

В. Божидарнік

Професор, докт. техн. наук

О. Максимович

Доцент, докт. техн. наук

Луцький національний
технічний університет,
м. Луцьк

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЩІЛИНИ ДОВІЛЬНОЇ ШИРИНИ В АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНАХ

Запропоновано методику розрахунку напружено-деформованого стану анізотропних пластин, послаблених прямокутним отвором із закругленими меншими сторонами (щілиною) довільної ширини.

напруження, щілина, анізотропна пластина, асимптотичний метод

Вступ. У літературі при дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) біля тріщиноподібних дефектів їхню форму описують, як правило, еліпсом, що дозволяє використати відповідні прості розв'язки задач теорії пружності. Для багатьох випадків дефекти мають форму щілин. Дослідження НДС стосовно ізотропних пластин для щілин довільної ширини виконане в [3, 4].

Розглянемо пластину зі щілиною довжиною $2l$ сталого ширини $2r$; що розміщена вздовж осі Ox з центром у початку координат із закругленими півколами вершинами. Прийемо, що межа отвору вільна від навантаження, пластина розтягується на нескінченності зусиллями p , які діють під кутом φ до осі Ox .

При малій ширині щілина вироджується в тріщину, у зв'язку з цим напруження стають нескінченними. Тому для цієї задачі безпосереднє застосування методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР) або інших числових методів при довільних значеннях ширини щілини є мало-перспективним. Для розв'язування поставленої задачі, аналогічно, як і в [4], використаємо разом МГІР і асимптотичний метод. Для його застосування потрібно попередньо встановити структуру асимптотичного розв'язку.

Розглянемо ортотропну пластину з еліптичним отвором з півосьми a, b . Напруження у точках $A(a, 0), B(0, b)$ на межі цього отвору за розтягу пластини на нескінченності будуть [3, 4] такими:

$$\sigma_{\theta}(A) / p = 1 + \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) \frac{a}{b}, \quad \sigma_{\theta}(B) / p = \beta_1 \beta_2, \quad (1)$$

за розтягу вздовж осі Oy зусиллями p ;

$$\sigma_{\theta}(B) / q = 1 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{a}{b}, \quad \sigma_{\theta}(A) / q = \frac{1}{\beta_1 \beta_2}, \quad (2)$$

за розтягу зусиллями q в напрямі осі Ox .

Тут $\beta_{1,2} = \text{Im}(s_{1,2})$, $s_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння [1].

Для близьких за формою до щілин еліптичних отворів з півосьми a, b за поперечного розтягу максимальні напруження на основі формул (1), (2) можна записати у вигляді

$$\sigma_{\max} / p = 1 + C_e / \sqrt{(R/a)},$$

де $C_e = 1/\text{Re}s_1 + 1/\text{Re}s_2$, R – радіус кривини у вершині еліпса, a – більша піввісь. Тут враховано, що $a/b = \sqrt{a/R}$.

У зв'язку з цим прийемо, що максимальні напруження на щілині можуть бути описані функцією вигляду $\sigma_{\max}(\rho) / p \approx S(\rho)$ при

$$S(\rho) = C_1 / \sqrt{\rho} + C_0, \quad (3)$$

або, у випадку коли точність формули (3) буде недостатньою, більш загальною формулою

$$S(\rho) = C_1 / \sqrt{\rho} + C_0 + C_2 \sqrt{\rho}, \quad (4)$$

де $C_{0,1,2}$ – невідомі сталі, $\rho = r/l$.

Односторонній розтяг пластин. Розрахунок напружень проведено за допомогою МГПР при таких значеннях ρ_j відносного радіуса $\rho = r/l$: 0,005; 0,006; 0,0075; 0,01; 0,025; 0,05; 0,075; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Позначимо знайдені при вказаних вище значеннях радіусів відносні максимальні значення напружень через $\sigma_j = \sigma_{\theta}|_{\rho=\rho_j} / p$. Отримані значення цих величин при поперечному розтягу (при $\varphi = \pi/2$) для ізотропної пластини зображені на рис. 1 кружечками. Зазначимо, що розрахунки проведені за допомогою інтегральних рівнянь, в яких врахована симетрія НДС відносно осі Ox на основі модифікованої системи алгебричних рівнянь [1]. Рівняння межі щілини описували за формулами праці [4].

Сталі C_1, C_0 , які входять у зображення (3), або сталі C_1, C_2, C_0 в зображенні (4) визначали методом найменших квадратів так, щоб величина $I = \sum (S(\rho_j) - \sigma_j)^2$ була мінімальною. Розраховані на основі знайдених значень сталей C_j (вони нижче наведені зверху на рисунках) напруження за формулою (3) або (4) наведені суцільними лініями на цих рисунках залежно від відносної кривини $k_r = IK$ (на осі абсцис відкладено значення $\lg k_r$).

У [4] отримано, що в цьому випадку асимптотичне значення для напружень при $\rho \rightarrow 0$ має вигляд $\sigma_{\max}(\rho) / p = s / \sqrt{\rho}$, де $s = 2,992 / \sqrt{2} = 2,1157$. Тобто, відхилення знайденого нами значення C_1 від відповідного йому значення s із [4] не більше за 0,16%.

Розглянемо еквівалентний щілині еліптичний отвір з більшою піввісю l . Максимальні напруження на цьому отворі, згідно з формулою (1), будуть такі:

$$\sigma_{\max}^E / p = 1 + \frac{C_e}{\sqrt{\rho}},$$

$$\text{де } C_e = \frac{1}{\text{Im}(s_1)} + \frac{1}{\text{Im}(s_2)}.$$

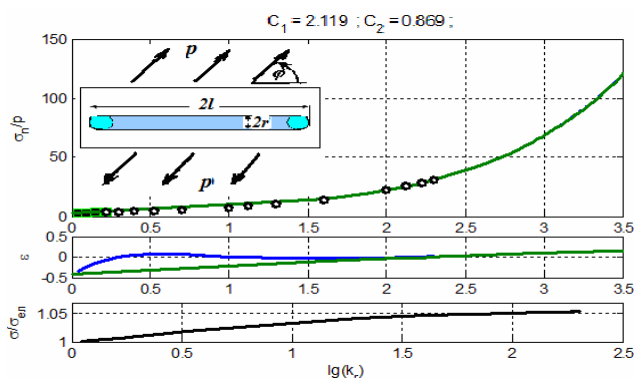


Рис. 1. Односторонній розтяг ізотропної пластини зі щілиною, формула (4)

Тут враховано, що для еквівалентного еліпса мала піввісь b визначається з умови $r = b^2 / l$. Позначимо відношення $\eta = C_1 / C_e$. Враховуючи, що для ізотропної пластини $C_e = 2$, маємо $\eta = 1,059$ за розробленим алгоритмом. Наведемо ще це відношення, яке отримано в [4] іншим методом: $\eta = 1,058$. Тобто, при малих радіусах кривини між максимальними напруженнями на щілині та на еквівалентному еліпсі маємо взаємозв'язок $\sigma_{\max} = \eta \sigma_{\max}^E$.

Аналогічні результати розрахунків для анізотропних матеріалів CF1, CF1₉₀, CF2, EF [1] зображено на рис. 2 – рис. 5. Для вибраних матеріалів приймалось, що напрям з максимальною жорсткістю паралельний осі Oy , а індекс внизу вказує, що цей напрям повернутий на відповідний кут. Розраховані коефіцієнти формули (4) та відношення $\eta = C_1 / C_e$ наведені у табл. 1.

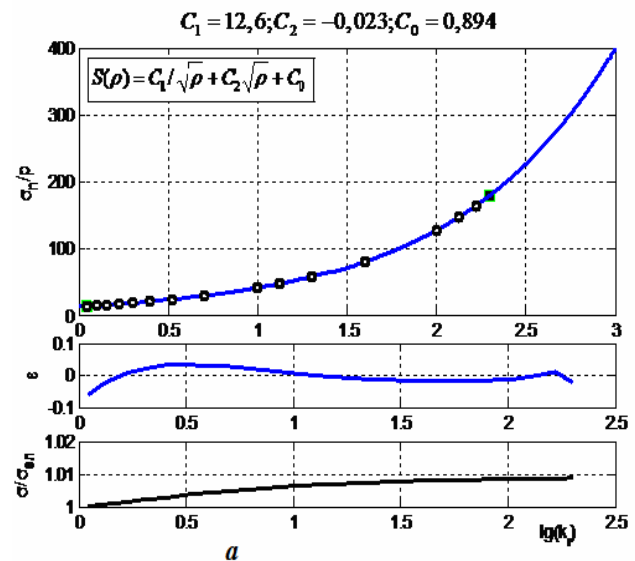


Рис. 2. Односторонній розтяг пластини з матеріалу CF1 зі щілиною

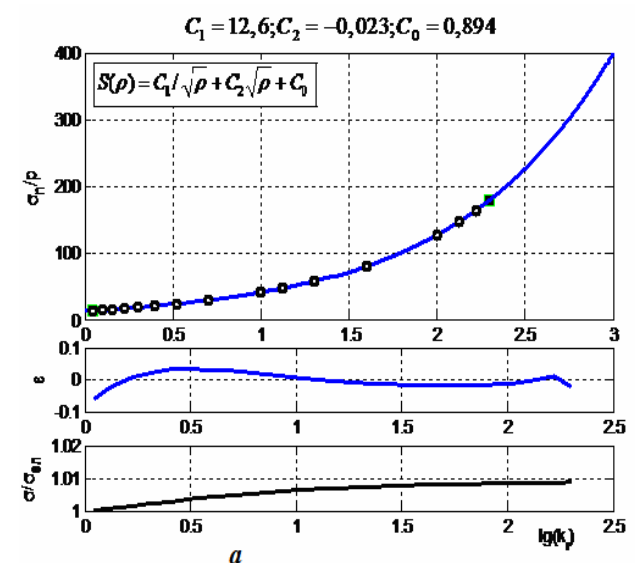


Рис. 3. Односторонній розтяг пластини з матеріалу CF1₉₀ зі щілиною

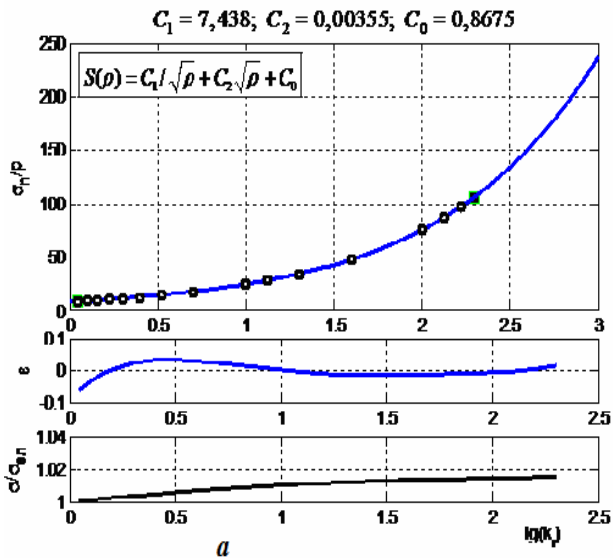


Рис. 4. Односторонній розтяг пластини з матеріалу CF2 зі щілиною

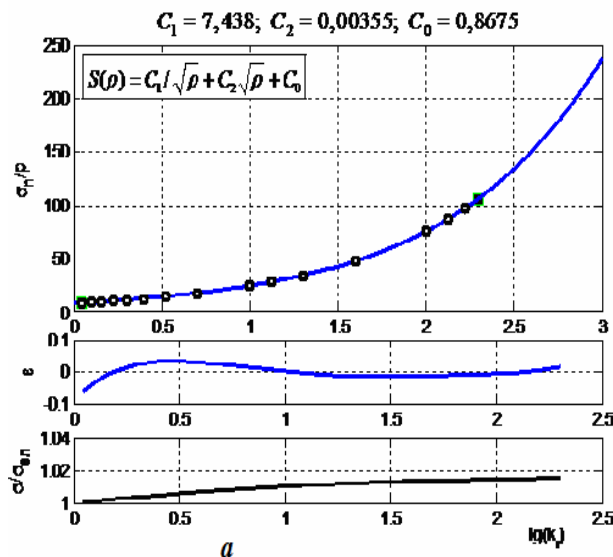


Рис. 5. Односторонній розтяг пластини з матеріалу EF зі щілиною

Таблиця 1

Коефіцієнти формули (4)

Матеріал	C_1	C_0	C_2	$\eta = C_1 / C_e$
Ізотроп.	2,119	0,866	0	1,059
CF1	12,6	0,894	-0,023	1,1283
CF1 ₉₀	2,068	0,6342	0,126	1,0095
CF2	7,458	0,8675	0,0035	1,017
EF	2,38	2,38	0,841	1,063

У всіх розглянутих випадках існує практична збіжність розрахованих напружень за формулами (3), (4) і знайдених МГІР напружень, що вказує на застосовність вибраних

формул для знаходження концентрації напружень біля закруглених щілин на всьому діапазоні зміни відношення $-0 < r/l < 0.9$. Вище всюди на рисунках на середніх графіках наведено значення відносної похибки (в %) використаних формул при $0,005 < r/l < 0.9$. Видно, що похибка наближеної формули тільки при відносно великих значеннях $0,3 < r/l < 0,9$ перевищує 1% для матеріалу CF1₉₀. В усіх інших випадках відносна похибка менша за 0,5%. При малих значеннях відносного радіуса (при $r/l < 0,1$) похибка виявилась ~0,1%.

Внизу на рисунках наведено відношення розрахованих коефіцієнтів концентрації напружень (ККН) на щілині до ККН для отвору, який є еквівалентним еліпсом. Як видно з рисунків, при значеннях $0,5 < r/l < 1$ ККН може бути знайдений з високою точністю на основі розгляду еквівалентного еліпса. На основі розгляду еквівалентного еліпса може бути розрахований ККН на всьому розглянутому діапазоні $0,005 < r/l < 1$ з похибкою не вищою за 5% для всіх анізотропних пластин, якщо щілина перпендикулярна до напрямку з більшою жорсткістю матеріалу, причому точність її зростає при зростанні міри анізотропії. Дещо більша похибка використання еквівалентного еліпса у випадку, коли щілина паралельна до напрямку з більшою жорсткістю анізотропного матеріалу – може перевищувати 10%.

На рис. 6 зображено зверху додатково розподіл напружень, який визначається за формулою, отриманою в [4] для випадку ізотропної пластини на діапазоні $10^{-5} < r/l < 1$ в іншому вигляді. Ця крива практично збігається з кривою, що розрахована за формулою (3) (на рисунку різниця між ними не помітна). На середньому графіку наведено додатково штриховою лінією відносно відхилення (в процентах) між розрахованими напруженнями за цими двома формулами.

Всесторонній розтяг пластин. Аналогічні результати для випадку всестороннього розтягу пластинки наведено на рис. 6 – рис. 10. Тут зображено вгорі додатково розподіл напружень, який визначається апроксимаційною формулою, отриманою в [4] на діапазоні $10^{-5} < r/l < 1$ та за формулою (3). Криві налягли і різниця між ними не помітна. На середньому графіку наведено додатково штриховою лінією відносно відхилення (в процентах) між розрахованими напруженнями за цими формулами.

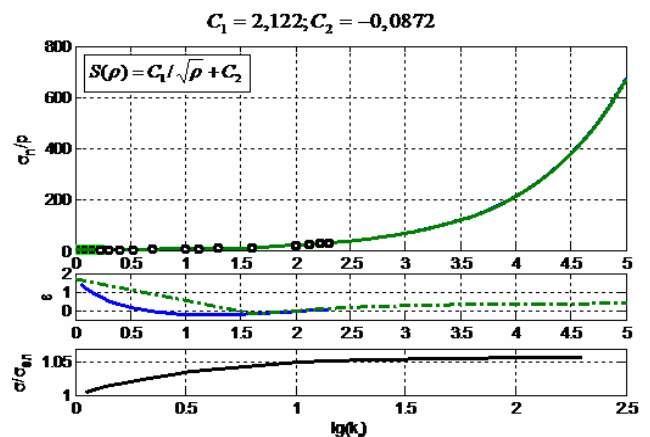


Рис. 6. Двосторонній розтяг ізотропної пластини з прямокутним отвором із закругленими сторонами: $C_1 = 2,122; C_2 = -0,0872$

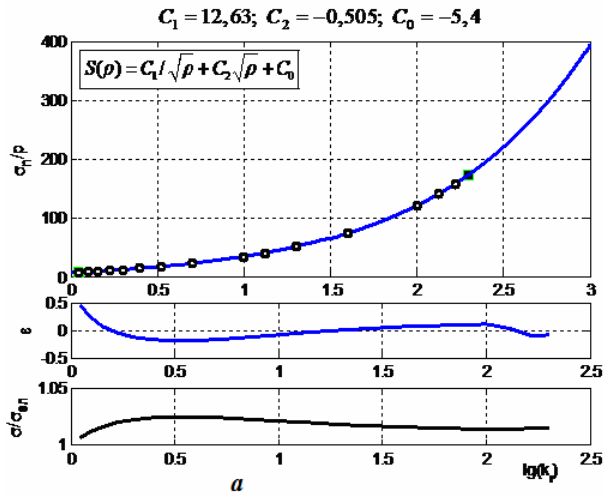


Рис. 7. Двосторонній розтяг пластини зі щілиною. Матеріал CF1 (а) і CF1₉₀ (б)

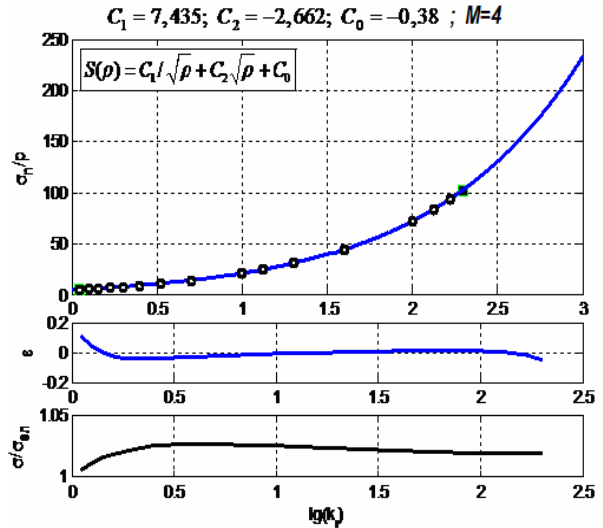


Рис. 10. Двосторонній розтяг пластини зі щілиною. Матеріал CF2₉₀

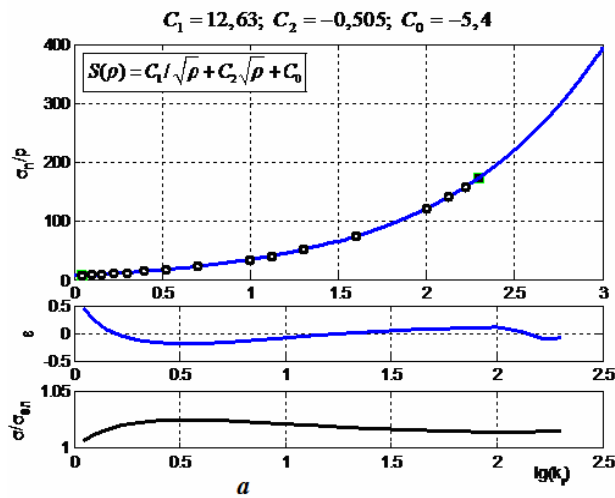


Рис. 8. Двосторонній розтяг пластини зі щілиною. Матеріал CF1₉₀

Таблиця 2

Коефіцієнти формули (4)

Матеріал	C ₁	C ₀	C ₂
Ізотроп.	2,122	-0,0872	0
CF1	12,63	-5,4	-0,505
CF1 ₉₀	2,068	0,5128	0,101
CF2	7,435	-0,38	-2,662

Розраховані коефіцієнти формули (4) для розглянутих випадків наведені в табл. 2.

Порівнюючи значення основних коефіцієнтів C₁ в табл. 1 і табл. 2 для різних типів навантаження, видно, що вони практично збігаються.

Розтяг пластин під кутом. Виконано також розрахунки для пластин, що виготовлені з ізотропного матеріалу і матеріалу ЕФ за розтягу під кутом $\varphi = 30^\circ$, результати яких зображено на рис. 11 – рис. 13.

Розглянемо ізотропну пластину з еліптичним отвором при більшій півосі l , який еквівалентний за мінімальною кривиною щілині. На основі [5] при малих кривинах для максимальних напружень справедлива формула

$$\sigma_{\max} = p \sin \varphi (1 + \sin \varphi + \sqrt{\rho}) / \sqrt{\rho} + O(\rho).$$

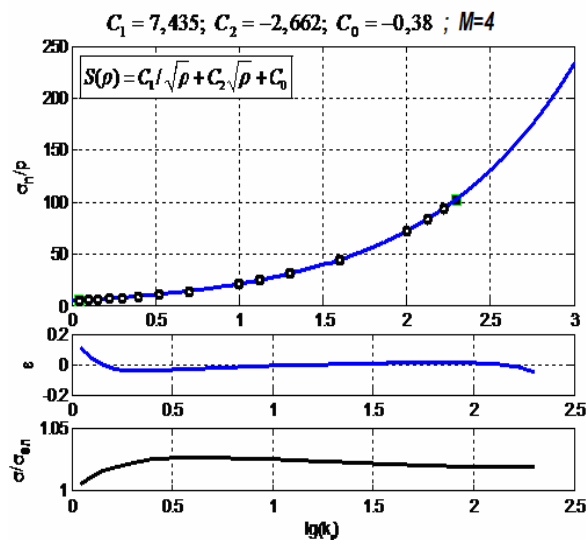


Рис. 9. Двосторонній розтяг пластини зі щілиною. Матеріал CF2

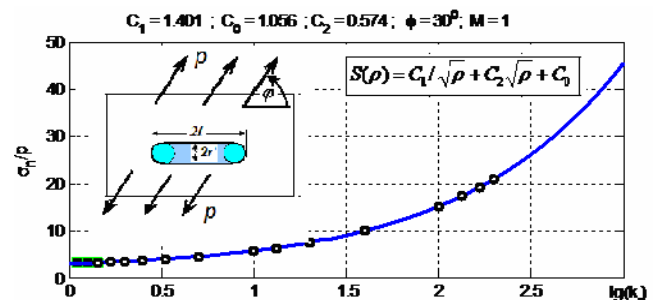


Рис. 11. Розтяг ізотропної пластини під кутом 30°

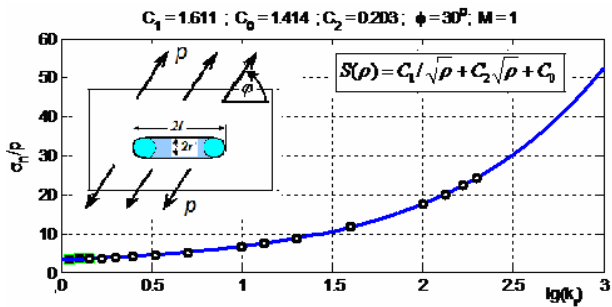


Рис. 12. Розтяг пластини з матеріалу ЕФ під кутом 30°

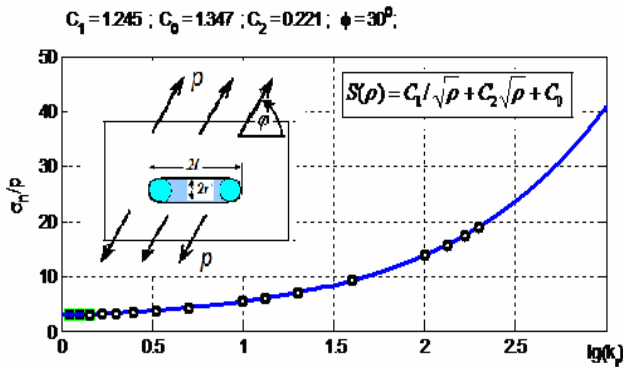


Рис. 13. Розтяг пластинки з матеріалу ЕФ₉₀ під кутом 30°

Тут враховано, що для еквівалентного еліпса $b/l = \sqrt{\rho}$. Поклавши $\phi = 30^\circ$, маємо для максимальних напружень на еліптичному отворі асимптотичну формулу $\sigma_{max}/p \approx 0,75/\sqrt{\rho} + 0,5$.

Наведемо для порівняння отриману для цього випадку асимптотичну формулу для максимальних напружень на щілині:

$$\sigma_{max}/p \approx 1,401/\sqrt{\rho} + 1,056 + 0,574\sqrt{\rho}.$$

З порівняння видно, що асимптотичні формули для напружень на еквівалентному еліпсі істотно відрізняються від напружень на щілині за розтягу пластини під кутом.

Таким чином, встановлено, що формула (4) дає можливість з високою точністю визначати ККН для анізотропних пластин зі щілиною. Встановлено випадки, коли ККН можуть визначатись наближено на основі розгляду еквівалентного еліпса (за поперечного розтягу пластини). Показано, що за розтягу пластини під кутом знайдені так ККН істотно відрізняються від ККН на щілині.

Визначення ККН на основі КІН. Розглянемо пластину зі щілиною, яка перебуває під дією довільно прикладеного навантаження. Прийемо, що щілина розміщена на осях ортотропії і відомі значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) K_I та $K_{II} = 0$ при заміні щілини на тріщину. Використаємо взаємозв'язок між КІН для тріщини та максимальними напруженнями для еліптичного отвору, який на основі [1] може бути записаний у вигляді

$$\sigma_{max}^E = \frac{K_I}{\sqrt{\pi l}} \frac{C_e}{\sqrt{\rho}} + O(1),$$

де $\rho = r/l$, r – радіус кривини у вершині еліпса.

На основі наведених вище результатів для визначення максимальних напружень на щілині маємо співвідношення

$$\sigma_{max} = \eta \sigma_{max}^E = \eta \frac{K_I}{\sqrt{\pi l}} \frac{C_e}{\sqrt{\rho}} + O(1).$$

Висновок. Запропоновано підхід до побудови простих загальних формул для визначення концентрації напружень в анізотропних пластинках зі щілинами. Для побудови таких формул використано асимптотичні співвідношення для напружень, метод найменших квадратів і МГІР. Показано, що прості асимптотичні формули не тільки дають можливість встановити якісну функціональну залежність ККН від малих за величиною радіусів кривини, а можуть також використовуватись безпосередньо в інженерних розрахунках. Зокрема, показано, що отримані для цього випадку значення ККН на основі розгляду отвору еліптичної форми можуть призводити до похибок, більших за 10%. Наведено взаємозв'язок між ККН і КІН для дефектів типу тріщин, що мають форму щілини.

Література

1. Божидарнік В.В., Максимович О.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. Монографія. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
3. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. – М. – Л.: Гостехиздат, 1951. – 496 с.
4. Саврук М.П., Казберук А. Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. – 2007. – 43. – № 2. – С. 70-87.
5. Bozhydarnik W., Maksymovycz O. Дослідження стадії зародження руйнувань біля тріщиноподібних дефектів у пластинках // Zeszyty naukowe politechniki rzeszowskiej. Mechanika. Technika i technologia montażu maszyn. – Rzeszow, 2008. – S. 267-274.

Отримана 21.08.10

V. Bozhydarnik, O. Maksymovych

A calculation of tensions is near the crack of arbitrary width in anisotropic plates

Lutsk National Technical University, Lutsk

Methodology of calculation of the tensely-deformed state of anisotropic plates weak the rectangular opening with the rounded less parties (by a crack) of arbitrary width is in-process offered. For the construction of such formulas asymptotic correlations are used for tensions, least-squares method and method of limit-integral equalizations.