

**В. Станкевич**

Доцент, канд. фіз.-мат.наук

**С. Кінтер**

Інженер

Львівська філія Дніпропетровського  
національного університету  
залізничного транспорту,  
м. Львів

УДК 539.3

## КРИТИЧНА ШВИДКІСТЬ ВАНТАЖУ ДЛЯ БАЛКИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПАСТЕРНАКА

*Розглянуто задачу про рух вантажу вздовж балки, яка опирається на пружну основу. Як приклад, вибрана модель основи Пастернака. Отримано значення швидкості вантажу, за якої прогини балки досягають резонансних значень.*

**пружна основа Пастернака, представлення дАламбера, критична швидкість**

**Вступ.** Під час дослідження напружено-деформованого стану стрічкових фундаментів споруд, залізничних шпал і рейок використовують розрахункову модель балки на пружній основі. При цьому певним чином схематизують залежність між навантаженням на ґрунтовий масив та його осадкою. Історично склалося, що найбільшого поширення набула модель пружної основи Фусса-Вінклера, в якій коефіцієнт пропорційності між навантаженням і деформацією характеризується коефіцієнтом постелі. В моделі Фусса-Вінклера опору зазнає лише ґрунт, який знаходиться безпосередньо під навантаженням, а решта ґрунту деформацій не зазнає.

Разом з тим експерименти показують, що осадки зазнає також ґрунт, що знаходиться поза штампом чи фундаментом. Тому були запропоновані інші моделі пружної основи, які враховують деформацію ґрунту поза штампом під навантаженням шляхом введення другого коефіцієнта постелі для опірності ґрунту зсуву в горизонтальній площині. Також потрібно зазначити, що під час розрахунку залізничних рейок, шпал тощо потрібно враховувати динамічний характер навантаження, оскільки інерційні члени можуть істотно впливати на параметри напружено-деформованого стану тіл.

**Постановка і розв'язування задачі.** Нехай вантаж вагою  $P$  рухається зі швидкістю  $v$  по безмежній балці, яка опирається на пружну основу Пастернака. Початок декартової системи координат сумісно з вантажем (рис. 1).

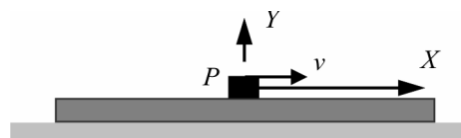


Рис. 1. Схема задачі

Задача дослідження напружено-деформованого стану балки зводиться до розв'язання диференціального рівняння відносно прогинів  $y$  балки [6]:

$$E J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p(y, t) = 0, \quad (1)$$

де  $J$ ,  $A$  – момент інерції та площа попереччя балки;  $E$ ,  $\rho$  – модуль Юнга і густина матеріалу балки;  $N$  – поздовжня сила (у залізничній рейці спричинена температурними напруженнями, угоном колії);  $t$  – час. Тиск  $p(y, t)$  пов'язаний з прогинами балки залежністю

$$p(y, t) = k_0 y - G_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Тут  $k_0$  – коефіцієнт пропорційності (постелі),  $G_0$  – коефіцієнт зсуву матеріалу основи. З врахуванням (2) рівняння (1) запишемо так:

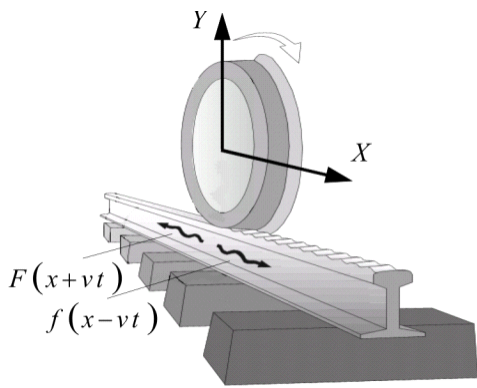


Рис. 2. Представлення дАламбера

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (N - G_0) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k_0 y = 0.$$

Другий доданок характеризує явище послаблення поздовжньої сили за рахунок опірності ґрунту зсуву в горизонтальній площині.

Розв'язок рівняння вибираємо у формі дАламбера [4]:

$$y(x, t) = f(x - vt) + F(x + vt).$$

Тут  $f$ ,  $F$  – функції, які описують поширення прямої та зворотної біжучих хвиль у додатньому і від'ємному напрямках осі  $X$  (рис. 2).

Для їх визначення використовуємо подання Ейлера (надалі розглядаємо функцію  $f$  прямої хвилі; для  $F$  – аналогічні викладки):

$$f(x - vt) = e^{p(x - vt)},$$

де  $p$  – невідомий параметр, який підлягає визначенню.

Провівши операції диференціювання, диференціальне рівняння відносно прогинів балки зводимо до алгебричного бікватратного рівняння відносно  $p$ :

$$p^4 + 2(n_1 + n_2 v^2) p^2 + n_3^2 = 0,$$

де

$$2n_1 = \frac{N - G_0}{EJ}, \quad 2n_2 = \frac{\rho A}{EJ}, \quad n_3^2 = \frac{k_0}{EJ},$$

Ввівши позначення

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{n_3 \mp (n_1 + n_2 v^2)}{2}},$$

розв'язки  $p$  запишемо у вигляді

$$p_{1,2,3,4} = \pm \alpha \pm i\beta,$$

де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Введемо заміну змінних  $\xi = x \mp vt$ . Від'ємний знак в аргументі  $\xi$  стосується до прямої біжучої хвилі, додатний – зворотної хвилі. Тоді загальні розв'язки  $f$ ,  $F$  диференціального рівняння (1) запишемо у вигляді [3]

$$\begin{Bmatrix} f \\ F \end{Bmatrix} = e^{-\alpha \xi} \left( \begin{Bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \sin \beta \xi + \begin{Bmatrix} C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} \cos \beta \xi \right) + e^{\alpha \xi} \left( \begin{Bmatrix} C_3 \\ D_3 \end{Bmatrix} \sin \beta \xi + \begin{Bmatrix} C_4 \\ D_4 \end{Bmatrix} \cos \beta \xi \right), \quad (3)$$

де  $C_j, D_j, j = \overline{1, 4}$  – невідомі сталі коефіцієнти.

Для їх визначення задовольняємо крайові умови задачі:

а) переміщення на безмежності відсутні

$$f(+\infty) = 0, \quad F(-\infty) = 0.$$

Звідси  $D_1 = D_2 = C_3 = C_4 = 0$ . З врахуванням останнього маємо

$$\begin{Bmatrix} f(\xi) \\ F(\xi) \end{Bmatrix} = e^{\mp \alpha \xi} \left( \begin{Bmatrix} C_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} \sin \beta \xi + \begin{Bmatrix} C_2 \\ D_4 \end{Bmatrix} \cos \beta \xi \right);$$

б) переміщення в біжучих хвилях під вантажем однакові:

$$f(0) = F(0);$$

в) кути нахилу дотичних на гребенях біжучих хвиль при  $\xi = 0$  однакові

$$\frac{\partial f(0)}{\partial \xi} = \frac{\partial F(0)}{\partial \xi};$$

г) неперервність згинального моменту під вантажем

$$\frac{\partial^2 f(0)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 F(0)}{\partial \xi^2};$$

д) поперечна сила під вантажем зазнає стрибок на величину  $P$ :

$$\frac{\partial^3 f(0)}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 F(0)}{\partial \xi^3} = \frac{P}{EJ}.$$

Після задоволення крайових умов отримуємо

$$\begin{Bmatrix} C_2 \\ C_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_4 \\ -D_3 \end{Bmatrix} = -\frac{P}{4EJ} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} (\alpha^2 + \beta^2).$$

Запишемо остаточні вирази функцій  $f$ ,  $F$ :

$$\begin{Bmatrix} f \\ F \end{Bmatrix} = \mp \frac{P e^{\mp \alpha \xi}}{4EJ(\alpha^2 + \beta^2)} \left[ \frac{\sin \beta \xi}{\beta} \pm \frac{\cos \beta \xi}{\alpha} \right].$$

Визначимо значення аргумента  $\xi$ , при якому прогини балки досягають екстремальних значень:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = +\infty, \quad \xi = 0.$$

Перше значення  $\xi = +\infty$  не представляє інтересу, оскільки на безмежності переміщення відсутні; значення  $\xi = 0$  вказує на те, що максимальні прогини балки спостерігаються під вантажем. В цьому випадку

$$f_{\text{дин}}^{\text{max}} = f(\xi=0) = -\frac{P}{4EJ\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} = -\frac{P}{2\sqrt{2}EJn_3\sqrt{n_3 - n_1 - n_2}v^2}.$$

Поклавши  $v=0$ , отримаємо найбільші статичні прогини. Аналогічний результат отримуємо для функції  $F$ . Видно, що прогини досягають безмежного значення, якщо підкореновий вираз у знаменнику прямує до нуля

$$n_3 - n_1 - n_2 v^2 = 0.$$

Отримане рівняння дозволяє визначити критичне (резонансне) значення швидкості вантажу:

$$v_{\text{крит}} = \sqrt{\frac{n_3 - n_1}{n_2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{k_0 E J} - N + G_0}{\rho A}}. \quad (4)$$

Поклавши в (4)  $N = G_0 = 0$ , отримаємо критичну швидкість для випадку балки на пружній основі Фусса-Вінклера [2] та Тимошенка [5]. Величина швидкості залежить від геометричних і механічних параметрів балки та пружної основи.

**Числові результати.** Як приклад, проводили розрахунки для рейок Р65 ( $A=82.65 \text{ см}^2$ ,  $J=3540 \text{ см}^4$ ,  $m=64.72 \text{ кг/м}$ ), Р50 ( $A=65.99 \text{ см}^2$ ,  $J=2011 \text{ см}^4$ ,  $m=51.67 \text{ кг/м}$ ), Р43 ( $A=57 \text{ см}^2$ ,  $J=1489 \text{ см}^4$ ,  $m=44.65 \text{ кг/м}$ ). Модуль Юнга матеріалу рейок  $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коефіцієнт постелі  $k_0=67.7 \text{ МПа}$ , параметр  $N - G_0 = 2000 \text{ кН}$ . Значення критичної швидкості  $v_{\text{крит}}$  для рейок становлять відповідно 260, 250.5 і 249 м/с. При  $N - G_0 = 0$  (модель Фусса-Вінклера) ці

значення дорівнюють 266, 258 і 258 м/с. Видно, що модель пружної основи Фусса-Вінклера дає порівняно з моделлю Пастернака дещо завищені значення  $v_{\text{крит}}$ . Для рейок Р65, Р50, Р43 ці перевищення становлять відповідно 2.3%, 3% і 3,6%. За певних умов (підтоплення ґрунту тощо) критична швидкість може сягати менших значень.

**Висновки.** Отримані результати відображають вірну тенденцію до збільшення прогинів балки (залізничної рейки) зі зростанням швидкості вантажу, описане явище досліджено також у роботах [1, 2, 5]. Разом з тим (4) дає лише наближене значення  $v_{\text{крит}}$ , оскільки не враховує демпфування. Тому до отриманого результату потрібно відноситися з певним застереженням.

## Література

1. Ахенбах Д. Движущаяся нагрузка, приложенная к пластине на упругом полупространстве. // Прикладная механика, 1967. - № 4. - с. 83-88.
2. Беляев А. Н. Динамическая реакция пластины на действие движущейся нагрузки. // Journal of Siberian Federal University Mathematics & Physics, 2009. - 2. - pp. 41-47.
3. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям - М.: Физматлит, 2001. - 576 с.
4. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003. - 303 с.
5. Esveld C. Modern Railway Track. // MRT-Production, 2001. - 654 p.
6. Karnovsky I. A., Lebed O. I. Formulas for structural dynamics. Tables, graphs and solution. // McGraw-Hill, 2004. - 494 p.

Отримана 12.08.10

V. Stankevych, S. Kinter

### Critical velocity of load for beam on an Pasternak elastic foundation

Dnipropetrovsk National University of Railroad Transport, Lviv Department, Lviv

The problem about movement of load along a beam laying on the elastic foundation is considered. As an example the model of the Pasternak basis is choosen. Value of speed at which beam deflections reach resonance values is received.