

О. Дащенко

Професор, докт. техн. наук

Г. Оборський

Професор, докт. техн. наук

М. Сур'янінов

Докт. техн. наук

Одеський національний
політехнічний університет,
м. Одеса

УДК 531/534:624(075.8)

ДОДАТОК МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗРАХУНКУ РЕБРИСТИХ ПЛАСТИН

Розглянуто застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку пластин з ребрами жорсткості в двох напрямках. У диференціальному рівнянні задачі враховані параметри ребер, які можуть бути як суцільного перерізу, так і тонкостінного. Наведено результати розрахунку запропонованим методом жорстко затисненої по всьому контуру ребристої пластини при двох варіантах навантаження, зроблено порівняння з результатами розрахунку в скінченноелементному пакеті ANSYS.

ребриста пластина, граничний елемент, диференціальне рівняння

Ребриста пластина являє собою поєднання взаємодіючих при деформації елементів — власне пластини і ребер (одномірних стрижнів). Напружено-деформований стан кожного з цих елементів, обумовлений у рамках відомих прикладних теорій, має свої особливості. У зв'язку з цим при дослідженні ребристих пластин виникає потреба в побудові спеціальної теорії, що враховує основні особливості, властиві окремим елементам, і умови їхньої спільної роботи. Видається, що для розв'язування цієї задачі ефективним може виявитися чисельно-аналітичний метод граничних елементів [1, 4].

Диференціальне рівняння згину пластини за наявності ребер має вигляд [3]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\bar{q}}{D}, \quad (1)$$

де $W = W(x, y)$ — прогин пластини; $\bar{q} = \bar{q}(x, y)$ — вільний член рівняння, що враховує не тільки зовнішні навантаження, але й наявність підкріплювальних ребер у поздовжньому напрямі, під яким будемо розуміти напрям, рівнобіжний до осі y (рис. 1).

Застосуванням до (1) методу Канторовича-Власова ця двовимірна задача може бути зведена до одновимірної,

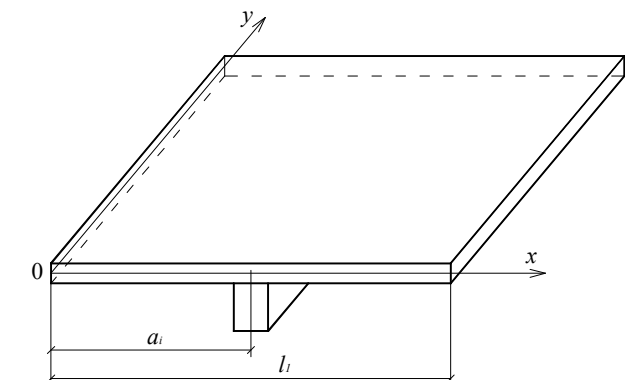


Рис. 1. Пластина з ребром у поздовжньому напрямі

чого потребує загальна концепція методу граничних елементів [4]. Тоді прогин точки серединної площини пластини

$$W(x, y) = W(y)X(x), \quad (2)$$

де $X(x)$ — функція поперечного розподілу прогинів пластини, яка має точно описувати форму вигнутої поверхні пластини в напрямі осі x . Цю вимогу повною мірою задовольняють криві прогину балки, що має такі ж умови спирання, як і пластина, у напрямі осі x .

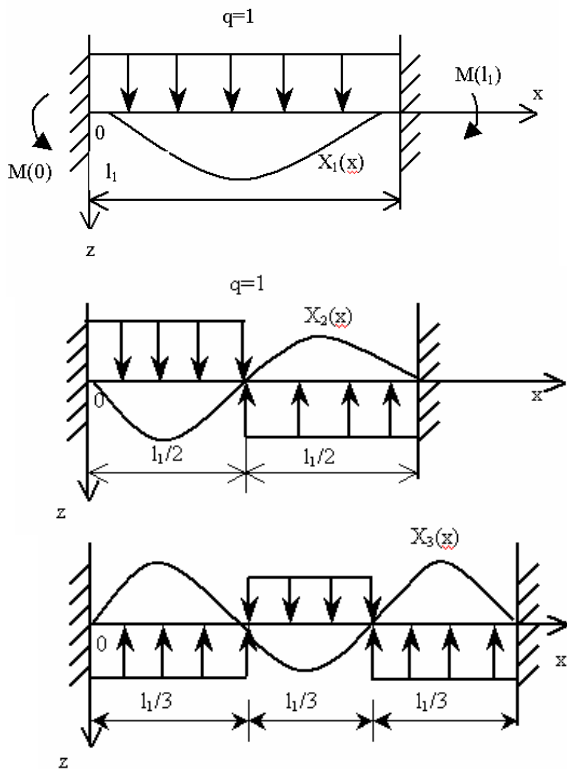


Рис. 2. Функції прогинів (статика)

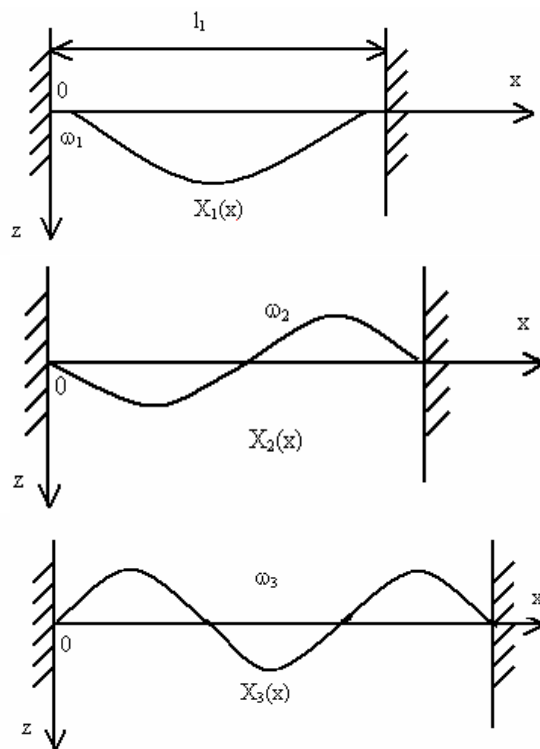


Рис. 3. Функції прогинів (динаміка)

Існують два способи для вибору цієї функції: статичний і динамічний [4]. При статичному способі прогин балки визначається величиною прикладеного до неї статичного навантаження (рис. 2). При динамічному способі прогини балки виражаються її формами власних коливань (рис. 3).

Підставимо (2) в (1) і у відомі з теорії згину пластин вирази статичних параметрів (згинальних моментів і зведених поперечних сил). Множачи потім обидві частини кожного виразу на $X(x)$ та інтегруючи в межах $[0; l_1]$, одержимо задачу Коші одновимірної моделі згину прямокутної пластини, підкріпленої поздовжніми ребрами:

$$W^{IV}(y) - 2r^2W''(y) + s^4W(y) = \frac{\bar{q}(y)}{D} \quad (3)$$

за таких початкових умов:

$$\begin{aligned} DW(0); \quad D\theta(0) = DW'(0); \quad M(0) = -D\bar{A}[W''(0) - \mu r^2W(0)]; \\ Q(0) = -D\bar{A}[W'''(0) - (2 - \mu)r^2W'(0)]; \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$r^2 = -\bar{B}/\bar{A}; \quad s^4 = C/\bar{A}; \quad \bar{q}(y) = \int_0^{l_1} \bar{q}(x, y)X(x)dx/\bar{A}; \quad (5)$$

$$\bar{A} = A + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n EI_x X^2(a_i) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n EI_\omega [X'(a_i)]^2; \quad (6)$$

$$\bar{B} = B + \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n EI_k [X'(a_i)]^2 + \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \frac{GA}{k_1} X^2(a_i); \quad (7)$$

$$A = \int_0^{l_1} X^2(x)dx; \quad B = \int_0^{l_1} X''(x)X(x)dx; \quad C = \int_0^{l_1} X^{IV}(x)X(x)dx.$$

Диференціальне рівняння (3) за своєю структурою аналогічне рівнянню, що описує згин пластин без ребристих підкріплень, однак вигляд виразів (5) — (7) свідчить про те, що в (3) враховані параметри ребер.

Кінематичні й статичні параметри згину підкріпленої пластини зовні зберуть той же вигляд, що й для пластини без ребер, але чисельно, звичайно, будуть відрізнятися, бо прогин $W(y)$, що входить у наведені нижче вирази, буде відрізнятися від прогину відповідної «гладкої» пластини:

$$\begin{aligned} \theta_x(x, y) = W(y)X'(x); \quad \theta_y(x, y) = W'(y)X(x); \\ M_x(x, y) = -D[W(y)X''(x) + \mu W''(y)X(x)]; \\ M_y(x, y) = -D[W''(y)X(x) + \mu W(y)X''(x)]; \\ H_x(x, y) = -H_y(x, y) = -D(1 - \mu)W'(y)X'(x); \\ V_x(x, y) = -D[W_y(y)X'''(x) + W''(y)X'(x)]; \\ V_y(x, y) = -D[W'''(y)X(x) + W'(y)X''(x)]; \end{aligned}$$

де $\theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$ — кути поворотів; $M_x(x, y), M_y(x, y)$ — згинальні моменти; $\theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$ — крутильні моменти; $V_x(x, y), V_y(x, y)$ — поперечні сили.

Отже, при використанні методу Канторовича-Власова розв'язування основного диференціального рівняння задачі зводиться до визначення прогину (2), де функція $X(x)$ задана, а функція $W(y)$ визначається у вигляді

$$DW(y) = A_{11} \cdot DW(0) + A_{12} \cdot D\theta(0) - A_{13} \cdot M(0) - A_{14} \cdot Q(0) + \int_0^y A_{14} (y - \xi) q(\xi) d\xi.$$

Розв'язок рівняння (3) залежить від коренів відповідного йому характеристичного рівняння, що подаються виразом

$$k_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}.$$

Вид фундаментальних функцій визначається співвідношенням між r і s , що залежить від граничних умов на поздовжніх крайках пластини і параметрів ребер жорсткості. Тут можливі шість випадків.

1. $|s| > |r|$, при цьому $k_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$,

$$\text{де } \alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}.$$

2. $s = r$, $k_{1-4} = \pm \sqrt{r^2}$.

3. $|s| < |r|$,

$$\lambda_1 = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}.$$

4. $k_{1,2} = 0$; $k_{3,4} = \pm r$; $r_1 = -2\bar{B}/\bar{A}$.

5. $k_{1,2} = \pm i\beta$; $k_{3,4} = \pm \alpha$.

6. $k_{1,2} = \pm \alpha i$; $k_{3,4} = \pm \beta i$;

Прогин $W(y)$ у кожному з цих випадків запишеться у вигляді

$$W(y) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4,$$

але функції $\Phi_1 - \Phi_4$ будуть різними.

Кожному з розглянутих вище коренів характеристичного рівняння відповідає своя система фундаментальних функцій [4].

Розглянемо квадратну пластину, що жорстко закріплена по всьому контуру і завантажена рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 4).

Пластинка має по одному ребру жорсткості суцільного квадратного перерізу в кожному напрямі. Це обмеження ніяк не позначиться на загальності розглянутого алгоритму МГЕ.

Сформуємо матриці X_* , Y , B і врахуємо, що область пластини дискретизується на три підобласті зі східчатою жорсткістю (рис. 5).

Області 0 - 1 і 2 - 3 — це області пластини (з одним ребром у поздовжньому напрямі), товщиною h , циліндрична жорсткість якої

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (8)$$

а область 1 - 2 теж будемо розглядати як пластину (без ребер), але товщиною $h_1 = h + h_{\text{ребра}}$ з циліндричною жорсткістю

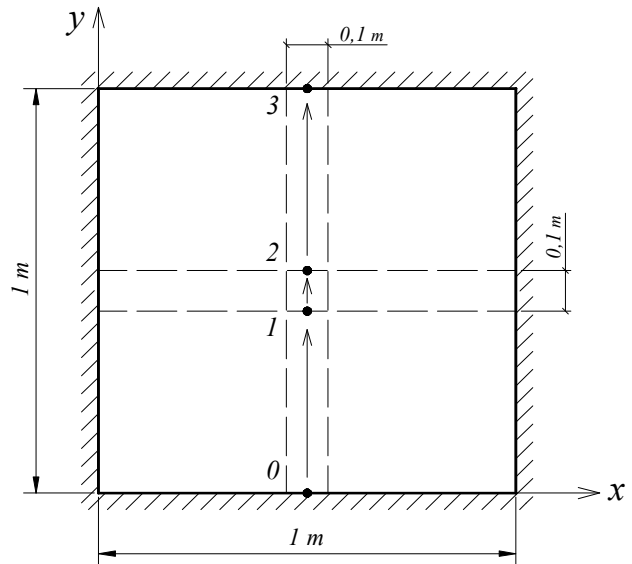


Рис. 4. Квадратна пластина з жорстким закріпленням по контуру

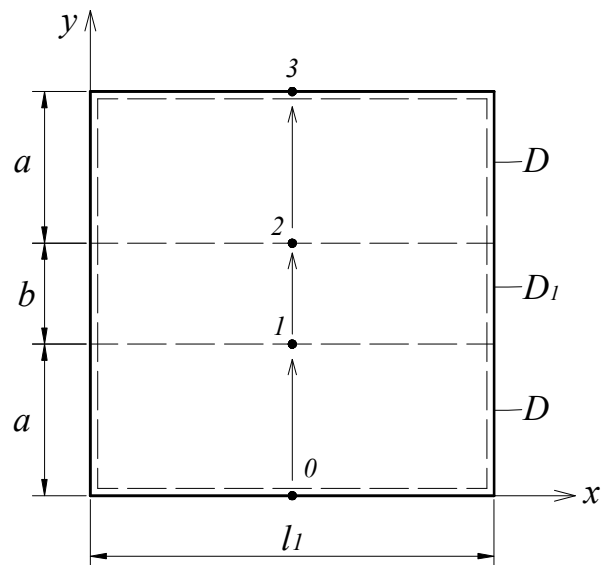


Рис. 5. Дискретизація пластини на три підобласті

$$D = \frac{Eh_1^3}{12(1 - \mu_1^2)}, \quad (9)$$

де μ_1 — усереднений коефіцієнт Пуассона пластини і ребра.

Матриці МГЕ набувають вигляду, поданого нижче за текстом.

З (10) випливає, що в матриці A_* потрібно обнулити перший і третій стовпчики. Далі параметри з вектора Y переносяться у вектор X_* .

Матричне рівняння МГЕ для пластини з ребрами жорсткості в двох напрямках набуде вигляду (11). Фундаментальні функції та вектор навантаження відповідають першому варіанту коренів характеристичного рівняння.

1	$DW^{0-1}(0) = 0;$ $D\theta^{2-3}(a)$
2	$D\theta^{0-1}(0)$
3	$M^{0-1}(0) = 0;$ $Q^{2-3}(a)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$D_1W^{1-2}(0)$
6	$D_1\theta^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$Q^{1-2}(0)$
9	$DW^{2-3}(0)$
10	$D\theta^{2-3}(0)$
11	$M^{2-3}(0)$
12	$Q^{2-3}(0)$

$X_* =$

$$Y = \begin{matrix} DW^{0-1}(a) = DW^{1-2}(0) \\ D\theta^{0-1}(a) = D\theta^{1-2}(0) \\ M^{0-1}(a) = M^{1-2}(0) \\ Q^{0-1}(a) = Q^{1-2}(0) \\ D_1W^{1-2}(b) = D_1W^{2-3}(0) \\ D_1\theta^{1-2}(b) = D_1\theta^{2-3}(0) \\ M^{1-2}(b) = M^{2-3}(0) \\ Q^{1-2}(b) = Q^{2-3}(0) \\ DW^{2-3}(a) = 0 \\ D\theta^{2-3}(a) \\ M^{2-3}(a) = 0 \\ Q^{2-3}(a) \end{matrix} ; B = \begin{matrix} -B_{11}(a) \\ -B_{21}(a) \\ B_{31}(a) \\ B_{41}(a) \\ -b_{11}(b) \\ -b_{21}(b) \\ b_{31}(b) \\ b_{41}(b) \\ -B_{11}(a) \\ -B_{21}(a) \\ B_{31}(a) \\ B_{41}(a) \end{matrix} \quad (10)$$

В (11) малими буквами a_{ij}, b_{il} позначені матриці фундаментальних функцій і навантаження середньої частини 1 — 2 (рис. 5) як пластини, що не має ребер жорсткості. Великими буквами A_{ij}, B_{il} позначені функції пластини з ребрами в поздовжньому напрямі.

Прогини частин 0 — 1, 2 — 3 пластини визначаються виразом

$$DW(x, y) = W(y) \cdot X(x) = [DW(0) \cdot A_{11}(y) + D\theta(0) \cdot A_{12}(y) - M(0) \cdot A_{13}(y) - Q(0) \cdot A_{14}(y) + B_{11}(y)] \cdot X(x).$$

Відповідно, прогин частини 1 — 2 (пластина з ребром у поперечному напрямі)

$$D_1W(x, y) = W_1(y) \cdot X(x) = [D_1W(0) \cdot a_{11}(y) + D_1\theta(0) \cdot a_{12}(y) - M(0) \cdot a_{13}(y) - Q(0) \cdot a_{14}(y) + b_{11}(y)] \cdot X(x).$$

Всі інші параметри згину пластини з ребрами жорсткості в двох напрямках визначаються за рівняннями теорії пружності. У результаті розрахунку обчислені прогин і згинальний момент у центрі пластини. Результати розрахунку подані в табл. 1, де наведені також значення прогину і згинаючого моменту в центрі пластини, обчислені методом скінченних елементів у програмі ANSYS.

Таблиця 1

Порівняння результатів (варіант 1)

Жорстке закріплення, розподілене навантаження			
Величина	МГЕ	МКЕ	Розбіжність %
Прогин, м	-0,42923e-05	-0,41665e-05	2,93
Згинальний момент, кН·м	3,6508e-02	3,6992e-02	1,31

(11)

$-B_{11}(a)$	$-B_{21}(a)$	$B_{31}(a)$	$B_{41}(a)$	$-b_{11}(b)$	$-b_{21}(b)$	$b_{31}(b)$	$b_{41}(b)$	$-B_{11}(a)$	$-B_{21}(a)$	$B_{31}(a)$	$B_{41}(a)$
=											
$D\theta^{2-3}(a)$	$D\theta^{0-1}(0)$	$Q^{2-3}(a)$	$Q^{0-1}(0)$	$D_1W^{1-2}(0)$	$D_1\theta^{1-2}(0)$	$M^{1-2}(0)$	$Q^{1-2}(0)$	$DW^{2-3}(0)$	$D\theta^{2-3}(0)$	$M^{2-3}(0)$	$Q^{2-3}(0)$
							-1	$-A_{14}$	$-A_{13}$	A_{12}	A_{11}
						-1		$-A_{13}$	$-A_{12}$	A_{22}	A_{32}
				$-D_1/D$				A_{12}	A_{22}	$-A_{32}$	$-A_{31}$
			$-D_1/D$					A_{11}	A_{21}	$-A_{31}$	$-A_{41}$
		-1									
	$-D/D_1$										
$-A_{14}$	$-A_{13}$	A_{12}	A_{11}								
											-1
A_{12}	A_{11}	$-A_{32}$	$-A_{31}$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Таблиця 2

Порівняння результатів (варіант 2)

Жорстке закріплення, зосереджена сила			
Величина	МГЕ	МКЕ	Розбіжність, %
Прогин, м	-0,16773e-04	- 0,16209e-04	3,36
Згинальний момент, кН·м	48,802	47,509	2,7

Другий варіант розрахунку — квадратна пластина, що жорстко закріплена по всьому контуру і завантажена зосередженою силою, прикладеною в її центрі. Результати розрахунку наведені у табл. 2.

Після побудови фундаментальних функцій, функції Гріна і формування векторів зовнішніх навантажень можна реалізувати алгоритм МГЕ [1] для будь-яких граничних умов і довільної кількості ребер (як суцільного перерізу, так і тонкостінного) в обох напрямках.

Загальна концепція запропонованого підходу полягає в наступному. Частина пластини, що мають ребра в поперечному напрямі (паралельно осі ox), розглядаються як «гладкі» пластини товщиною $h_1 = h + h_{\text{ребра}}$, де h — товщина власне пластини, $h_{\text{ребра}}$ — висота підкріплювального ребра. Для цих модулів справедлива теорія розрахунку «гладких» пластин методом граничних елементів, докладно викладена в [1, 4], з відповідними поданнями фундаментальних функцій, функції Гріна, векторів навантажень і т.д. Інші модулі — це пластини, підкріплені

ребрами жорсткості в поздовжньому напрямі (паралельно осі Oy), і для них фундаментальні функції, функції Гріна, вектори навантажень визначаються виразами, отриманими для ребристих пластин.

Література

1. Баженов В.А. Численные методы в механике / В.А. Баженов, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов и др. — Одесса, «СТАНДАРТЪ», 2005. — 563 с.
2. Биргер И.А. Сопrotивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов — М.: Наука, 1986. — 560 с.
3. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов — М.: Стройиздат, 1958. — 502 с.
4. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — В 2-х томах. — Одесса. — СтандартЪ, 2010.

Отримана 29.03.2011

A. Dashchenko, G. Oborsky, N. Suryaninov

Application boundary element method to the calculation of ribbed plates

Odesa National Politechnical University, Odesa

The application of numerical-analytical boundary element method to the calculation of plates with stiffeners in both directions. In the differential equation takes into account the parameters of the problem edges, which can be both solid wire and thin-walled. The results of calculation rigidly clamped around the contour of the ribbed plate with two options proposed by the load, and a comparison with the results of a finite element package ANSYS.

Інформація

12-та Міжнародна науково-практична конференція
СПОРІДНЕНІ РЕНОВАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ: ОБЛАДНАННЯ, МАТЕРІАЛИ, ТЕХНОЛОГІЇ
 24 – 28 вересня 2012 р., м. Ялта, Крим, Україна

Тематика конференції:

- Побудова національних систем технічного регулювання в умовах членства у ВТО і ЄС.
- Процесно-орієнтовані інтегровані системи керування: теорія і практика.
- Стандартизація, сертифікація, управління якістю у промисловості, електроенергетиці, сільському господарстві і сфері послуг.
- Впровадження стандартів ДСТУ 9001:2009 у вищих навчальних закладах, медичних закладах і органах державної служби.
- Метрологічне забезпечення і контроль якості продукції у промисловості, електроенергетиці, сільському господарстві і сфері послуг.
- Забезпечення якості і конкурентоспроможності продукції (послуг) на внутрішньому і зовнішньому ринках.
- Впровадження інформаційних технологій у процеси адаптації, сертифікації та управління якістю.
- Проблеми гармонізації законодавчої і нормативно-технічної документації.

Адреса організаторів:

АТМ України,
 04074, м. Київ, вул. Автозаводська, 2.
 Тел. /Факс: +38-044-430-85-00
 E-mail: atmu@ism.kiev.ua, kopeykina@voliacable.com, atmu@meta.ua