УДК 539.3

ДО ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ НЕПОЛОГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ ТА РОЗТАШУВАННЯ

Т. Шопа

Канд. фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Івано-Франківськ

Розглянуто задачу про усталені поперечні коливання шарнірно опертої ортотропної циліндричної непологої панелі з множиною отворів довільної форми, розташування та з різними типами граничних умов на їх контурах у рамках теорії оболонок, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Розв'язок ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь та секвенціальному підході до побудови функції Гріна. Задачу зведено до систем інтегральних рівнянь, які розв'язано методом колокацій.

неполога циліндрична ортотропна панель, отвір, функція Гріна, секвенціальний підхід, коливання, частоти вільних коливань

Вступ. Основні відомі результати сформульованої у назві статті тематики отримано в рамках класичної теорії [1 – 5]. Відома низка праць, в яких знайдено розв'язки задач про коливання анізотропних шарнірно опертих оболонок з отворами в рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви, однак не враховує повороти навколо нормалі до серединної поверхні [6 – 8].

У цій статті розв'язано задачу про коливання ортотропної непологої циліндричної панелі з множиною отворів довільної конфігурації та крайових умов на їхніх контурах у рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про усталені поперечні коливання шарнірно опертої ортотропної циліндричної непологої панелі з кутом розхилу ψ, яка містить N отворів довільної форми та розташування, контури яких є криві $L^{(j)}$, $j=1...N$. Нехай осі ортотропії співпадають з поздовжнім та поперечним напрямками панелі, яка працює в режимі усталених коливань за гармонічним законом у часі.

Використовуватимемо такі позначення: $\vec{n}, \vec{\tau}$ – нормальний та дотичний вектор вздовж деякого напряму, E_1, E_2 – модулі Юнга матеріалу, G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву матеріалу, ν_{12}, ν_{21} – коефіцієнти Пуасона матеріалу, ρ – густина матеріалу, k_1, k_2 – головні кривини панелі, $l, R, 2h, \psi$ – довжина, радіус, товщина та кут розкриття панелі відповідно, q_i, m_i – компоненти зовнішнього навантаження, w – прогин панелі, u_n, u_τ – нормальні та тангенціальні компоненти переміщень точок серединної поверхні, γ_n, γ_τ – нормальні та тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні, Q_n – нормальна компонента перерізувальної сили, M_n, M_τ, N_n, N_τ – нормальні й тангенціальні компоненти момента та мембранної сили.

Крайові умови за шарнірного опирання на всіх чотирьох сторонах циліндричної панелі приймемо такими:

$$w=0,\ M_n=0,\ N_n=0,\ u_\tau=0,\ \gamma_\tau=0. \qquad (1)$$

Розглянемо два типи крайових умов на контурах:
а) задані розподілені переміщення

$$\begin{aligned}
&w_n^{(i)}=w_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),\ u_n^{(i)}=u_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),\\
&\gamma_n^{(i)}=\gamma_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),\ u_\tau^{(i)}=u_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),\\
&\gamma_\tau^{(i)}=\gamma_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t)\quad i=1,....,N.
\end{aligned} \qquad (2)$$

b) задані розподілені зусилля

$$\begin{aligned}
&Q_n^{(i)}=Q_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),\ M_n^{(i)}=M_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),\\
&N_n^{(i)}=N_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),\ N_\tau^{(i)}=N_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t),\\
&M_\tau^{(i)}=M_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t)\quad i=1,....,N.
\end{aligned} \qquad (3)$$

2. Розв'язувальна система рівнянь. Дослідження проводитимемо за використання рівнянь теорії непологих оболонок, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Рівняння руху непологої оболонки, що враховують нормальну компоненту інерційної сили для випадку поперечних коливань, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_{i1}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial N_{i2}}{\partial\alpha_2}+k_iQ_i=-q_i\quad (i=1,2),\\
&\frac{\partial Q_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial\alpha_2}-(k_1N_{11}+k_2N_{22})-2h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-q_3,\\
&\frac{\partial M_{i1}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial M_{i2}}{\partial\alpha_2}-Q_i=-m_i\quad (i=1,2).
\end{aligned} \qquad (4)$$

На основі розподілу напружень та переміщень:

$$U_i=u_i+\gamma_i\alpha_3,\ U_3=w,\ \sigma_{33}=\begin{cases}0, & |\alpha_3|<h,\\ \sigma_{33}^{\pm}, & \alpha_3=\pm h,\end{cases}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{N_{ij}}{2h}+\frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3\quad (-h\le\alpha_3\le h),$$

$$\sigma_{i3}=\begin{cases}\dfrac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3|<h,\\ \sigma_{i3}^{\pm}, & \alpha_3=\pm h,\end{cases}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ i\ne j). \qquad (5)$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду:

$$M_{ii}=D_i\left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial\alpha_i}+\nu_{ij}\frac{\partial\gamma_j}{\partial\alpha_j}\right),Q_i=\Lambda_i\left(\gamma_i+\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}-k_iu_i\right),$$

$$N_{ii}=B_i\left[\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\nu_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_j}+(k_i+\nu_{ij}k_j)w\right],$$

$$M_{ij}=M_{ji}=D_{ij}\left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial\gamma_j}{\partial\alpha_i}\right),$$

$$N_{ij}=N_{ji}=B_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}\right),$$

$$D_i=\frac{2h^3E_i}{3(1-n_{ij}n_{ji})},\ D_{ij}=\frac{2h^3G_{ij}}{3},\ B_{ij}=2hG_{ij},$$

$$B_i=\frac{2hE_i}{(1-n_{ij}n_{ji})},\ \Lambda_i=2hG_{i3},\quad i,\ j=1,2,\ i\ne j. \qquad (6)$$

Нормальні та дотичні компоненти переміщень та зусиль визначаються за формулами:

$$\gamma_n=n_1\gamma_1+n_2\gamma_2,\ \gamma_\tau=\tau_1\gamma_1+\tau_2\gamma_2,\ w,$$
$$u_n=n_1u_1+n_2u_2,\ u_\tau=\tau_1u_1+\tau_2u_2,$$

$$M_n=(M_{11}n_1+M_{12}n_2)n_1+(M_{21}n_1+M_{22}n_2)n_2,$$

$$M_\tau=(M_{11}n_1+M_{12}n_2)\tau_1+(M_{21}n_1+M_{22}n_2)\tau_2,$$

$$N_n=(N_{11}n_1+N_{12}n_2)n_1+(N_{21}n_1+N_{22}n_2)n_2,$$

$$N_\tau=(N_{11}n_1+N_{12}n_2)\tau_1+(N_{21}n_1+N_{22}n_2)\tau_2,$$

$$Q_n=Q_1n_1+Q_2n_2. \qquad (7)$$

Внаслідок підстановки фізичних співвідношень (6) у рівняння руху (4) розв'язувальна система динамічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$[\mathbf{L}]\{U\}=-\{P\}, \qquad (8)$$

$$\{U\}=\{u_1,\ u_2,\ w,\ \gamma_1,\ \gamma_2\},\ \{P\}=\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ m_1,\ m_2\},$$

$$\mathbf{L}_{11}=B_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+B_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-k_1^2\Lambda_1,$$

$$\mathbf{L}_{22}=B_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+B_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-k_2^2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{33}=\Lambda_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\Lambda_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-$$

$$-(k_1B_1(k_1+\nu_{12}k_2)+k_2B_2(k_2+\nu_{21}k_1))-2h\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{14}=\mathbf{L}_{41}=k_1\Lambda_1,\mathbf{L}_{25}=\mathbf{L}_{52}=k_2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{44}=D_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+D_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-\Lambda_1,$$

$$\mathbf{L}_{55}=D_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+D_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{34}=-\mathbf{L}_{43}=\Lambda_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\mathbf{L}_{35}=-\mathbf{L}_{53}=\Lambda_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{12}=(B_1\nu_{12}+B_{12})\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{21} = \left(B_{12} + B_2\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{45} = \left(D_1\nu_{12} + D_{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\ \mathbf{L}_{15} = \mathbf{L}_{51} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{54} = \left(D_{12} + D_2\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}, \mathbf{L}_{24} = \mathbf{L}_{42} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{13} = \left(k_1\Lambda_1 + B_1k_1 + B_1k_2\nu_{12}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{31} = -\left(k_1\Lambda_1 + B_1k_1 + B_2k_2\nu_{21}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{23} = \left(k_2\Lambda_2 + B_2k_2 + B_2k_2\nu_{21}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{32} = -\left(k_2\Lambda_2 + B_2k_2 + B_1k_1\nu_{12}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}.$$

У результаті отримуємо дві крайові задачі: задача (1), (2), (8) та задача (1), (3), (8).

3. Побудова функції Ґріна задачі. Функцію Ґріна для двох вищезгаданих крайових задач знайдено за допомогою методу Фур'є та секвенціального подання дельта-функції (у вигляді послідовності дельтаподібних функцій).

Подамо в системі рівнянь (8)

$$\begin{aligned}
q_1 &= \mathrm{T}_1^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0 t\right),\\
q_2 &= \mathrm{T}_2^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0 t\right),\\
q_3 &= \mathrm{T}_3^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0 t\right),\\
m_1 &= \mathrm{T}_4^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0 t\right),\\
m_2 &= \mathrm{T}_5^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0 t\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\delta_\varepsilon(\xi,\xi^r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}g\left(\dfrac{\left|\xi-\xi^r\right|}{\varepsilon}\right), & \left|\xi-\xi^r\right| \le \varepsilon,\\ 0, & \left|\xi-\xi^r\right| > \varepsilon, \end{cases}$$

де $g\left(\varepsilon\right)\left(0 \le \varepsilon \le 1\right)-$ спадна гладка функція,

$$g\left(1\right) = 0,\ \int_0^1 g(\xi)d\xi = 1.$$

Розкладемо співвідношення (9) у ряди Фур'є

$$q_3^r = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_3^r C_{km}\left(\varepsilon\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\ \right),$$

$$\begin{Bmatrix} q_1^r \\ m_1^r \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_4^r \end{Bmatrix} C_{km}\left(\varepsilon\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\ \right),$$

$$\begin{Bmatrix} q_2^r \\ m_2^r \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} T_2^r \\ T_5^r \end{Bmatrix} C_{km}\left(\varepsilon\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\ \right), \tag{10}$$

де

$$\begin{aligned}
\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\right) &= \cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),\\
\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right) &= \sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),\\
\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right) &= \sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right);\\
\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha\right) &= \cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),
\end{aligned}$$

$$\lambda_{1k} = \frac{k\pi}{l_1}, \lambda_{2m} = \frac{m\pi}{l_2},\ l_2 = R\psi,\ l_1 = l,$$

$$C_{km}\left(\varepsilon\right) = \mu_{km}\frac{4}{l_1 l_2}\varphi\left(\lambda_{1k}\varepsilon\right)\varphi\left(\lambda_{2m}\varepsilon\right),$$

$$\mu_{km} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } k \ne 0,\ m \ne 0,\\ \dfrac{1}{2}, \text{ якщо } k = 0,\ m \ne 0,\\ \dfrac{1}{2}, \text{ якщо } k \ne 0,\ m = 0,\\ \dfrac{1}{4}, \text{ якщо } k = 0,\ m = 0, \end{cases}$$

$\varphi -$ вагова функція, яка визначає тип узагальненого підсумовування, що відповідає певному вибору базової функції дельтаподібної послідовності.

Розв'язки шукаємо у такій формі:

$$w\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{\varepsilon km}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right)\sin\left(\omega_0 t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} u_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \\ \gamma_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} u_{1\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{1\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \end{Bmatrix}\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\right)\sin\left(\omega_0 t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} u_2\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \\ \gamma_2\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} u_{2\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{2\varepsilon km}\left(\alpha^r\right) \end{Bmatrix}\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right)\sin\left(\omega_0 t\right). \tag{11}$$

Після підстановки співвідношень (9), розкладених у ряди (10), та рядів (11) у розв'язувальну систему рівнянь (8) отримаємо сукупність систем лінійних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів невідомих функцій. Часової координати вдається позбутись у випадку усталених гармонічних коливань. У результаті одержимо функцію Ґріна задачі в аналітичному вигляді:

$$U\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \lim_{\varepsilon\to0} U\left(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}\left(\varepsilon\right)\times$$

$$\times\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha\right)\right]\left[\mathbf{U_{km}}\right]\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{T^r\right\}\sin\left(\omega_0 t\right), \tag{12}$$

$$U\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \left\{u_1(\alpha,\alpha^r,t), u_2(\alpha,\alpha^r,t), w(\alpha,\alpha^r,t),\right.$$

$$\left.\gamma_1(\alpha,\alpha^r,t), \gamma_2(\alpha,\alpha^r,t)\right\}$$

$$\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} \Phi^{cs}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^{sc}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^{ss}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi^{cs}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi^{sc}_{km}\left(\alpha^r\right) \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{U_{km}}\right]=\begin{bmatrix} u^1_{1\varepsilon km} & u^2_{1\varepsilon km} & u^3_{1\varepsilon km} & u^4_{1\varepsilon km} & u^5_{1\varepsilon km} \\ u^1_{2\varepsilon km} & u^2_{2\varepsilon km} & u^3_{2\varepsilon km} & u^4_{2\varepsilon km} & u^5_{2\varepsilon km} \\ w^1_{\varepsilon km} & w^2_{\varepsilon km} & w^3_{\varepsilon km} & w^4_{\varepsilon km} & w^5_{\varepsilon km} \\ \gamma^1_{1\varepsilon km} & \gamma^2_{1\varepsilon km} & \gamma^3_{1\varepsilon km} & \gamma^4_{1\varepsilon km} & \gamma^5_{1\varepsilon km} \\ \gamma^1_{2\varepsilon km} & \gamma^2_{2\varepsilon km} & \gamma^3_{2\varepsilon km} & \gamma^4_{2\varepsilon km} & \gamma^5_{2\varepsilon km} \end{bmatrix},$$

$$u^1_{1km}=\frac{1}{\det\left|\mathbf{L^{km}}\right|}\det\begin{vmatrix} \mathbf{L}^{km}_{22} & \mathbf{L}^{km}_{23} & \mathbf{L}^{km}_{24} & \mathbf{L}^{km}_{25} \\ \mathbf{L}^{km}_{32} & \mathbf{L}^{km}_{33} & \mathbf{L}^{km}_{34} & \mathbf{L}^{km}_{35} \\ \mathbf{L}^{km}_{42} & \mathbf{L}^{km}_{43} & \mathbf{L}^{km}_{44} & \mathbf{L}^{km}_{45} \\ \mathbf{L}^{km}_{52} & \mathbf{L}^{km}_{53} & \mathbf{L}^{km}_{54} & \mathbf{L}^{km}_{55} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\mathbf{L}^{km}_{11}=-B_1\lambda^2_{1k}-B_{12}\lambda^2_{2m}-k_1^2\Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}^{km}_{22}=-B_{12}\lambda^2_{1k}-B_2\lambda^2_{2m}-k_2^2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}^{km}_{33}=-\Lambda_1\lambda^2_{1k}-\Lambda_2\lambda^2_{2m}-$$
$$-\left(k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)+k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right)+2\rho h\omega_0^2,$$

$$\mathbf{L}^{km}_{44}=-D_1\lambda^2_{1k}-D_{12}\lambda^2_{2m}-\Lambda_1, \mathbf{L}^{km}_{12}=-\left(B_1\nu_{12}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{km}_{55}=D_{12}\lambda^2_{1k}-D_2\lambda^2_{2m}-\Lambda_2, \mathbf{L}^{km}_{21}=-\left(B_2\nu_{21}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}^{km}_{45}=-\left(D_1\nu_{12}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{km}_{54}=-\left(D_2\nu_{21}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{km}_{34}=\mathbf{L}^{km}_{43}=-\Lambda_1\lambda_{1k},\ \mathbf{L}^{km}_{35}=\mathbf{L}^{km}_{53}=-\Lambda_2\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}^{(km}_{13}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_1k_2\nu_{12}\right)\lambda_{1k},$$
$$\mathbf{L}^{km}_{31}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}^{km}_{23}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{km}_{32}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_1k_1\nu_{12}\right)\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}^{km}_{14}=\mathbf{L}^{km}_{41}=k_1\Lambda_1,\ \mathbf{L}^{km}_{25}=\mathbf{L}^{km}_{52}=k_2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}^{km}_{15}=\mathbf{L}^{km}_{51}=\mathbf{L}^{km}_{24}=\mathbf{L}^{km}_{42}=0,$$

4. Зведення основних крайових задач до систем інтегральних рівнянь та розв’язування методом колокацій. Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі, коли на отворі задані переміщення, розглянемо узагальнений контур $L=L^{(1)}\cup L^{(2)}.....\cup L^{(N)}$ та такі функції на ньому:

$$T(\xi)=$$
$$=\begin{cases} T^{(1)}(\xi),\ \xi\in L^{(1)}, T^{(1)\mathrm{T}}(\xi)=\left\{T^{(1)}_1,.......,T^{(1)}_5\right\}^T \\ T^{(2)}(\xi), \xi\in L^{(2)}, T^{(2)\mathrm{T}}(\xi)=\left\{T^{(2)}_1,.......,T^{(2)}_5\right\}^T \\ \vdots \\ \vdots \\ T^{(N)}(\xi),\ \xi\in L^{(N)}, T^{(N)\mathrm{T}}(\xi)=\left\{T^{(N)}_1,.......,T^{(N)}_5\right\}^T \end{cases},$$

$$U_0(\alpha)=\begin{cases} U^{(1)}_0(\alpha), & \alpha\in L^{(1)} \\ U^{(2)}_0(\alpha), & \alpha\in L^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ U^{(N)}_0(\alpha), & \alpha\in L^{(N)} \end{cases},$$

де

$$U^{(i)}_0(\alpha)=\left\{u^{(i)}_{n0}(\alpha),\ u^{(i)}_{\tau0}(\alpha),\ w^{(i)}_{n0}(\alpha),\ \gamma^{(i)}_{n0}(\alpha),\ \gamma^{(i)}_{\tau0}(\alpha)\right\}^T,$$
$$i=\overline{1,N}.$$

На основі знайденої функції Ґріна (12), граничних умов на отворах (6), фізичних співвідношень (3), виразів для нормальних і дотичних компонент переміщень та зусиль (4) отримано систему $5N$ інтегральних рівнянь:

$$U_0(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega^{(U)}_{km}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E_{km}}(\xi)\right]\times$$
$$\times\left\{T\ \ (\xi)\right\}dl(\xi); \qquad (13)$$

$$\left[\mathbf{\Omega^{(U)}_{km}}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix} u_{1n}(\alpha) & ... & ... & .... & u_{5n}(\alpha) \\ u_{1\tau}(\alpha) & ... & ... & ... & u_{5\tau}(\alpha) \\ w_{1n}(\alpha) & ... & ... & ... & w_{5n}(\alpha) \\ \gamma_{1n}(\alpha) & ... & ... & ... & \gamma_{5n}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}(\alpha) & ... & ... & ... & \gamma_{5\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$
$$u_{in}(\alpha)=n_1(\alpha)u^i_{1\varepsilon km}\Phi^{cs}_{km}(\alpha)+n_2(\alpha)u^i_{2\varepsilon km}\Phi^{sc}_{km}(\alpha),$$
$$u_{i\tau}(\alpha)=\tau_1(\alpha)u^i_{1\varepsilon km}\Phi^{cs}_{km}(\alpha)+\tau_2(\alpha)u^i_{2\varepsilon km}\Phi^{sc}_{km}(\alpha),$$
$$w_{in}(\alpha)=w^i_{\varepsilon km}\Phi^{ss}_{km}(\alpha),$$
$$\gamma_{in}(\alpha)=n_1(\alpha)\gamma^i_{1\varepsilon km}\Phi^{cs}_{km}(\alpha)+n_2(\alpha)\gamma^i_{2\varepsilon km}\Phi^{sc}_{km}(\alpha),$$
$$\gamma_{i\tau}(\alpha)=\tau_1(\alpha)\gamma^i_{1\varepsilon km}\Phi^{cs}_{km}(\alpha)+\tau_2(\alpha)\gamma^i_{2\varepsilon km}\Phi^{sc}_{km}(\alpha).$$

Аналогічно на основі знайденої функції Ґріна (12) отримуємо систему інтегральних рівнянь у випадку, коли на отворі задані зусилля.

Введемо в розгляд функцію на узагальненому контурі L

$$F_0(\alpha) = \begin{cases} F_0^{(1)}(\alpha), & \alpha \in L^{(1)} \\ F_0^{(2)}(\alpha), & \alpha \in L^{(2)} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ F_0^{(N)}(\alpha), & \alpha \in L^{(N)} \end{cases},$$

де

$$F_0^{(i)}(\alpha) = \left\{ N_{n0}^{(i)}(\alpha), N_{\tau 0}^{(i)}(\alpha), Q_{n0}^{(i)}(\alpha), M_{n0}^{(i)}(\alpha), M_{\tau 0}^{(i)}(\alpha) \right\}^T,$$

$i = \overline{1, N}$.

Отримуємо систему $5N$ інтегральних рівнянь

$$\left\{F_0(\alpha)\right\} = \frac{1}{2}\left\{T(\alpha)\right\} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \times$$

$$\times \left[\mathbf{\Omega_{km}^{(P)}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E_{km}}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\} dl(\xi); \qquad (14)$$

$$\left[\mathbf{\Omega_{km}^{(P)}}(\alpha)\right] = \begin{bmatrix} N_{1n}(\alpha) & .. & .. & .. & N_{5n}(\alpha) \\ N_{1\tau}(\alpha) & .. & .. & .. & N_{5\tau}(\alpha) \\ Q_{1n}(\alpha) & .. & .. & .. & Q_{5n}(\alpha) \\ M_{1n}(\alpha) & .. & .. & .. & M_{5n}(\alpha) \\ M_{1\tau}(\alpha) & .. & .. & .. & M_{5\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} N_{in} = {} & B_1 n_1^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{1k} u_{1km}^i - \nu_{12}\lambda_{2m} u_{2km}^i + \\ & + (k_1 + \nu_{12} k_2) w_{km}^i) + \\ & + 2B_{12} n_1 n_2 \Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m} u_{1km}^i + \lambda_{1k} u_{2km}^i\right) + \\ & + B_2 n_2^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{2m} u_{2km}^i - \nu_{21}\lambda_{1k} u_{1km}^i + \\ & + (k_2 + \nu_{21} k_1) w_{km}^i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{i\tau} = {} & B_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{1k} u_{1km}^i - \nu_{12}\lambda_{2m} u_{2km}^i + \\ & + (k_1 + \nu_{12} k_2) w_{km}^i) + \\ & + B_{12}(n_1\tau_2 + n_2\tau_1)\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m} u_{1km}^i + \lambda_{1k} u_{2km}^i\right) + \\ & + B_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{2m} u_{2km}^i - \nu_{21}\lambda_{1k} u_{1km}^i + \\ & + (k_2 + \nu_{21} k_1) w_{km}^i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{in} = {} & D_1 n_1^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^i - \nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^i) + \\ & + 2D_{12} n_1 n_2 \Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}\gamma_{1km}^i + \lambda_{1k}\gamma_{2km}^i\right) + \\ & + D_2 n_2^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{2m}\gamma_{2km}^i - \nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{i\tau} = {} & D_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^i - \nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^i) + \\ & + D_{12}(n_1\tau_2 + n_2\tau_1)\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}\gamma_{1km}^i + \lambda_{1k}\gamma_{2km}^i\right) + \\ & + D_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)(-\lambda_{2m}\gamma_{2km}^i - \nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{in} = {} & \Lambda_1 n_1 \Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(\gamma_{1km}^i + \lambda_{1k} w_{km}^i - k_1 u_{1km}^i\right) + \\ & + \Lambda_2 n_2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\gamma_{2km}^i + \lambda_{2m} w_{km}^i - k_2 u_{2km}^i\right). \end{aligned}$$

Для розв'язання систем інтегральних рівнянь використовуємо метод колокацій. Для цього контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття j-го контуру, $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків розбиття j-го контуру, r=1… $S^{(j)}$). На кожному з прямолінійних відрізків контурів для фіктивних зусиль задаємо такий розподіл:

$$T^{(i)r}(\xi) = T^{(i)r}\delta\left(\alpha^{(i)r}, \xi\right)$$

та мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій α^q.

У результаті система, що відповідає системі інтегральних рівнянь (13), міститиме $5\sum_{j=1}^{N} S^{(j)}$ лінійних алгебричних рівнянь і матиме такий вигляд:

$$\left\{U_0\left(\alpha^q\right)\right\} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega_{km}^{(U)}}\left(\alpha^q\right)\right] \times$$

$$\times \left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}, \qquad q = 1....\sum_{j=1}^{N} S^{(j)}.$$

Аналогічно отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь, що відповідає системі інтегральних рівнянь (14):

$$\left\{F_0\left(\alpha^q\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{T\left(\alpha^q\right)\right\} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon) \times$$

$$\times \left[\mathbf{\Omega_{km}^{(P)}}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}, \qquad q = 1....\sum_{j=1}^{N} S^{(j)}.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідних систем лінійних алгебричних рівнянь.

Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $n(\alpha) = \left(n_1(\alpha), n_2(\alpha)\right)$ і дотичною $\tau(\alpha) = \left(\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha)\right)$ на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на контурі отвору отримуємо з таких виразів:

$$\begin{Bmatrix} u_n(\alpha) \\ u_\tau(\alpha) \\ w_n(\alpha) \\ \gamma_n(\alpha) \\ \gamma_\tau(\alpha) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon) \times$$

$$\times \left[\mathbf{\Omega_{km}^{(U)}}\left(\alpha\right)\right]\left[\mathbf{E_{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\};$$

$$\begin{Bmatrix} N_n(\alpha)\\ N_\tau(\alpha)\\ Q_n(\alpha)\\ M_n(\alpha)\\ M_\tau(\alpha)\end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{P})}(\alpha\ )\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}(\alpha^r)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}.$$

Висновки. Комбінуючи відповідні, отримані в роботі, інтегральні рівняння, можна розглядати випадки різних типів крайових умов на різних контурах, а також різні випадки мішаних крайових умов у межах одного контру.

В рамках знайденого розв'язку можна розглядати випадки, коли контур отвору містить кутові точки та вироджується в тріщину, оскільки на етапі числового розв'язування методом колокацій проводиться дискретизація його контуру.

Література

1. *Poor A. L., Barut A, Madenic E.*. Free vibration of laminated cylindrical shells with a circular cutout // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – **312**. – P. 55–73.

2. *Toda S, Komatsu K.*. Vibrations of circular cylindrical shells with cutouts // Journal of Sound and Vibration. –1977. – **52**, № 4. – P. 497–510.

3. *Ramamurti V, Pattabiraman J.*. Dynamic behavior of a cylindrical shell with a cutout // Journal of Sound and Vibration. –1977. –**52**, № 2. – P. 193–200.

4. *Mahabaliraja, Boyd D. E.*. Vibration of stiffened cylinders with cutouts // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – **52**, № 1. – P. 65–78.

5. *Sivasubramonian B, Rao G. V.,Krishnan A.*. Free vibration of longitudinally stiffened curved panels with cutout // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – **226**. № 1, 9. – P. 41–55.

6. *Шопа Т.* Дослідження частот власних коливань трансверсально-ізотропної циліндричної панелі з круговим отвором // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – **52**, № 2.

7. *Сухорольський М., Шопа Т.* Поперечні коливання трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки з круговим отвором // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 162-172.

8. *Бурак Я. Й., Сухорольський М. А., Шопа Т. В.* Усталені коливання трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки з масивним включенням // Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. – С. 241-243.

Отримана 24.05.11

T. Shopa

To the construction of the solution of the problem on the vibration of the orthotropic cylindrical non-shallow panel with the set of the cutouts of the arbitrary configuration

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Ivano-Frankivsk

In the framework of the shell theory that takes into consideration the shear displacements and the rotation angles around the normal to the middle surface of the shell the problem on the vibration of simply supported orthotropic cylindrical non-shallow panel with the set of cutouts of the arbitrary form, location, and types of boundary conditions on their contours is considered in the paper. Solution is built on the base of the sequential approach to the construction of the Green function. The boundary value problems are reduced to systems of integral equations that are solved using the collocation method.

Інформація

9-th Europian Fluid Mechanics Conference

9-13 September 2012 University of Rome "Tor Vergata"

The 9th European Fluid Mechanics Conference will be held at the Main lecture hall of the University of Rome "Tor Vergata"
(Faculty of Economics, via Columbia 2, I-00133 Rome)

The European Fluid Mechanics Conferences are run under the auspices of the EUROMECH organization and covers all aspects of theoretical, experimental and computational fluid mechanics.