}'(x) = C'(x)\mathbf{Y}(x), \tag{23}$$

де $\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}$;

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & 1 \\ f_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_1 = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(2 + \frac{\alpha\, GI_{кр}}{D} \sum_i \delta(x - x_i)\right);$$

$$f_2 = -\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \left(1 - \frac{\rho\, H\omega^2 b^4}{D\pi^4} + \alpha \left[\frac{\pi^4 EI_x + m_i b^4}{D\pi^4}\right] \sum_i \delta(x - x_i)\right).$$

За допомогою фундаментальної матриці $B(x, x_0)$ для довільного початкового вектора $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(x_0),\; x_0 \in I$, розв'язок системи (23) записується у вигляді (12).

Дискретизацію проведемо так. Відрізок [0,1] точками $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 1$ розіб'ємо на n рівних частин, довжина кожної з яких дорівнює $n^{-1}=h$ (крок розбиття). Замість рівняння (20) розглянемо КДР n-го наближення (метод дискретизації):

$$y_n^{IV} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left[\left\{2h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_k) + \frac{\alpha\, GI_{кр}}{D} \sum_{i=0}^{9} \delta(x - x_i)\right\} y_n'\right]' +$$

$$+ \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \left\{\left(1 - \frac{\rho\, H\omega^2 b^4}{D\pi^4}\right) h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_k) + \right.$$

$$\left. + \alpha \left[\frac{\pi^4 EI_x + m_i b^4}{D\pi^4}\right] \sum_{i=0}^{9} \delta(x - x_i)\right\} y_n = 0. \tag{24}$$

Матриця стрибків (10) для цього випадку

$$\Delta C(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 h & 0 & 0 \\ -\left(1 - \frac{\rho\, H\omega^2 b^4}{D\pi^4}\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

За виключенням точок x_i, де матриця стрибків

$$\Delta C(x_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{1i} & 0 & 0 \\ f_{2i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

де

$$f_{1i} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(2h + \frac{\alpha\, GI_{кр}}{D}\right);$$

$$f_{2i} = -\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \left[\left(1 - \frac{\rho\, H\omega^2 b^4}{D\pi^4}\right) h + \alpha \left[\frac{\pi^4 EI_x + m_i b^4}{D\pi^4}\right]\right].$$

Фундаментальна матриця $B(x_{k+1}, x_k)$ КДР $(a_0 y'')'' = 0$ у нашому випадку має вигляд [8]:

$$B(x_{k+1}, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3!} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Фундаментальну матрицю системи диференціальних рівнянь (23) можна знайти за формулою (19).

Врахуємо граничні умови закріплення і сформуємо характеристичне рівняння.

З урахуючи умови закріплення в точці $x = 0$ початкова матриця $\mathbf{Y}_0$, має вигляд $\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Позначимо

$$B_n(x_n, x_0)\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

У випадку шарнірного опирання в кінцевій точці $(x = 1)$ характеристичне рівняння буде мати вигляд

$$\left|A(\omega^2)\right| = \det\begin{pmatrix} a_{12}(\omega^2) & a_{14}(\omega^2) \\ a_{32}(\omega^2) & a_{34}(\omega^2) \end{pmatrix} = 0. \qquad (28)$$

Задаючи значення ω з визначеним кроком, за допомогою комп'ютера отримуємо з рівняння (28) частоти вільних коливань ω_i.

У порівняльній табл. 1 подано величини перших трьох значень частот коливань підкріпленої пластини ω_i при $k = 1;2;3$, та при різних значеннях параметра α. При значенні $\alpha = 0$ отримаємо коливання пластини без ребер жорсткості та порівняємо з аналітичними значеннями. При обчисленнях з кроком розбиття 10^{-3} і 10^{-4} значення частот коливань на четвертому знаку після коми не змінювалось, тому зменшення кроку розбиття не має сенсу.

Розглянемо також вільні коливання пластини шарнірно опертої в точках $z = 0$ та $z = b = 2\,м$ при різних закріпленнях поздовжніх країв у точках $x = 0$ та $x = 1\,м$.

Розглянемо такі умови закріплення на поздовжніх краях пластини: 1) шарнірне: $y = 0$ і $y^{[2]} = 0$; 2) жорстке: $y = 0$, $y' = 0$; 3) вільний край: $y^{[2]} = 0$ і $y^{[3]} = 0$.

Цим трьом умовам закріплень умовно присвоїмо індекси 0, 1, 2 відповідно, і розглядатимемо задачі типів (ij), $i, j = 0,1,2$. Так, наприклад, задача типу (01) означає, що на лівому краї $(x = 0)$ пластина закріплена шарнірно, а на правому $(x = l)$ – жорстко.

Таблиця 1

Порівняльна таблиця частот коливань при шарнірних закріпленнях повздовжніх країв підкріпленої пластини

Метод	ω_i	α	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
Аналітичний метод [11]	ω_1	0	12,2125	19,5399	31,7524
	ω_2	0	41,5223	48,8498	61,0622
	ω_3	0	90,3722	97,6997	109,9122
Авторський метод	ω_1	0	12,2125	19,5400	31,7524
	ω_2	0	41,5224	48,8498	61,0622
	ω_3	0	90,3722	97,6996	109,9122
Аналітичний метод [11]	ω_1	1	–	–	–
	ω_2	1	–	–	–
	ω_3	1	–	–	–
Авторський метод	ω_1	1	31,3235	113,1679	250,3427
	ω_2	1	52,6910	125,1603	259,3166
	ω_3	1	97,9113	155,7600	280,6242

Початкову матрицю $\mathbf{Y}_0$, що враховує умови закріплення в точці $x = 0$, для жорсткого закріплення і вільного кінця відповідно:

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Позначимо

$$B(l,0)\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}. \qquad (30)$$

Тоді, залежно від умов закріплення на правому краї $(x = l)$, отримаємо характеристичне рівняння для визначення частоти вільних коливань, відповідно, для шарнірного, жорсткого закріплення та для вільного кінця

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = 0; \ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0;$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = 0. \qquad (31)$$

У табл. 2 подані значення частот вільних коливань підкріпленої ребрами пластини при різних закріпленнях повздовжніх країв та різних значеннях числа півхвиль.

Висновки. Запропоновано новий наближений метод обчислення частот вільних коливань пластин, підкріплених ребрами жорсткості, в основу якого закладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Метод може бути покладений в основу досліджень коливань оболонок обертання, підкріплених стрингерами та шпангоутами.

Метод характеризується простотою і універсальністю алгоритму та швидкістю збіжності. Отримані при цьому

Таблиця 2

Частоти коливань при різних типах закріплень повздовжніх країв підкріпленої пластини

Тип	k	ω_1	ω_2	ω_3
01	1	33,83	61,40	112,44
11	1	37,80	71,70	128,37
12	1	26,12	34,90	62,94
01	2	114,19	129,92	166,54
11	2	115,76	136,05	179,02
12	2	91,02	114,00	129,80
01	3	251,02	262,34	288,00
11	3	251,98	266,26	296,82
12	3	169,49	250,80	261,56

числові результати при відповідних значеннях параметрів співпадають з відомими.

Література

1. *Машиностроение.* Энциклопедия, Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др. - М.: Машиностроение. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. В 2-х кн. Кн. 2 / А. В. Александров, Н. А. Алфутов, В. В. Астанин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. - 1995.- 624 с.
2. *Вибрации* в технике. Справочник: В 6 т./ Под ред. В.В. Болотина. - М.: Машиностроение, 1978. - Т.1 - 352 с.
3. *Тацій Р.* Вільні коливання стрижневих систем із дискретно-неперервним розподілом параметрів / Р. Тацій, Т. Ушак // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. - 2010. - Вип. 11. - С. 179-188.
4. *Тацій Р., Ушак Т.* Розв'язання задач про втрату стійкості стрижнів з дискретно-неперервним розподілом параметрів методом дискретизації // Машинознавство.- 2009.-№5.- С.41-47.
5. *Тацій Р.М., Іщук В.В., Кісілевич В.В.* Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами // Вісн. Київ. ун-ту: Математика і механіка. – К.: Либідь, 1990. № 32. – С .128-131.
6. *Образцов И.Ф., Онанов Г.Г.* Строительная механика скошенных систем. – М.: Машиностроения, 1973.- 654 с.
7. *Тацій Р.М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння // Препр. АН України ІППММ. – 1994. - № 2-94. – С. 1-54.
8. *Тацій Р.М., Пахолок Б.Б.* Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25-28.
9. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. - М.: Иностр. лит, 1968. -749 с.
10. *Тацій Р. М., Ушак Т.І.* Метод дискретизації в задачах стійкості стрижнів змінної жорсткості // Вісник НУ„Львівська політехніка"„Теорія та практика будівництва". - 2005. - №545. - С. 178-181.
11. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е, доп. и переработ. - Л.: Машиностроение (Ленингр. отд.-ние), 1976. - 320 с.

Отримана 14.07.10

T. Ushak

Discritization method for free vibrations of supported plates

Design Office "Ju.DI.Ci.Holding", Lviv

We propose a new approximate method for solving a class of problems with free vibrations of a plate supported by stiffening ribs. In order to find the frequencies of such free oscillations, one has to solve a set of differential equations with singular, delta-like coefficients. Our method relies on approximating the coefficients, of the corresponding differential equation, with generalized functions. We present a comprehensive study and demonstrate the efficiency of this method in solving dynamical problems. We have also obtained some novel results. In the present article the new rough method of problems solving of resistance loss of single-span rods with change parameters is introduced. In the core of the method lies the approximation of coefficients of the corresponding differential equations with generalized functions. The article gives a demonstration of method efficiency while resistance problems solving. New results unknown in specialized literature before are achieved.

Інформація

22nd EUROPEAN CONFERENCE ON DIAMOND, DIAMOND LIKE MATERIALS, CARBON NANOTUBES AND NITRIDES

Garmisch-Partenkirchen, Germany
September 4 — 8, 2011

http://www.diamond-conference.elsevier.com

DIAMOND is a leading international conference in the fields of diamond, DLC (diamond-like carbon), carbon nano-tubes, graphene, and nitrides. It brings together scientists and engineers with both fundamental and applied interests in these fields. At the conference, you will learn of current state-of-art as well as future trends of carbon and nitrides related applications.

The conference will discuss the significant improvements in material growth processes, material purity and doping of these materials over the past few years. The improvements have lead to the discovery of new phenomena in these materials as well as to novel device applications with increasingly impressive performance levels.

Abstracts are now being accepted in the following categories:

* Diamond
* DLC (diamond-like carbon)
* Graphene
* Carbon nanotubes
* III-nitrides: growth properties and applications