УДК 539.3

ДО ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ЗАМКНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВКЛЮЧЕННЯМ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Т. Шопа

Канд. фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН,
м. Івано-Франківськ

У роботі розглянуто задачу про усталені поперечні коливання шарнірно опертої ортотропної циліндричної замкненої оболонки з абсолютно жорстким включенням довільної форми та розташування, яке жорстко приєднане до оболонки, в рамках теорії оболонок, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Розв'язок ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь та секвенціальному підході до побудови функції Гріна. Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, яку розв'язано методом колокацій.

циліндрична ортотропна оболонка, включення, функція Гріна, секвенціальний підхід, коливання, частота вільних коливань

Вступ. У праці [1] знайдено розв'язок задачі про коливання трансверсально ізотропної шарнірно опертої циліндричної оболонки з круговим масивним абсолютно жорстким включенням у рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви, однак не враховує повороти навколо нормалі до серединної поверхні. У цій статті розв'язано задачу про коливання ортотропної замкненої циліндричної оболонки з абсолютно жорстким включенням довільної конфігурації, яке жорстко приєднане до оболонки в рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні.

1. Постановка задачі. Розглянемо усталений режим поперечних коливань циліндричної ортотропної шарнірно опертої оболонки на торцях з абсолютно жорстким масивним включенням, контуром якого є крива L. Циліндричну систему координат вибрано так, що вісь α_1 напрямлено вздовж осі оболонки, а колова координата $\alpha_2 = R\varphi$, де φ — центральний кут. Нехай осі ортотропії матеріалу збігаються з відповідними напрямами введеної криволінійної системи координат. На включення діє система сил, рівнодійна якої є сила $P = P_0 \sin(\omega_0 t)$. Сила P діє вздовж нормалі до поверхні оболонки в точці центра мас включення та змінюється за гармонічним законом з частотою ω_0 та амплітудою P_0.

Використовуватимемо такі позначення: $\vec{n}, \vec{\tau}$ – нормальний та дотичний вектор вздовж деякого напряму, E_1, E_2 – модулі Юнга матеріалу, G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву матеріалу, ν_{12}, ν_{21} – коефіцієнти Пуасона матеріалу, ρ – густина матеріалу, k_1, k_2 – головні кривини оболонки, $l, R, 2h$ – довжина, радіус та товщина оболонки відповідно, q_i, m_i – компоненти зовнішнього навантаження, w – прогин оболонки, $\gamma_{in}, \gamma_{i\tau}, u_{in}, u_{i\tau}$ – нормальні та тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні та осьових переміщень, Q_n – нормальна компонента перерізувальної сили,

M_n, M_τ, N_n, N_τ – нормальні й тангенціальні компоненти момента та осьової сили.

Граничні умови, що відповідають шарнірному опиранню на обох торцях оболонки, є такі:

$$w = 0,\ M_n = 0,\ N_n = 0,\ u_\tau = 0,\ \gamma_\tau = 0. \qquad (1)$$

Крайові умови на контурі L, що відповідають жорсткому контакту оболонки та включення, мають вигляд:

$$u_n = 0, \gamma_n = 0, u_\tau = 0, \gamma_\tau = 0,\ w = w_0(\alpha)\sin(\omega_0 t), \qquad (2)$$

де w_0 — амплітуда переміщення включення;

Рівняння руху масивного включення має вигляд

$$m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P - \int_L p(\xi, t)\, d(\xi), \qquad (3)$$

де m_0 — маса включення, $p(\xi, t) = p(\xi)\sin(\omega_0 t)$ — сили взаємодії оболонки та включення, де $p(\xi) = -Q_n(\xi)$.

2. Розв'язувальна система рівнянь. Дослідження проводитимемо за використання рівнянь теорії непологих оболонок, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Рівняння руху непологої оболонки, що враховують нормальну компоненту інерційної сили для випадку поперечних коливань, мають вигляд:

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} - k_i Q_i = -q_i \quad (i = 1, 2),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) - 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_3,$$

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i \quad (i = 1, 2). \qquad (4)$$

На основі розподілу напружень та переміщень

$$U_i = u_i + \gamma_i \alpha_3,\ U_3 = w,\ \sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3 \quad (-h \le \alpha_3 \le h),$$

$$\sigma_{i3} = \begin{cases} \dfrac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \quad (i, j = 1,\ 2,\ i \ne j) \qquad (5)$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду

$$M_{11} = D_1\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \nu_{12}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right),\ M_{22} = D_2\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \nu_{21}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$M_{12} = M_{21} = D_{12}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$N_{12} = N_{21} = B_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$N_{11} = B_1\left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \nu_{12}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + (k_1 + \nu_{12}k_2)w\right],$$

$$N_{22} = B_2\left[\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \nu_{21}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + (k_2 + \nu_{21}k_1)w\right],$$

$$Q_1 = \Lambda_1\left(\gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1\right),\ Q_2 = \Lambda_2\left(\gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2\right),$$

$$D_i = \frac{2h^3 E_i}{3(1 - \nu_{12}\nu_{21})},\ D_{12} = \frac{2h^3 G_{12}}{3},$$

$$B_{12} = 2hG_{12},\ B_i = \frac{2hE_i}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})},\ \Lambda_i = 2hG_{i3}. \qquad (6)$$

Нормальні й дотичні компоненти переміщень та зусиль визначаються за формулами:

$$\gamma_n = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2,\ \gamma_\tau = \tau_1\gamma_1 + \tau_2\gamma_2,\ w,$$
$$u_n = n_1 u_1 + n_2 u_2,\ u_\tau = \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2,$$

$$M_n = (M_{11}n_1 + M_{12}n_2)n_1 + (M_{21}n_1 + M_{22}n_2)n_2,$$

$$M_\tau = (M_{11}n_1 + M_{12}n_2)\tau_1 + (M_{21}n_1 + M_{22}n_2)\tau_2,$$

$$N_n = (N_{11}n_1 + N_{12}n_2)n_1 + (N_{21}n_1 + N_{22}n_2)n_2,$$

$$N_\tau = (N_{11}n_1 + N_{12}n_2)\tau_1 + (N_{21}n_1 + N_{22}n_2)\tau_2,$$

$$Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2. \qquad (7)$$

Внаслідок підстановки фізичних співвідношень (6) у рівняння руху (4) розв'язувальна система динамічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$[\mathbf{L}]\{U\} = -\{P\}, \qquad (8)$$

$$\{U\} = \{u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2\},\ \{P\} = \{q_1, q_2, q_3, m_1, m_2\},$$

$$\mathbf{L}_{11} = B_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2\Lambda_1,$$

$$\mathbf{L}_{22} = B_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{33} = \Lambda_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} -$$

$$-\left(k_1 B_1(k_1 + \nu_{12}k_2) + k_2 B_2(k_2 + \nu_{21}k_1)\right) - 2h\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{14} = \mathbf{L}_{41} = k_1\Lambda_1, \mathbf{L}_{25} = \mathbf{L}_{52} = k_2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{44} = D_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1,$$

$$\mathbf{L}_{55}=D_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+D_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{34}=-\mathbf{L}_{43}=\Lambda_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\mathbf{L}_{35}=-\mathbf{L}_{53}=\Lambda_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{12}=\left(B_1\nu_{12}+B_{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\mathbf{L}_{21}=\left(B_{12}+B_2\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{45}=\left(D_1\nu_{12}+D_{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\ \mathbf{L}_{54}=\left(D_{12}+D_2\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{15}=\mathbf{L}_{51}=0,\ \mathbf{L}_{24}=\mathbf{L}_{42}=0,$$

$$\mathbf{L}_{13}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_1k_2\nu_{12}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{31}=-\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_2k_2\nu_{21}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{23}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_2k_2\nu_{21}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{32}=-\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_1k_1\nu_{12}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}.$$

4. Побудова функції Ґріна задачі. Функцію Ґріна для вищезгаданої крайової задачі знайдено за допомогою методу Фур'є та секвенціального подання дельта-функції (у вигляді послідовності дельтаподібних функцій).

Подамо в системі рівннянь (8) :

$$\begin{aligned}
q_1&=\mathrm{T}_1^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0t\right),\\
q_2&=\mathrm{T}_2^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0t\right),\\
q_3&=\mathrm{T}_3^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0t\right),\\
m_1&=\mathrm{T}_4^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0t\right),\\
m_2&=\mathrm{T}_5^r\delta_{\varepsilon1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega_0t\right),
\end{aligned}\tag{9}$$

$$\delta_\varepsilon(\xi,\xi^r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}g\left(\dfrac{\left|\xi-\xi^r\right|}{\varepsilon}\right), & \left|\xi-\xi^r\right|\le\varepsilon,\\ 0, & \left|\xi-\xi^r\right|>\varepsilon,\end{cases}$$

де $g(\varepsilon)\left(0\le\varepsilon\le1\right)-$ спадна гладка функція,

$$g(1)=0,\ \int_0^1 g(\xi)d\xi=1.$$

Розкладемо співвідношення (9) у ряди Фур'є:

$$q_3^r=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}T_3^rC_{km}(\varepsilon)\Big(\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\ \right)+$$

$$+\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\ \right)\Big)\sin\left(\omega_0t\right),$$

$$\begin{Bmatrix}q_1^r\\ m_1^r\end{Bmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}T_1^r\\ T_4^r\end{Bmatrix}C_{km}(\varepsilon)\Big(\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\ \right)+$$

$$+\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha\ \right)\Big)\sin\left(\omega_0t\right),$$

$$\begin{Bmatrix}q_2^r\\ m_2^r\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}T_2^r\\ T_5^r\end{Bmatrix}C_{km}(\varepsilon)\Big(\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\ \right)+$$

$$+\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\ \right)\Big)\sin\left(\omega_0t\right),\tag{10}$$

де

$$\begin{aligned}
&\Phi_{km}^{cs}(\alpha)=\cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),\\
&\Phi_{km}^{sc}(\alpha)=\sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),\\
&\Phi_{km}^{ss}(\alpha)=\sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right);\\
&\Phi_{km}^{cc}(\alpha)=\cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),\\
&\lambda_{1k}=\frac{k\pi}{l_1},\lambda_{2m}=\frac{m\pi}{l_2},\ l_2=R\pi,\ l_1=l,\\
&C_{km}(\varepsilon)=\frac{4}{l_1l_2}\varphi\left(\lambda_{1k}\varepsilon\right)\varphi\left(\lambda_{2m}\varepsilon\right),
\end{aligned}$$

$\varphi-$ вагова функція, яка визначає тип узагальненого підсумовування, що відповідає певному вибору базової функції дельтаподібної послідовності.

Розв'язки шукаємо у такій формі:

$$w\left(\alpha,\alpha^r,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(w_{\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}(\alpha)+$$

$$+w_{\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\Big)\sin\left(\omega_0t\right),$$

$$\begin{Bmatrix}u_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\\ \gamma_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\end{Bmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\begin{Bmatrix}u_{1\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\\ \gamma_{1\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^{cs}(\alpha)+\right.$$

$$\left.+\begin{Bmatrix}u_{1\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\\ \gamma_{1\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\right)\sin\left(\omega_0t\right),$$

$$\begin{Bmatrix}u_2\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\\ \gamma_2\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\begin{Bmatrix}u_{2\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\\ \gamma_{2\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^{sc}(\alpha)+\right.$$

$$\left.+\begin{Bmatrix}u_{2\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\\ \gamma_{2\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\right)\sin\left(\omega_0t\right).\tag{11}$$

Після підстановки співвідношень (9), розкладених у ряди (10), та рядів (11) у розв'язувальну систему рівнянь

(8) отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів невідомих функцій. Часової координати вдається позбутись у випадку усталених гармонічних коливань.

У результаті одержимо функцію Ґріна задачі в аналітичному вигляді:

$$U\left(\alpha,\alpha^r,t\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}U\left(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{E}^{(1)}_{\mathbf{km}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}^{(1)}_{\mathbf{km}}\right]\left[\mathbf{E}^{(1)}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^r\right)\right]+$$

$$+\left[\mathbf{E}^{(2)}_{\mathbf{km}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}^{(2)}_{\mathbf{km}}\right]\left[\mathbf{E}^{(2)}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^r\right)\right]\Big\rangle\left\{T^r\right\}\sin\left(\omega_0 t\right),\quad (12)$$

$$U\left(\alpha,\alpha^r,t\right)=\left\{u_1(\alpha,\alpha^r,t),u_2(\alpha,\alpha^r,t),w(\alpha,\alpha^r,t),\right.$$

$$\left.\gamma_1(\alpha,\alpha^r,t),\gamma_2(\alpha,\alpha^r,t)\right\};$$

$$\left[\mathbf{E}^{(1)}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^r\right)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}\Phi^{cs}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Phi^{sc}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi^{ss}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Phi^{cs}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi^{sc}_{km}\left(\alpha^r\right)\end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{U}^{(1)}_{\mathbf{km}}\right]=\begin{bmatrix}u^{(1)1}_{1\varepsilon km} & u^{(1)2}_{1\varepsilon km} & u^{(1)3}_{1\varepsilon km} & u^{(1)4}_{1\varepsilon km} & u^{(1)5}_{1\varepsilon km}\\ u^{(1)1}_{2\varepsilon km} & u^{(1)2}_{2\varepsilon km} & u^{(1)3}_{2\varepsilon km} & u^{(1)4}_{2\varepsilon km} & u^{(1)5}_{2\varepsilon km}\\ w^{(1)1}_{\varepsilon km} & w^{(1)2}_{\varepsilon km} & w^{(1)3}_{\varepsilon km} & w^{(1)4}_{\varepsilon km} & w^{(1)5}_{\varepsilon km}\\ \gamma^{(1)1}_{1\varepsilon km} & \gamma^{(1)2}_{1\varepsilon km} & \gamma^{(1)3}_{1\varepsilon km} & \gamma^{(1)4}_{1\varepsilon km} & \gamma^{(1)5}_{1\varepsilon km}\\ \gamma^{(1)1}_{2\varepsilon km} & \gamma^{(1)2}_{2\varepsilon km} & \gamma^{(1)3}_{2\varepsilon km} & \gamma^{(1)4}_{2\varepsilon km} & \gamma^{(1)5}_{2\varepsilon km}\end{bmatrix},$$

$$u^{(1)1}_{1km}=\frac{1}{\det\left|\mathbf{L}^{(1)\mathbf{km}}\right|}\det\begin{vmatrix}\mathbf{L}^{(1)km}_{22} & \mathbf{L}^{(1)km}_{23} & \mathbf{L}^{(1)km}_{24} & \mathbf{L}^{(1)km}_{25}\\ \mathbf{L}^{(1)km}_{32} & \mathbf{L}^{(1)km}_{33} & \mathbf{L}^{(1)km}_{34} & \mathbf{L}^{(1)km}_{35}\\ \mathbf{L}^{(1)km}_{42} & \mathbf{L}^{(1)km}_{43} & \mathbf{L}^{(1)km}_{44} & \mathbf{L}^{(1)km}_{45}\\ \mathbf{L}^{(1)km}_{52} & \mathbf{L}^{(1)km}_{53} & \mathbf{L}^{(1)km}_{54} & \mathbf{L}^{(1)km}_{55}\end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$\mathbf{L}^{(1)km}_{11}=-B_1\lambda^2_{1k}-B_{12}\lambda^2_{2m}-k_1^2\Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{22}=-B_{12}\lambda^2_{1k}-B_2\lambda^2_{2m}-k_2^2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}^{(1)km}_{33}=-\Lambda_1\lambda^2_{1k}-\Lambda_2\lambda^2_{2m}-$$
$$-\left(k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)+k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right)+2\rho h\omega_0^2,$$

$$\mathbf{L}^{(1)km}_{44}=-D_1\lambda^2_{1k}-D_{12}\lambda^2_{2m}-\Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{55}=D_{12}\lambda^2_{1k}-D_2\lambda^2_{2m}-\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}^{(1)km}_{12}=-\left(B_1\nu_{12}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{21}=-\left(B_2\nu_{21}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{34}=\mathbf{L}^{(1)km}_{43}=-\Lambda_1\lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}^{(1)km}_{45}=-\left(D_1\nu_{12}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{54}=-\left(D_2\nu_{21}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{35}=\mathbf{L}^{(1)km}_{53}=-\Lambda_2\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}^{(1)km}_{13}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_1k_2\nu_{12}\right)\lambda_{1k},$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{31}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}^{(1)km}_{23}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{32}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_1k_1\nu_{12}\right)\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}^{(1)km}_{14}=\mathbf{L}^{(1)km}_{41}=k_1\Lambda_1,\ \mathbf{L}^{(1)km}_{25}=\mathbf{L}^{(1)km}_{52}=k_2\Lambda_2,$$
$$\mathbf{L}^{(1)km}_{15}=\mathbf{L}^{(1)km}_{51}=\mathbf{L}^{(1)km}_{24}=\mathbf{L}^{(1)km}_{42}=0,$$

$$\left[\mathbf{E}^{(2)}_{\mathbf{km}}\left(\alpha^r\right)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}\Phi^{cc}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Phi^{ss}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi^{sc}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Phi^{cc}_{km}\left(\alpha^r\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi^{ss}_{km}\left(\alpha^r\right)\end{bmatrix},$$

$$\left[\mathbf{U}^{(2)}_{\mathbf{km}}\right]=\begin{bmatrix}u^{(2)1}_{1\varepsilon km} & u^{(2)2}_{1\varepsilon km} & u^{(2)3}_{1\varepsilon km} & u^{(2)4}_{1\varepsilon km} & u^{(2)5}_{1\varepsilon km}\\ u^{(2)1}_{2\varepsilon km} & u^{(2)2}_{2\varepsilon km} & u^{(2)3}_{2\varepsilon km} & u^{(2)4}_{2\varepsilon km} & u^{(2)5}_{2\varepsilon km}\\ w^{(2)1}_{\varepsilon km} & w^{(2)2}_{\varepsilon km} & w^{(2)3}_{\varepsilon km} & w^{(2)4}_{\varepsilon km} & w^{(2)5}_{\varepsilon km}\\ \gamma^{(2)1}_{1\varepsilon km} & \gamma^{(2)2}_{1\varepsilon km} & \gamma^{(2)3}_{1\varepsilon km} & \gamma^{(2)4}_{1\varepsilon km} & \gamma^{(2)5}_{1\varepsilon km}\\ \gamma^{(2)1}_{2\varepsilon km} & \gamma^{(2)2}_{2\varepsilon km} & \gamma^{(2)3}_{2\varepsilon km} & \gamma^{(2)4}_{2\varepsilon km} & \gamma^{(2)5}_{2\varepsilon km}\end{bmatrix},$$

$$u^{(2)1}_{1km}=\frac{1}{\det\left|\mathbf{L}^{(2)\mathbf{km}}\right|}\det\begin{vmatrix}\mathbf{L}^{(2)km}_{22} & \mathbf{L}^{(2)km}_{23} & \mathbf{L}^{(2)km}_{24} & \mathbf{L}^{(2)km}_{25}\\ \mathbf{L}^{(2)km}_{32} & \mathbf{L}^{(2)km}_{33} & \mathbf{L}^{(2)km}_{34} & \mathbf{L}^{(2)km}_{35}\\ \mathbf{L}^{(2)km}_{42} & \mathbf{L}^{(2)km}_{43} & \mathbf{L}^{(2)km}_{44} & \mathbf{L}^{(2)km}_{45}\\ \mathbf{L}^{(2)km}_{52} & \mathbf{L}^{(2)km}_{53} & \mathbf{L}^{(2)km}_{54} & \mathbf{L}^{(2)km}_{55}\end{vmatrix},\ ..,$$

$$\mathbf{L}^{(2)km}_{11}=-B_1\lambda^2_{1k}-B_{12}\lambda^2_{2m}-k_1^2\Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}^{(2)km}_{22}=-B_{12}\lambda^2_{1k}-B_2\lambda^2_{2m}-k_2^2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}^{(2)km}_{33}=-\Lambda_1\lambda^2_{1k}-\Lambda_2\lambda^2_{2m}-$$
$$-\left(k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)+k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right)+2\rho h\omega_0^2,$$

$$\mathbf{L}_{44}^{(2)km} = -D_1\lambda_{1k}^2 - D_{12}\lambda_{2m}^2 - \Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}_{55}^{(2)km} = D_{12}\lambda_{1k}^2 - D_2\lambda_{2m}^2 - \Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{12}^{(2)km} = \left(B_1\nu_{12} + B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{21}^{(2)km} = \left(B_2\nu_{21} + B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{34}^{(2)km} = \mathbf{L}_{43}^{(2)km} = -\Lambda_1\lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}_{45}^{(2)km} = \left(D_1\nu_{12} + D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{54}^{(2)km} = \left(D_2\nu_{21} + D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{35}^{(2)km} = \mathbf{L}_{53}^{(2)km} = \Lambda_2\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{13}^{(2)km} = \left(k_1\Lambda_1 + B_1k_1 + B_1k_2\nu_{12}\right)\lambda_{1k},$$
$$\mathbf{L}_{31}^{(2)km} = \left(k_1\Lambda_1 + B_1k_1 + B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}_{23}^{(2)km} = -\left(k_2\Lambda_2 + B_2k_2 + B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{32}^{(2)km} = -\left(k_2\Lambda_2 + B_2k_2 + B_1k_1\nu_{12}\right)\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{14}^{(2)km} = \mathbf{L}_{41}^{(2)km} = k_1\Lambda_1,\ \mathbf{L}_{25}^{(2)km} = \mathbf{L}_{52}^{(2)km} = k_2\Lambda_2,$$
$$\mathbf{L}_{15}^{(2)km} = \mathbf{L}_{51}^{(2)km} = \mathbf{L}_{24}^{(2)km} = \mathbf{L}_{42}^{(2)km} = 0,$$
$$\mathbf{L}_{15}^{km} = \mathbf{L}_{51}^{km} = \mathbf{L}_{24}^{km} = \mathbf{L}_{42}^{km} = 0.$$

5. Зведення крайової задачі до системи інтегральних рівнянь та розв'язання методом колокацій. На основі знайденої функції Ґріна (12), граничних умов (2), (3), фізичних співвідношень, виразів для нормальних та дотичних компонент переміщень і зусиль (4) отримано систему шести інтегральних рівнянь:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{\mathbf{(1)(U)}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}^{\mathbf{(1)}}(\xi)\right] +$$

$$+\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{\mathbf{(2)(U)}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}^{\mathbf{(2)}}(\xi)\right]\Big\rangle\begin{Bmatrix} T_1(\xi) \\ T_2(\xi) \\ T_3(\xi) \\ T_4(\xi) \\ T_5(\xi) \end{Bmatrix} dl(\xi); \qquad (13)$$

$$\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{\mathbf{(1)(U)}}(\alpha)\right] = \begin{bmatrix} u_{1n}^{(1)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots. & u_{5n}^{(1)}(\alpha) \\ u_{1\tau}^{(1)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & u_{1\tau}^{(1)}(\alpha) \\ w_1^{(1)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & w_5^{(1)}(\alpha) \\ \gamma_{1n}^{(1)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & \gamma_{5n}^{(1)}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}^{(1)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & \gamma_{5\tau}^{(1)}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$u_{in}^{(1)}(\alpha) = n_1(\alpha)u_{1\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) + n_2(\alpha)u_{2\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{sc}(\alpha^r),$$
$$u_{i\tau}^{(1)}(\alpha) = \tau_1(\alpha)u_{1\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) + \tau_2(\alpha)u_{2\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{sc}(\alpha^r),$$
$$w_i^{(1)}(\alpha) = w_{\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{ss}(\alpha^r),$$
$$\gamma_{in}^{(1)}(\alpha) = n_1(\alpha)\gamma_{1\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) + n_2(\alpha)\gamma_{2\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{sc}(\alpha^r),$$
$$\gamma_{i\tau}^{(1)}(\alpha) = \tau_1(\alpha)\gamma_{1\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) + \tau_2(\alpha)\gamma_{2\varepsilon km}^{(1)i}\Phi_{km}^{sc}(\alpha^r),$$

$$\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{\mathbf{(2)(U)}}(\alpha)\right] = \begin{bmatrix} u_{1n}^{(2)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots. & u_{5n}^{(2)}(\alpha) \\ u_{1\tau}^{(2)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & u_{1\tau}^{(2)}(\alpha) \\ w_1^{(2)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & w_5^{(2)}(\alpha) \\ \gamma_{1n}^{(2)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & \gamma_{5n}^{(2)}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}^{(2)}(\alpha) & \dots & \dots & \dots & \gamma_{5\tau}^{(2)}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$u_{in}^{(2)}(\alpha) = n_1(\alpha)u_{1\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{cc}(\alpha^r) + n_2(\alpha)u_{2\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{ss}(\alpha^r),$$
$$u_{i\tau}^{(2)}(\alpha) = \tau_1(\alpha)u_{1\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{cc}(\alpha^r) + \tau_2(\alpha)u_{2\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{ss}(\alpha^r),$$
$$w_i^{(2)}(\alpha) = w_{\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{sc}(\alpha^r),$$
$$\gamma_{in}^{(2)}(\alpha) = n_1(\alpha)\gamma_{1\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{cc}(\alpha^r) + n_2(\alpha)\gamma_{2\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{ss}(\alpha^r),$$
$$\gamma_{i\tau}^{(2)}(\alpha) = \tau_1(\alpha)\gamma_{1\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{cc}(\alpha^r) + \tau_2(\alpha)\gamma_{2\varepsilon km}^{(2)i}\Phi_{km}^{ss}(\alpha^r),$$

$$m_0\omega_0^2 w_0 = P_0 - \int_L Q_n(\xi)d(\xi), \qquad (13)$$

де $Q_n(\xi) = \sum_{i=1}^{5} Q_{in}(\xi)T_i(\xi)$,

$$Q_{in} = \Lambda_1 n_1\left(\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(\gamma_{1km}^{(1)i} + \lambda_{1k}w_{km}^{(1)i} - k_1u_{1km}^{(1)i}\right) +\right.$$
$$\left.+\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\gamma_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k}w_{km}^{(2)i} - k_1u_{1km}^{(2)i}\right)\right) +$$
$$+\Lambda_2 n_2\left(\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\gamma_{2km}^{(1)i} + \lambda_{2m}w_{km}^{(1)i} - k_2u_{2km}^{(1)i}\right) +\right.$$
$$\left.+\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(\gamma_{2km}^{(2)i} - \lambda_{2m}w_{km}^{(2)i} - k_2u_{2km}^{(2)i}\right)\right).$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь використовуємо метод колокацій. Для цього контур кривої L замінюємо ламаними (N — кількість відрізків розбиття контуру, α^r — середини відрізків розбиття контуру, r=1… N). На кожному з прямолінійних відрізків контурів для фіктивних зусиль задаємо такий розподіл:

$$T^r(\xi) = T^r\delta\left(\alpha^r, \xi\right)$$

і мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій α^q.

У результаті система, що відповідає системі інтегральних рівнянь (13), міститиме 5N+1лінійних алгебричних рівнянь і матиме такий вигляд:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left\langle \left[\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(1)(\mathbf{U})}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(2)(\mathbf{U})}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\right]\right\rangle \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \\ T_4^r \\ T_5^r \end{Bmatrix}, \qquad q = 1....N,$$

$$m_0\omega_0^2 w_0 = P_0 - \sum_{i=1}^{5}\sum_{r=1}^{N} Q_{in}(\xi) T_i^r .$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідної системи лінійних алгебричних рівнянь. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напряму з нормаллю $\vec{n}(\alpha) = (n_1(\alpha), n_2(\alpha))$ і дотичною $\tau(\alpha) = (\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha))$ знаходимо на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на контурі включення.

Висновки. В рамках знайденого розв'язку можна розглядати випадки, коли контур включення містить кутові точки, оскільки на етапі числового розв'язування методом колокацій проводиться дискретизація його контуру.

Література

1. *Сухорольський М., Шопа Т.* Коливання трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки з масивним круговим включенням // Машинознавство. – 2008. – №11(137). – С. 8-12.

Отримана 01.09.11

T. Shopa

To the construction of the solution of the problem on the vibration of the orthotropic closed cylindrical shell with the inclusion of the arbitrary configuration

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Ivano-Frankivsk

In the framework of the shell theory that takes into consideration the shear displacements and the rotation angles around the normal to the middle surface of the shell the problem on the vibration of simply supported orthotropic closed cylindrical shell with the inclusion of the arbitrary configuration is considered in the paper. Solution is built on the base of the sequential approach to the construction of the Green function. The boundary value problems are reduced to systems of integral equations that are solved using the collocation method.

Інформація

Техніка і дизайн

Українсько-Польська науково-технічна конференція
Україна, м. Київ, 19 – 21 червня 2012 р.

Тематика конференції:

– Модульне проектування технологічних систем і машин.
– Проблеми трибології при експлуатації машин.
– Сервісне обслуговування машин.

Адреса оргкомітету:

Київський національний університет технології та дизайну,
01011, Україна, м. Київ,
вул. Немировича-Данченка, 2.
Тел. (044) 256-21-68; (044) 256-21-85;
тел/факс: (044) 280-16-03