

УДК 539.374

Я. Бурак

Чл.-кор. НАН України,
професор., докт. фіз.-мат. наук

Б. Гайвась

Ст. наук. співр., канд. фіз.-мат. наук

Центр математичного моделювання
ІППММ ім. Я. С. Підстригача
НАН України,
м. Львів

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ПРОЦЕСІ ОСУШЕННЯ ПОРИСТОГО ШАРУ

На основі розв'язку задачі вологоперенесення під час осушення вивчається вплив параметрів процесу в пористому шарі на зміну напружено-деформованого стану. Дано оцінку ефектів зворотного впливу напружень на специфіку зміни вологовмісту. Досліджено ефект зміни параметрів пористості в процесі сушіння.

дифузія, конвекція, регулярна структура, сушіння

Вступ. У процесі сушіння тіл відбувається зміна форм зв'язку вологи з матеріалом і її видалення внаслідок випаровування та подальшого масоперенесення до вільних поверхонь [1]. У літературі розглянуті різні модифікації теорії сушіння [2, 3]. Капілярно-пористі тіла в процесі осушення деформуються, розтріскуються, що зумовлено розвитком напруженого стану, який створюється неоднорідним розподілом вологи при сушінні та «усадкою» матеріалу. В працях [4, 5] запропонований загальний підхід до опису тепломасоперенесення і напружено-деформованого стану твердих тіл. Так, зокрема, в праці [4] отримано рівняння, які описують у взаємозв'язку тепломасообмінні і деформаційно-релаксаційні процеси при сушінні капілярно-пористих тіл.

Однак ці рівняння не дають можливості описати в достатній мірі вплив капілярних явищ та дослідити вклад ефектів взаємозв'язку деформаційних та масообмінних процесів при сушінні.

У цій статті в розвиток постановки, методики розв'язування та результатів праці [6] вивчається взаємозв'язок деформаційних і масообмінних процесів на прикладі ізотермічного симетричного сушіння пористого шару.

1. Постановка та розв'язок задачі вологоперенесення. Розглядається віднесений до декартової системи координат (x, y, z) початково насичений рідиною пористий

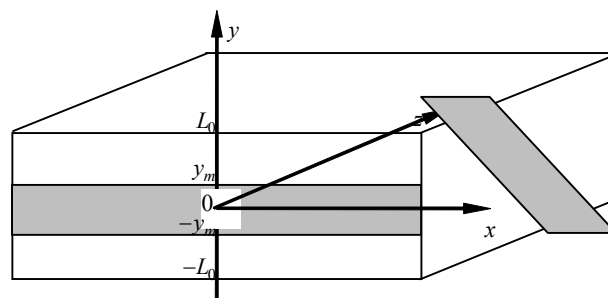


Рис. 1. Модель осушення з врахуванням осушеної і рідинної зон

шар (рис. 1), який займає область $-L_0 < y < L_0$. Шар контактує з газовим середовищем, яке є сумішшю сухого повітря і пари. В процесі сушіння температура газового середовища і шару сталі. Приймається, що розміри пор однакові та нехтується плівковим масопереносом [1]. Умови на поверхнях шару однакові, і процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні тіла $y = 0$.

У процесі осушення всередині шару відбувається перехід вологи з рідкого стану у газоподібний стан та виникає потік парогазової суміші назовні.

Встановлено [6, 10], що вологовміст W_v у газовій суміші осушених пор ($\bar{y}_m < \bar{y} < 1$) визначається залежністю $W_v(\bar{y}, \bar{y}_m) = \frac{\rho_v \Pi}{\rho_s(1-\Pi)}(1 - \bar{y}_m)$, а у насиченій вологою області ($0 < \bar{y} < \bar{y}_m$) – виразом

$$W_L(\bar{y}_m) = \frac{\rho_L \Pi}{\rho_s(1-\Pi)} \bar{y}_m,$$

де $\bar{y} = y/L_0$ і \bar{y}_m – безрозмірні координати точки шару і рухомої межі контакту осушеної та вологої областей, ρ_v – об’ємна густина пари в порах, $\rho_s = \frac{m_s}{V_s}$ – густина скелету

(m_s – маса матеріалу скелету в його об’ємі V_s), $\rho_L = \frac{m_L}{V_L}$

(m_L – маса води в її об’ємі V_L), Π – пористість.

Вологовміст, згідно з [1], визначається як відношення маси вологи до маси абсолютно сухого матеріалу.

Одним з основних параметрів процесу сушіння є відносна пружність водяної пари $\eta_v = \rho_v/\rho_n$, де ρ_n – значення ρ_v при насиченні на межі фазового переходу $y = \pm y_m$. Для неї отримана така залежність у наближенні примежового шару:

$$\eta_v(\bar{y}, \bar{y}_m) = a_1 + \sqrt{a_4(\bar{y}_m) + a_3|\bar{y}|}, \quad (1)$$

де $a_1 = -\frac{1+a}{b}$, $a = \frac{\mu_g D M_a}{K_g \rho_{al} R T}$, $b = \frac{\rho_n M_a}{\rho_{al} M_v}$, K_g – коефі-

цієнт проникливості тіла відносно газу; μ_g – коефіцієнт динамічної в’язкості газу; D – коефіцієнт дифузії в пористому шарі, M_a , M_v – молярні маси повітря та пари, R , T – газова стала та абсолютна температура, $a_2 = (1 - a_1)^2$, $a_3 = -2a_1 \Gamma_0 \lambda$, $\Gamma_0 = C_0 \frac{L_0}{\delta} \frac{D_1}{D}$,

$C_0 = 1 + b \eta_0$, $\lambda = -\frac{(1 - \eta_0)[2a_1 - \eta_0 - 1]}{a_1 - \eta_0 + \Gamma_0 a_1 (1 - \kappa_m)}$, $\eta_0 = \frac{\rho_{vl}}{\rho_n}$ –

пружність пари на зовнішній поверхні примежового шару, ρ_{vl} , ρ_{al} – об’ємна густина пари і повітря на поверхні $y = L_0 + \delta$; D_1 – коефіцієнт дифузії в пограничному шарі; $a_4 = a_2 - a_3 \bar{y}_m$.

Коли приймається наближення про конвективне осушення, то відносна пружність пари визначається у вигляді

(1), де $a_3 = 2a_1 \beta'(\eta_1 - \eta_0)$, $\eta_1 = \frac{\rho_{vl}}{\rho_n}$, $\beta' = \frac{L_0 \beta}{D}$, β – кое-

фіцієнт масообміну, а ρ_{vl} , ρ_{al} – густина пари на поверхні пористого шару.

2. Визначення напружено-деформованого стану в процесі осушення. В процесі осушення тіл спостерігається явище усадки. Явище усадки обумовлене хімічними і фізико-хімічними процесами, які протікають при взаємодії скелету з водою та при зміні вологості. Механізм усадки пояснюють існуванням двох груп сил, які виникають при випаровуванні вологи, а саме капілярних сил, що появляються при частковому заповненні пор водою

та сил, які своїм виникненням зобов’язані видаленню міжшарової води при низькій вологості, що приводить до інтенсивного розвитку усадочних явищ.

Як і у випадку механо-дифузійних процесів [12] прийmemo, що дисторсія деформацій ε_W зв’язана зі зміною вологовмісту \tilde{W} лінійною залежністю. Для досліджуваних областей запишемо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{WL} &= \beta_L \tilde{W}_L & \text{для } 0 < \bar{y} < \bar{y}_m, \\ \varepsilon_{Wv} &= \beta_v \tilde{W}_v & \text{для } \bar{y}_m < \bar{y} < 1, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\tilde{W}_L(y, t) = W_L - W_0$, $\tilde{W}_v(y, t) = W_v - W_0$ – відповідні

відхилення вологості, $W_0 = \frac{\rho_L \Pi}{\rho_s(1-\Pi)}$ –

вологовміст у початковий момент часу, β_L , β_v – коефіцієнти пропорційності.

У результаті зміни вологовмісту $\tilde{W}_L(y, t)$, $\tilde{W}_v(y, t)$ в об’ємі тіла виникають внутрішні напруження і деформації. Компоненти деформації в процесі осушення записуються у вигляді

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \varepsilon_W \delta_{ij}. \quad (3)$$

При формулюванні задачі в напруженнях приходимо до задачі вологопружності, яка полягає у визначенні компонентів тензора напружень, що задовольняють рівнянням рівноваги, рівнянням сумісності Бельтрамі-Мітчела та відповідним граничним умовам [11].

У випадку одновимірної задачі сушіння в умовах самозрівноваження напружений стан характеризується відмінними від нуля нормальними компонентами напруження $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma$, а рівняння сумісності зводяться до одного рівняння

$$\frac{d^2}{dy^2} \left(\sigma + \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_W \right) = 0. \quad (4)$$

Рівняння рівноваги та граничні умови задовольняються тотожно. З умов самозрівноваження шару випливає, що результуюче зусилля і результуючий момент пористого шару дорівнюють нулеві, тобто

$$\int_{-L_0}^{L_0} \sigma(y) dy = 0, \quad \int_{-L_0}^{L_0} \sigma(y) y dy = 0. \quad (5)$$

При цьому напружений стан у площині $y = const$ в усіх точках однаковий. Проінтегрувавши рівняння (5), отримаємо

$$\sigma = -\frac{E}{(1-\nu)} \varepsilon_W + C_1 y + C_2, \quad (6)$$

де сталі C_1 , C_2 , визначені з умов(5),

$$C_1 = -\frac{3}{2L_0^3} \int_{-L_0}^{L_0} \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_W(y) y dy,$$

$$C_2 = \frac{1}{2L_0} \int_{-L_0}^{L_0} \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_W(y) dy. \quad (7)$$

В області пружних деформацій розподіл напружень за товщиною шару має вигляд

$$\sigma_{xx}(y) = \frac{E}{1-\nu} \left[-\varepsilon_W(y) + \frac{3y}{2L_0^3} \int_{-L_0}^{L_0} \varepsilon_W(\xi) \xi d\xi + \frac{1}{2L_0} \int_{-L_0}^{L_0} \varepsilon_W(\xi) d\xi \right],$$

$$\sigma_{xx}(y) = \sigma_{zz}(y), \quad \sigma_{yy}(y) = 0. \quad (8)$$

Зі співвідношень між деформаціями і напруженнями (3), враховуючи умови рівності нулю кососиметричних напружень та рівняння (8), отримаємо для деформацій зсуву $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ та деформацій об'єму:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon = \frac{(1-\nu)\sigma_{xx}}{E} + \varepsilon_W, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{2\nu}{E} \sigma_{xx} + \varepsilon_W. \quad (9)$$

У процесі ізотермічного сушіння в умовах симетрії на поверхнях шару процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні тіла $\bar{y} = 0$. В осушеній зоні, згідно з формулами (2),

$$\varepsilon_{Wv}(\bar{y}, \bar{y}_m) = \beta_v \left\{ C_1^{11}(\bar{y}_m) \left[a_1 + (a_4(\bar{y}_m) + a_3|\bar{y}|)^{\frac{1}{2}} \right] + C_2^1 \right\}, \quad (10)$$

в рідинній, на основі (2),

$$\varepsilon_{WL}(\bar{y}) = \beta_L (W_L - W_0) = \beta_L C_2^1 (1 - \bar{y}_m),$$

де

$$C_1^1 = \frac{\rho_n \Pi}{\rho_s (1 - \Pi)}; \quad C_2^1 = -\frac{\rho_L \Pi}{\rho_s (1 - \Pi)},$$

$$C_1^{11}(\bar{y}_m(t)) = C_1^1 (1 - \bar{y}_m). \quad (11)$$

З умови (5), при врахуванні симетрії сушіння, отримуємо $C_1 = 0$. Тоді

$$\sigma_{xx}(\bar{y}_m) = \sigma_{zz}(\bar{y}_m) = \frac{E}{1-\nu} \{ -\varepsilon_{WL}(\bar{y}_m) + C_5(\bar{y}_m) \}$$

для $0 < |\bar{y}| < \bar{y}_m$;

$$\sigma_{xx}(\bar{y}, \bar{y}_m) = \sigma_{zz}(\bar{y}, \bar{y}_m) = \frac{E}{1-\nu} \{ -\varepsilon_{Wv}(\bar{y}, \bar{y}_m) + C_5(\bar{y}, \bar{y}_m) \}$$

для $\bar{y}_m < |\bar{y}| < 1$;

$$\varepsilon_{xx}(\bar{y}_m) = \varepsilon_{zz}(\bar{y}_m) = C_5(\bar{y}_m);$$

$$\varepsilon_{yy}(\bar{y}_m) = -\frac{2\nu}{1-\nu} C_5(\bar{y}_m) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon_{WL}(\bar{y}_m)$$

для

$$0 < |\bar{y}| < \bar{y}_m, \quad \varepsilon_{yy}(\bar{y}, \bar{y}_m) = -\frac{2\nu}{1-\nu} C_5(\bar{y}_m) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon_{Wv}(\bar{y}, \bar{y}_m)$$

для $(\bar{y}_m < |\bar{y}| < 1)$,

де

$$C_5(\bar{y}_m) = \varepsilon_{WL} \bar{y}_m + C_3(\bar{y}_m)(1 - \bar{y}_m) + C_4(\bar{y}_m) \frac{2G_1(\bar{y}_m)}{a_3};$$

$$C_3(\bar{y}_m) = \beta_v(\bar{y}_m) (C_1^{11}(\bar{y}_m) a_1 + C_2^1);$$

$$C_4(\bar{y}_m) = \beta_v(\bar{y}_m) C_1^{11}(\bar{y}_m);$$

$$G_1(\bar{y}_m) = \frac{(a_4(\bar{y}_m) + a_3)^{3/2} - (a_4(\bar{y}_m) + a_3 \bar{y}_m)^{3/2}}{3}. \quad (14)$$

Прийmemo коефіцієнт усадки β_L у вологій зоні сталою величиною. На основі експериментальних даних [9] коефіцієнт усадки β_v в осушеній зоні можна апроксимувати неперервними лінійними сплайнами відносно насиченості \bar{y}_m :

$$\beta_v(\bar{y}_m) = \sum_{i=1}^n \beta_{vi}(\bar{y}_m) \Theta_i(\bar{y}_m). \quad (15)$$

Тут

$$\beta_{vi} = \tilde{\alpha}_i \bar{y}_m + \tilde{\beta}_i,$$

$\Theta_i(\bar{y}_m) = \sigma_0(\bar{y}_m - \bar{y}_{m,i-1}) - \sigma_0(\bar{y}_m - \bar{y}_{m,i})$ – характеристична функція відрізка, $\sigma_0(\bar{y}_m - \bar{y}_{m,i})$ – одинична функція

Хевісайда, $\tilde{\alpha}_i = \frac{\beta_{vi1} - \beta_{vi0}}{\bar{y}_{mi2} - \bar{y}_{mi1}}$, $\tilde{\beta}_i = \beta_{vi0} - \tilde{\alpha}_i \bar{y}_{mi1}$ – коефіцієнти апроксимації.

З врахуванням (12) – (15) напруження $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$ можна подати так:

$$\sigma_{xx}(\bar{y}_m) = \sigma_{zz}(\bar{y}_m) = \frac{E}{(1-\nu)} \left(-\varepsilon_{WL}(\bar{y}_m) + \sum_{i=1}^n C_{5i}(\bar{y}_m) \Theta_i(\bar{y}_m) \right),$$

для $0 < \bar{y} < \bar{y}_m$;

$$\sigma_{xx}(\bar{y}, \bar{y}_m) = \frac{E}{(1-\nu)} \left(-\varepsilon_{Wv}(\bar{y}, \bar{y}_m) + \sum_{i=1}^n C_{5i}(\bar{y}_m) \Theta_i(\bar{y}_m) \right),$$

$$\sigma_{xx}(\bar{y}, \bar{y}_m) = \sigma_{zz}(\bar{y}, \bar{y}_m),$$

для $\bar{y}_m < |\bar{y}| < 1$;

$$\varepsilon_{xx}(\bar{y}_m) = \varepsilon_{zz}(\bar{y}_m) = \sum_{i=1}^n C_{5i}(\bar{y}_m) \Theta_i(\bar{y}_m); \quad (17)$$

$$\varepsilon_{yy}(\bar{y}_m) = -\frac{2\nu}{1-\nu} \left(\sum_{i=1}^n C_{5i}(\bar{y}_m) \Theta_i(\bar{y}_m) \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} C_2^1 (1 - \bar{y}_m) \beta_L \quad \text{для } 0 < \bar{y} < \bar{y}_m, \quad (18)$$

$$\varepsilon_{yy}(\bar{y}, \bar{y}_m) = -\frac{2\nu}{1-\nu} \left[\sum_{i=1}^n C_{5i}(\bar{y}_m) \Theta_i(\bar{y}_m) \right] +$$

$$+ \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[C_1^{11}(\bar{y}_m) \left[a_1 + (a_4(\bar{y}_m) + a_3|\bar{y}|) \right] + C_2^1 \right],$$

для $\bar{y}_m < |\bar{y}| < 1$;

$$\text{де } C_5(\bar{y}_m) = \sum_{i=1}^n C_{5i}(\bar{y}_m) \Theta_i(\kappa_m),$$

$$C_{5i}(\bar{y}_m) = \varepsilon_{WL} \bar{y}_m + C_{3i}(\bar{y}_m)(1 - \bar{y}_m) + C_{4i}(\bar{y}_m) \frac{2G_1(\bar{y}_m)}{a_3},$$

$$C_3(\bar{y}_m) = \sum_{i=1}^n C_{3i}(\bar{y}_m) \Theta_i(\bar{y}_m); \quad C_4(\bar{y}_m) = \sum_{i=1}^n C_{4i}(\bar{y}_m) \Theta_i(\bar{y}_m);$$

$$C_{3i}(\bar{y}_m) = \beta_{vi}(\bar{y}_m)(C_1^{11}(\bar{y}_m)a_1 + C_2^1);$$

$$C_{4i}(\bar{y}_m) = \beta_{vi}(\bar{y}_m)C_1^{11}(\bar{y}_m).$$

З (16) – (19) випливає, що напруження σ_{xx} , σ_{zz} та деформації ε_{yy} терплять розрив на межі поділу фаз рідина – пара. Об'ємні деформації ε_{xx} , ε_{zz} не залежать від механічних характеристик пористого матеріалу, якщо не враховувати їхню різницю для вологого і осушеного пористого матеріалу. При цьому відносна швидкість загальної пористості дорівнює швидкості об'ємної деформації:

$$\frac{1}{\Pi} \frac{d\Pi}{dt} = \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt}, \quad \varepsilon_{kk} = \hat{\varepsilon} \cdot \hat{I}, \quad (20)$$

де \hat{I} – одиничний тензор, ε_{kk} – кульова частина тензора деформацій.

3. Вплив напружень на процес сушіння в пористому шарі. Напруження і деформації мають зворотний вплив на протікання фізико-механічних процесів, а саме на зміну вологовмісту в тілі в процесі сушіння. Дослідимо цей вплив на прикладі природного симетричного ізотермічного сушіння. Як і раніше, вважаємо процес сушіння таким, що утворюються фронти випаровування, які розділяють шар на бокові осушені зони та центральну рідинну (неосушену).

Проведений аналіз співвідношень для напружено-деформованого стану, який виникає в процесі сушіння (співвідношення (16) – (19)), показує, що в рідинній області напруження залежать лише від положення рухомої межі \bar{y}_m і не залежать від координати \bar{y} , в осушеній зоні напруження залежать як від координати рухомого фронту \bar{y}_m , так і від координати \bar{y} .

У лінійному наближенні взаємозв'язок масопереносу і напруженого стану в процесі осушення описується рівняннями дифузійно-конвективної масопровідності [4]:

$$\frac{\partial W_L}{\partial t} - \frac{D}{L_0^2} \frac{\partial^2 W_L}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{2}{3} \frac{K_L}{\gamma_s L_0^2} \nabla^2 \sigma_{xx}^L = 0,$$

$$\frac{\partial W_g}{\partial t} - \frac{D}{L_0^2} \frac{\partial^2 W_g}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{2}{3} \frac{K_g}{\gamma_s L_0^2} \nabla^2 \sigma_{xx}^g = \tilde{A}_2 (a_4(\bar{y}_m) + a_3 \bar{y})^{-3/2}, \quad (21)$$

$$\text{де } \tilde{A}_2 = \frac{1}{6} \frac{K_g a_3^2 C_1^{11}}{\gamma_s L_0^2}.$$

З врахуванням симетрії а також наявності стрибка неперервності густини на межі поділу фаз початкові й граничні умови будуть такими:

$$W_g = 0 \quad \text{для } t = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial W_L}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \text{якщо } \bar{y} = 0, \quad (23)$$

$$W_L = W_L^n = -C_2^1 \bar{y}_m, \quad \text{якщо } \bar{y} = \bar{y}_m - 0, \quad (24)$$

$$W_g = W_g^n = C_1^1 (1 - \bar{y}_m), \quad \text{якщо } \bar{y} = \bar{y}_m + 0. \quad (25)$$

Розв'язок задачі (21) – (25) шукаємо у вигляді

$$W_L = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\bar{y}}{2a_m \sqrt{t}}\right), \quad (26)$$

$$W_g = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\bar{y}}{2a_m \sqrt{t}}\right) + W_g^n, \quad (27)$$

$$W_g^n(\bar{y}, t) = \tilde{A}_2 \int_0^t \int_0^1 G(\bar{y}, t, \xi, \tau) (a_4(\bar{y}_m) + a_3 \xi)^{3/2} d\xi d\tau. \quad (28)$$

Тут $\Phi(\bar{y}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{y}} e^{-\xi^2} d\xi$ – інтеграл ймовірностей;

$$G(\bar{y}, t, \xi, \tau) = \frac{2}{1 - \bar{y}_m} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{1 - \bar{y}_m}\right)^2 a_m^2 (t - \tau)} \sin \frac{n\pi}{1 - \bar{y}_m} \bar{y} \sin \frac{n\pi}{1 - \bar{y}_m} \xi$$

– функція впливу миттєвого джерела [8] для відрізка

$[1 - \bar{y}_m]$, $a_m^2 = \frac{D}{L_0^2}$. В розв'язку (26), (27) A_1 , A_2 , B_1 , B_2 –

довільні сталі, які визначаються з умов (22) – (25). Якщо задовольнити умови (22) – (25), то одержимо наступні формули для вологовмісту з врахуванням впливу напружено-деформованого стану:

$$W_L(y) = C_2^1 \bar{y}_m \quad (0 < \bar{y} < \bar{y}_m, \quad \bar{y}_m^r \leq \bar{y}_m \leq 1),$$

(\bar{y}_m^r – рівноважне значення відносної вологості, що задається ізотермою рівноваги для кожного окремого матеріалу),

$$W_g(\bar{y}) = \frac{C_1^1 (1 - \bar{y}_m)}{\left[\Phi\left(\frac{\bar{y}_m}{2a_m \sqrt{f(\bar{y}_m)}}\right) - 1 \right]} \times \left[\Phi\left(\frac{\bar{y}}{2a_m \sqrt{f(\bar{y}_m)}}\right) - 1 \right] + W_g^n(\bar{y})$$

для $\bar{y}_m < |\bar{y}| < 1$. (29)

$$W_g^n(\bar{y}, t) = \tilde{A}_2 2(1 - \bar{y}_m) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{1 - \bar{y}_m} (\bar{y} - \bar{y}_m) \times$$

$$\times \frac{1}{(\pi n a_m)^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{1 - \bar{y}_m}\right)^2 a_m^2 t} \right] \times \left| \bar{w}_1^g + \bar{w}_2^g \right|, \quad (30)$$

$$\bar{w}_1^g = -\sqrt{a_2} \left[e^{-\frac{i\pi n a_2}{(1-\bar{y}_m)a_3}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{i\pi n a_2}{(1-\bar{y}_m)a_3}\right) + f_1 \right],$$

$$f_1 = e^{\frac{i\pi n a_2}{(1-\bar{y}_m)a_3}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-i\pi n a_2}{(1-\bar{y}_m)a_3}\right);$$

$$w_2^g = \sqrt{a_{21}} \left[e^{-\frac{i\pi n a_2}{(1-\bar{y}_m)a_3}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{i\pi n a_{21}}{(1-\bar{y}_m)a_3}\right) + f_2 \right],$$

$$f_2 = e^{\frac{i\pi n a_2}{(1-\bar{y}_m)a_3}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-i\pi n a_{21}}{(1-\bar{y}_m)a_3}\right).$$

$a_{21}(\bar{y}_m) = a_2 + a_3(1 - \bar{y}_m)$; ${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right)$ – вироджена гіпергеометрична функція Куммера, $f(\bar{y}_m)$ – функція, яка відображає зв'язок між відносною вологістю і часом і отримана з розв'язку задачі масоперенесення. Для природного сушіння $f(\bar{y}_m) = [0,5\Gamma_0(\bar{y}_m^2 - 1) + B(1 - \bar{y}_m)] / \Omega$,

$$\Omega = b(1 - \eta_0) \left[1 - \frac{1 + \eta_0}{2a_1} \right].$$

4. Числовий аналіз режиму сушіння. Проведено дослідження напружено-деформованого стану шару в процесі ізотермічного сушіння для $T = 300\text{ K}$ з врахуванням залежності усадки β_v від відносної вологості \bar{y}_m , а також зворотного впливу напруженого стану на параметри сушіння. Числовий аналіз виконано на прикладі шару цементного каменю. Експериментальні дослідження цементного каменю показали [9], що зміни об'єму в ньому є істотними лише тоді, коли відносна насиченість стає низькою ($0 < \bar{y}_m < 0,5$) і, зокрема, випаровується міжшарова і міжкристалічна вода. Усадка скелету приводить до збільшення пористості і ослаблення міжшарових зв'язків в результаті зменшення поверхневого натягу кристалу.

4.1. Аналіз напружено-деформованого стану. Приймаємо, що усадка в вологій зоні $\beta_L = 0,001$. Наведені в [9] експериментальні дані вказують, що коефіцієнт усадки β_v в осушеній зоні визначається сплайнами (28). При цьому коефіцієнти сплайн-апроксимації є наступними: $\beta_v = \beta_{v1}$ для $0 < \bar{y}_m < 0,4$; $\beta_v = \beta_{v2}$ для $0,4 < \bar{y}_m < 1$, де β_{vi} ($i = 1, 2$) лінійні функції \bar{y}_m на кожному з участків, $\bar{y}_{m11} = 0$, $\bar{y}_{m12} = 0,4$; $\bar{y}_{m21} = 0,4$, $\bar{y}_{m22} = 1$, $\beta_{v11} = -5,556 \cdot 10^{-3}$, $\beta_{v10} = -5,556 \cdot 10^{-4}$, $\beta_{v20} = -5,556 \cdot 10^{-4}$, $\beta_{v21} = 0$.

На рис. 2. наведені залежності величини напружень $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma$ від відносної насиченості \bar{y}_m , ($0 < \bar{y}_m < 1$) для півтовщини пористого шару $L_0 = 0,5\text{ м}$, в площинах $\bar{y} = \text{const}$. Крива 1 відповідає $\bar{y} = 0,2$; крива 2 – $\bar{y} = 0,5$; крива 3 – $\bar{y} = 0,8$.

На рис. 3. зображено зміну компоненти тензора деформацій ε_{yy} при фіксованих значеннях y зі зміною координати фазового переходу \bar{y}_m . Криві 1, 2 відповідають $\bar{y} = 1$, $\bar{y} = 0,4$, криві 3, 4 – $\bar{y} = 0$, $\bar{y} = 0,1$. Компоненти тензора деформацій ε_{xx} , ε_{zz} залежать лише від координати фазового переходу.

Проведений аналіз впливу величини коефіцієнта усадки для шару цементного каменю в рідинній та осу-

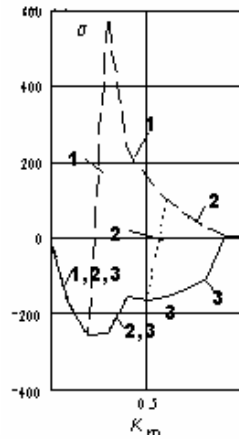


Рис. 2. Залежність напружень $\sigma_{zz} \cdot 10^{-4}$ МПа від відносної насиченості вологою (координати межі поділу фаз) ($\bar{y}_m = \kappa_m$)

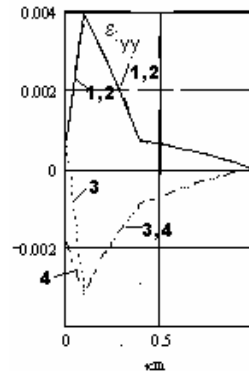


Рис. 3. Залежність компоненти деформації ε_{yy} від координати \bar{y}_m при фіксованих значеннях \bar{y} ($\bar{y}_m = \kappa_m$)

шеній зонах показав, що зменшення коефіцієнта усадки β_L в рідинній зоні від $0,001$ до 0 приводить з спадом відносної насиченості \bar{y}_m , що змінюється в межах $0,1 < \bar{y}_m < 0,9$, до відносного зменшення напружень від 51% до 17% (зокрема, для $\bar{y}_m = 0,9$ на 51% ; $\bar{y}_m = 0,8$ – на 56% ; $\bar{y}_m = 0,6$ – на 51% ; $\bar{y}_m = 0,5$ – на 51% ; $\bar{y}_m = 0,3$ – на 27% ; $\bar{y}_m = 0,2$ – на 19% ; $\bar{y}_m = 0,1$ – на 17%).

Зменшення коефіцієнта усадки β_v в осушеній зоні від $0,53 \cdot 10^{-3}$ до 0 приводить з спадом \bar{y}_m , що змінюється в тих же межах до відносного зменшення напружень від 45% до 88% (зокрема, для $\bar{y}_m = 0,9$ – на 47% ; $\bar{y}_m = 0,6$ – на 45% ; $\bar{y}_m = 0,3$ – на 76% ; $\bar{y}_m = 0,1$ – на 88%). Такий значний вплив пов'язаний, мабуть, з властивостями розглянутого матеріалу, в якому коефіцієнт усадки визначається як водоцементним відношенням, так і видом і текстурою піску.

4.2. Вплив напружень на вологовміст. Вологовміст в осушеній зоні описується формулою (25), залежить як від координати \bar{y} , так і координати фазового переходу \bar{y}_m . Проведений числовий аналіз показав, що вплив напруженого стану на вологовміст W_v не перевищує $W_{v\text{max}} \cdot 10^{-6}$. Отже, впливом напруженого стану на вологовміст у процесі сушіння можна знехтувати.

4.3. Оцінка зміни параметра пористості в процесі осушення. Вихідним для аналізу є співвідношення (20), які пов'язують зміну пористості Π зі зміною деформацій. З цього співвідношення, з врахуванням виразів компонентів деформації, отримуємо нелінійне диференціальне рівняння на зміну пористості в осушеній та рідинній зонах у вигляді

$$\frac{d\Pi}{d\bar{y}_m} = \sum_{i=1}^2 \frac{C_{6i}^L(\bar{y}_m)\Pi(1-\Pi)}{(1-\Pi)^2 - C_{10i}^L(\bar{y}_m)\Pi} \Theta_i(\bar{y}_m) \text{ для } 0 < \bar{y} < \bar{y}_m,$$

$$\frac{d\Pi}{d\bar{y}_m} = \sum_{i=1}^2 \frac{C_{6i}^v(\bar{y}, \bar{y}_m) \Pi(1-\Pi)}{(1-\Pi)^2 - C_{12i}^v(\bar{y}, \bar{y}_m) \Pi} \Theta_i(\bar{y}_m) \text{ для } \bar{y}_m < |\bar{y}| < 1. \quad (31)$$

Тут

$$C_{6i}^L(\bar{y}_m) = \frac{2(1-2\nu)}{(1-\nu)} C_{6i}(\bar{y}_m) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta_L a_1 \frac{\rho_n}{\rho_s};$$

$$C_{6i}^v(\bar{y}, \bar{y}_m) = \frac{2(1-2\nu)}{(1-\nu)} C_{6i}(\bar{y}_m) - \frac{1+\nu}{1-\nu} f_{5i}(\bar{y}, \bar{y}_m) \frac{\rho_n}{\rho_s};$$

$$C_{6i}(\bar{y}_m) = -\beta_L \left(a_1 \frac{\rho_n}{\rho_s} - \frac{\rho_L}{\rho_s} \right) - \beta_{vi} \left[\frac{\rho_n}{\rho_s} (1-\bar{y}_m) a_1 - \frac{\rho_L}{\rho_s} \right] +$$

$$+ \left[f_{1i}(\bar{y}_m) a_1 \frac{\rho_n}{\rho_s} - \alpha_i \frac{\rho_L}{\rho_s} \right] (1-\bar{y}_m) + C_{6i}^1;$$

$$C_{6i}^1(\bar{y}_m) = \frac{2G_1 \rho_n}{a_3 \rho_s} f_{1i}(\bar{y}_m) - \beta_{vi} (1-\bar{y}_m) \frac{\rho_n}{\rho_s} (a_4 + a_3)^{1/2};$$

$$C_{10i}^L = \frac{2(1-2\nu)}{(1-\nu)} C_{8i} + \frac{1+\nu}{1-\nu} C_9;$$

$$C_{12i}^v(\bar{y}_m) = \frac{2(1-2\nu)}{(1-\nu)} C_{8i}(\bar{y}_m) + \frac{1+\nu}{1-\nu} C_{11i}(\bar{y}_m);$$

$$C_{8i}(\bar{y}_m) = \beta_L a_{11}(\bar{y}_m) \bar{y}_m + \beta_{vi}(\bar{y}_m) [a_{11}(\bar{y}_m)(1-\bar{y}_m) + a_{12}(\bar{y}_m)];$$

$$a_{11}(\bar{y}_m) = (1-\bar{y}_m) a_1 \frac{\rho_n}{\rho_s} - \frac{\rho_L}{\rho_s}; \quad a_{12}(\bar{y}_m) = (1-\bar{y}_m) \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{2}{a_3} G_1;$$

$$f_{1i}(\bar{y}_m) = -2\tilde{\alpha}_i \bar{y}_m + (\tilde{\alpha}_i - \tilde{\beta}_i);$$

$$C_{11i}(\bar{y}_m) = \beta_{vi}(\bar{y}_m) (1-\bar{y}_m) [a_1 + (a_4(\bar{y}_m) + a_3 \bar{y})^{1/2}];$$

$$C_9(\bar{y}_m) = \beta_L a_{11}(\bar{y}_m);$$

$$f_{5i}(\bar{y}, \bar{y}_m) = [\tilde{\alpha}_i(1-\bar{y}_m) - \tilde{\beta}_i] \tilde{h}(\bar{y}, \bar{y}_m)^{-1/2}$$

$$- \beta_{vi}(\bar{y}_m) (1-\bar{y}_m) \frac{a_3}{2} (a_4(\bar{y}_m) + a_3 \bar{y}).$$

Розв'язок цієї задачі одержано при початковій умові: $\Pi(\kappa_m = 1) = \Pi_0$.

Рівняння (31) розв'язувались методом Рунге-Кутта. Проведений аналіз розв'язку показав, що пористість у процесі сушіння визначається параметром \bar{y}_m . Результати досліджень наведені на рис. 4.

Розрахунки проведені при початковій пористості Π_0 , рівній 0.1; 0.2; 0.3. Результати розрахунків для цементного каменю показали, що в процесі сушіння пористість зростає з збільшенням коефіцієнта усадки. Максимальна зміна пористості в процесі висихання досягається при відносній вологості $\bar{y}_m = 0$ (обезводнений матеріал) і складає 1,9% від початкового значення пористості.

4.4. Залежність напружено-деформованого стану від параметра пористості. Отримані результати були враховані при розв'язуванні задачі про напружено-деформований стан з врахуванням зміни пористості в часі. Характер зміни напружено-деформованого стану ідентичний з одержаним без врахування зміни пористості. При цьому максимальне значення напружень, які отримані з врахуванням зміни пористості, перевищують обчислені без врахування зміни пористості на 1,7%.

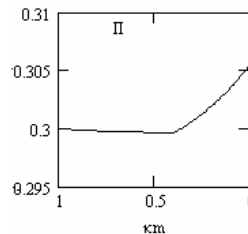


Рис. 4. Зміна пористості зі зміною насиченості вологою в процесі сушіння при початковій пористості $\Pi_0 = 0.3$ ($\bar{y}_m = \kappa_m$)

Висновки. Для цементного каменю впливом напружень на вологовміст можна знехтувати. В процесі осушення для цього матеріалу пористість зростає. Це показали й експериментальні дослідження цементного каменю [9], зміною пористості для нього також можна знехтувати.

Література

1. Лыков А.В. Теория сушки. – М: Энергия, 1968. – 471 с.
2. Луцик П.П. Уравнения теории сушки деформируемых твердых тел // Промышленная теплотехника. – 1985. – Т.7, – №6 – С. 8–20.
3. Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи теплопереноса. – К.: Наукова думка, 1988. – 232 с.
4. Луцик П.П. Напряженно-деформированное состояние твердого тела в процессе сушки // Теоретические основы химической технологии. – 1988. – Т. 22. – №1. – С. 21–28.
5. Костерин А.В., Миненков В.А. Напряжения и деформации при сушке пористых материалов // Теоретические основы химической технологии. – 1991. – Т.25. – №6. – С. 814–819.
6. Бурак Я., Кондрат В., Гайвась Б. До математичного моделювання процесу сушки пористих тіл // Інформаційно-математичне моделювання складних систем. – Львів: Ахіл, 2002. – С. 153–159.
7. Хейфец Л. И., Неймарк Ф.В. Многофазные процессы в пористых средах. – М.: Химия, 1982. – 320 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
9. Цилосани З.Н. Усадка и ползучесть бетона. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – 329 с.
10. Гайвась Б.І. Про вплив електроосмосу на двостороннє конвективне осушення пористого шару // Волин. математ. вісн. Прикладна математика. – 2004. – Вип. 2 (11). – С. 74–78.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.1. – М: Наука, 1976. – 535 с.
12. Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – К: Наукова думка, 2006. – 272 с.

Отримана 24.10.10

Y. Burak, B. Gayvas

Mathematical model of calculation of stress-strained state under drying the porous layer

Mathematical Simulation Center of Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Science of Ukraine, Lviv

Influence of the parameters of dehumidifying process in a porous layer on change of a stress- deformed state is studied. The estimation is given for effects of return influence of stresses on specific humidity change. The affect of porosity parameter change on dehumidifying process is investigated.