УДК 539.3

ДО ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Т. Шопа

Кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Івано-Франківськ

У роботі розглянуто задачу про усталені поперечні коливання шарнірно опертої ортотропної пластини з абсолютно жорстким включенням довільної форми та розташування, яке жорстко приєднане до пластини, в рамках теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Розв'язок ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь та секвенціальному підході до побудови функції Гріна. Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, яку розв'язано методом колокацій.

ортотропна пластина, включення, функція Гріна, секвенціальний підхід, коливання, частоти вільних коливань

Вступ. Відомі праці, в яких знайдено розв'язки задач про коливання ортотропних шарнірно опертих пластин з включеннями в рамках теорії, яка враховує поперечні зсуви, однак не враховує повороти навколо нормалі до серединної поверхні [1, 2]. У цій роботі розв'язано задачу про коливання ортотропної пластини з абсолютно жорстким включенням довільної конфігурації жорстко приєднаним до пластини в рамках теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні.

1. Постановка задачі. Розглянемо усталений режим поперечних коливань ортотропної шарнірно опертої пластини з абсолютно жорстким масивним включенням, контуром якого є крива L. Нехай осі ортотропії матеріалу співпадають з відповідними напрямками сторін пластини. На включення діє система сил, рівнодійною якої є сила $P = P_0 \sin(\omega_0 t)$. Сила P діє вздовж нормалі до поверхні пластини, прикладена в центрі мас включення та змінюється за гармонічним законом з частотою ω_0 та амплітудою P_0.

Використовуватимемо такі позначення: $\vec{n}, \vec{\tau}$ – нормальний та дотичний вектор вздовж деякого напрямку, E_1, E_2 – модулі Юнга матеріалу, G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву матеріалу, ν_{12}, ν_{21} – коефіцієнти Пуассона матеріалу, ρ – густина матеріалу, $l_1, l_2, 2h$ – довжини сторін та товщина пластини відповідно, q_3, m_i – компоненти зовнішнього навантаження, w – прогин пластини, γ_n, γ_τ – нормальні та тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні, Q_n – нормальна компонента перерізувальної сили, M_n, M_τ – нормальні й тангенціальні компоненти моменту.

Умови шарнірного опирання на краях пластини

$$w = 0,\ M_n = 0,\ \gamma_\tau = 0. \tag{1}$$

Крайові умови на контурі L, що відповідають жорсткому контакту пластини та включення, є такими:

$$\gamma_n = 0, \gamma_\tau = 0, \; w = w_0(\alpha)\sin(\omega_0 t), \tag{2}$$

де w_0 – амплітуда переміщення включення.

Рівняння руху масивного включення має вигляд

$$m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P - \int_L p(\xi, t)\, d(\xi), \tag{3}$$

де m_0 – маса включення, $p(\xi, t) = p(\xi)\sin(\omega_0 t)$ – сили взаємодії пластини та включення; $p(\xi) = -Q_n(\xi)$.

2. Розв'язувальна система рівнянь. Дослідження проводитимемо за використання рівнянь теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні. Рівняння руху пластини, що враховують нормальну компоненту інерційної сили для випадку поперечних коливань, мають вигляд:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q,$$

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i \quad (i = 1, 2). \tag{4}$$

На основі розподілу напружень та переміщень:

$$U_i = u_i + \gamma_i \alpha_3, \; U_3 = w,$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3 \quad (-h \le \alpha_3 \le h),$$

$$\sigma_{i3} = \begin{cases} \dfrac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \; i \ne j). \tag{5}$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду:

$$M_{11} = D_1\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \nu_{12}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right), \; M_{22} = D_2\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \nu_{21}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$M_{12} = M_{21} = D_{12}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$Q_1 = \Lambda_1\left(\gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right), \; Q_2 = \Lambda_2\left(\gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}\right),$$

$$D_i = \frac{2h^3 E_i}{3(1 - n_{12} n_{21})}, \; D_{12} = \frac{2h^3 G_{12}}{3}, \; \Lambda_i = 2hG_{i3}. \tag{6}$$

Нормальні й дотичні компоненти переміщень та зусиль визначаємо з формул:

$$\gamma_n = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2, \; \gamma_\tau = \tau_1\gamma_1 + \tau_2\gamma_2, \; w,$$

$$M_n = \left(M_{11}n_1 + M_{12}n_2\right)n_1 + \left(M_{21}n_1 + M_{22}n_2\right)n_2,$$

$$M_\tau = \left(M_{11}n_1 + M_{12}n_2\right)\tau_1 + \left(M_{21}n_1 + M_{22}n_2\right)\tau_2,$$

$$Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2. \tag{7}$$

Після підстановки фізичних співвідношень (6) у рівняння руху (4) система ключових динамічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$[\mathbf{L}]\{U\} = -\{P\}, \tag{8}$$

$$\{U\} = \{w, \gamma_1, \gamma_2\}, \; \{P\} = \{q, m_1, m_2\},$$

$$\mathbf{L}_{11} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{22} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1,$$

$$\mathbf{L}_{33} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{12} = -\mathbf{L}_{21} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \mathbf{L}_{13} = -\mathbf{L}_{31} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{23} = (D_1\nu_{12} + D_{12})\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{32} = (D_{12} + D_2\nu_{21})\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}.$$

3. Побудова функції Ґріна задачі. Функцію Ґріна для вищезгаданої крайової задачі знайдено за допомогою методу Фур'є та секвенціального подання дельта-функції у вигляді послідовності дельтаподібних функцій.

Подамо в системі рівннянь (8)

$$\begin{aligned} q &= \mathrm{T}_3^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r)\delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r)\sin(\omega_0 t), \\ m_1 &= \mathrm{T}_4^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r)\delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r)\sin(\omega_0 t), \\ m_2 &= \mathrm{T}_5^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r)\delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r)\sin(\omega_0 t), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{|\xi - \xi^r|}{\varepsilon}\right), & |\xi - \xi^r| \le \varepsilon, \\ 0, & |\xi - \xi^r| > \varepsilon, \end{cases}$$

де $g(\varepsilon)\,(0 \le \varepsilon \le 1)$ – спадна гладка функція, $g(1) = 0, \; \int_0^1 g(\xi)d\xi = 1$.

Розкладемо співвідношення (9) у ряди Фур'є:

$$q = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_1^r C_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{ss}(\alpha^r)\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\sin(\omega_0 t),$$

$$m_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_2^r C_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{cs}(\alpha^r)\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\sin(\omega_0 t),$$

$$m_1=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}T_2^rC_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{cs}(\alpha^r)\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\sin(\omega_0t), \quad (10)$$

де

$$\Phi_{km}^{cs}(\alpha)=\cos(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2),$$
$$\Phi_{km}^{sc}(\alpha)=\sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\cos(\lambda_{2m}\alpha_2),$$
$$\Phi_{km}^{ss}(\alpha)=\sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2);$$
$$\Phi_{km}^{cc}(\alpha)=\cos(\lambda_{1k}\alpha_1)\cos(\lambda_{2m}\alpha_2),$$
$$\lambda_{1k}=\frac{k\pi}{l_1},\lambda_{2m}=\frac{m\pi}{l_2},$$
$$C_{km}(\varepsilon)=\mu_{km}\frac{4}{l_1l_2}\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{2m}\varepsilon),$$
$$\mu_{km}=\begin{cases}1,\ \text{якщо}\ k\neq0,\ m\neq0,\\ \frac{1}{2},\ \text{якщо}\ k=0,\ m\neq0,\\ \frac{1}{2},\ \text{якщо}\ k\neq0,\ m=0,\\ \frac{1}{4},\ \text{якщо}\ k=0,\ m=0,\end{cases}$$

$\varphi-$ вагова функція, яка визначає тип узагальненого підсумовування, що відповідає певному вибору базової функції дельтаподібної послідовності.

Розв'язки шукаємо у такій формі:

$$w(\alpha,\alpha^r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}w_{\varepsilon km}(\alpha^r)\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\sin(\omega_0t),$$

$$\gamma_1(\alpha,\alpha^r,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{1\varepsilon km}(\alpha^r)\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\sin(\omega_0t),$$

$$\gamma_2(\alpha,\alpha^r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_{2\varepsilon km}(\alpha^r)\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\sin(\omega_0t). \quad (11)$$

Підставимо співвідношення (9), розкладені в ряди (10), та ряди (11) у систему ключових рівнянь (8). Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів невідомих функцій, яку розв'язуватимемо методом Крамера. Часову координату у випадку усталених гармонічних коливань вдається відокремити.

Функція Ґріна задачі в аналітичному вигляді набуває форми

$$U(\alpha,\alpha^r,t)=\lim_{\varepsilon\to0}U(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t)=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\times$$
$$\times\left[\mathbf{E_{km}}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U_{km}}\right]\left[\mathbf{E_{km}}(\alpha^r)\right]\left\{T^r\right\}\sin(\omega_0t) \quad (12)$$

$$U(\alpha,\alpha^r,t)=\left\{w(\alpha,\alpha^r,t),\gamma_1(\alpha,\alpha^r,t),\gamma_2(\alpha,\alpha^r,t)\right\},$$

$$\left[\mathbf{E_{km}}(\alpha^r)\right]=\begin{bmatrix}\Phi_{km}^{ss}(\alpha^r)&0&0\\0&\Phi_{km}^{cs}(\alpha^r)&0\\0&0&\Phi_{km}^{sc}(\alpha^r)\end{bmatrix},$$

$$\left[\mathbf{U_{km}}\right]=\begin{bmatrix}w_{\varepsilon km}^1&w_{\varepsilon km}^2&w_{\varepsilon km}^3\\ \gamma_{1\varepsilon km}^1&\gamma_{1\varepsilon km}^2&\gamma_{1\varepsilon km}^3\\ \gamma_{2\varepsilon km}^1&\gamma_{2\varepsilon km}^2&\gamma_{2\varepsilon km}^3\end{bmatrix},$$

$$u_{1km}^1=\frac{1}{\det\left|\mathbf{L^{km}}\right|}\det\begin{vmatrix}\mathbf{L}_{22}^{km}&\mathbf{L}_{23}^{km}\\ \mathbf{L}_{32}^{km}&\mathbf{L}_{33}^{km}\end{vmatrix},\ .\ .\ .\ ,$$

$$\mathbf{L}_{11}^{km}=-\Lambda_1\lambda_{1k}^2-\Lambda_2\lambda_{2m}^2+2\rho h\omega_0^2,$$

$$\mathbf{L}_{22}^{km}=-D_1\lambda_{1k}^2-D_{12}\lambda_{2m}^2-\Lambda_1,$$
$$\mathbf{L}_{33}^{km}=D_{12}\lambda_{1k}^2-D_2\lambda_{2m}^2-\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{23}^{km}=-(D_1\nu_{12}+D_{12})\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{32}^{km}=-(D_2\nu_{21}+D_{12})\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$
$$\mathbf{L}_{12}^{km}=\mathbf{L}_{21}^{km}=-\Lambda_1\lambda_{1k},\ \mathbf{L}_{13}^{km}=\mathbf{L}_{31}^{km}=-\Lambda_2\lambda_{2m}.$$

3. Зведення крайової задачі до системи інтегральних рівнянь та розв'язання методом колокацій. Використовуючи знайдену функцію Ґріна (12), граничні умови на отворах (2), (3), фізичні співвідношення, вирази для нормальних та дотичних компонент переміщень і зусиль (4), отримуємо систему чотирьох інтегральних рівнянь:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega_{km}^{(U)}}(\alpha)\right]*$$
$$*\left[\mathbf{E_{km}}(\xi)\right]\begin{Bmatrix}T_1(\xi)\\T_2(\xi)\\T_3(\xi)\end{Bmatrix}dl(\xi)=\begin{Bmatrix}w_0\\0\\0\end{Bmatrix},$$

$$m_0\omega_0^2w_0=P_0-\int_LQ_n(\xi)d(\xi), \quad (13)$$

де $Q_n(\xi)=\sum_{i=1}^{3}Q_{in}(\xi)T_i(\xi)$,

$$Q_{in}=\Lambda_1n_1\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(\gamma_{1\varepsilon km}^i+\lambda_{1k}w_{\varepsilon km}^i\right)+$$
$$+\Lambda_2n_2\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\gamma_{2\varepsilon km}^i+\lambda_{2m}w_{\varepsilon km}^i\right),$$

$$\left[\mathbf{\Omega_{km}^{(U)}}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix}w_1(\alpha)&w_2(\alpha)&w_3(\alpha)\\ \gamma_{1n}(\alpha)&\gamma_{2n}(\alpha)&\gamma_{3n}(\alpha)\\ \gamma_{1\tau}(\alpha)&\gamma_{2\tau}(\alpha)&\gamma_{3\tau}(\alpha)\end{bmatrix},$$

$$w_i(\alpha)=w_{\varepsilon km}^i\Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$
$$\gamma_{in}(\alpha)=n_1(\alpha)\gamma_{1\varepsilon km}^i\Phi_{km}^{cs}(\alpha)+n_2(\alpha)\gamma_{2\varepsilon km}^i\Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$
$$\gamma_{i\tau}(\alpha)=\tau_1(\alpha)\gamma_{1\varepsilon km}^i\Phi_{km}^{cs}(\alpha)+\tau_2(\alpha)\gamma_{2\varepsilon km}^i\Phi_{km}^{sc}(\alpha).$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь використовуємо метод колокацій. Для цього контури кривої L замінюємо ламаними ($N-$ кількість відрізків розбиття контуру, α^r- середини відрізків розбиття контуру, $r = 1\ldots N$). На кожному з прямолінійних відрізків контурів для фіктивних зусиль задаємо такий розподіл:

$$T^r(\xi) = T^r\delta(\alpha^r, \xi)$$

та мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій α^q. У результаті система, що відповідає системі інтегральних рівнянь (13), міститиме $3N+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь і матиме такий вигляд:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega}_{\mathbf{km}}^{(\mathbf{U})}(\alpha^q)\right]\left[\mathbf{E}_{\mathbf{km}}(\alpha^r)\right]\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix},$$

$$q = 1....N.$$

$$m_0\omega_0^2 w_0 = P_0 - \sum_{i=1}^{3}\sum_{r=1}^{N} Q_{in}(\xi)T_i^r .$$

Власні частоти знаходимо з умови рівності нулю визначників відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\vec{n}(\alpha) = (n_1(\alpha), n_2(\alpha))$ та дотичною $\vec{\tau}(\alpha) = (\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha))$ знаходимо на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на контурі включення.

Висновки. В рамках знайденого розв'язку можна розглядати випадки, коли контур включень містить кутові точки, оскільки на етапі числового розв'язування методом колокацій проводиться дискретизація його контуру.

Література

1. *Сухорольський М.А., Шопа Т.В.* Згинні коливання прямокутної ортотропної пластини з масивним включенням / Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 6. – С. 41–46.

2. *Sukhorolsky M., Shopa T.* The vibration of rectangular orthotropic plate with massive inclusion / Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. – 2008. – **15.** – P. 369–376.

Отримана 23.10.11

T. Shopa

To the construction of the solution of the problem on the vibration of the orthotropic plate with the inclusion of the arbitrary configuration

Institute for Applied Mechanics of Institite of National Akademy of Sciences of Ukraine, Ivano-Frankivsk

In the framework of the plate theory that takes into consideration the shear displacements and the rotation angles around the normal to the middle surface of the plate the problem on the vibration of simply supported orthotropic plate with inclusion of the arbitrary form, location rigidly clamped to the plate is considered in the paper. Solution is built on the base of the sequential approach to the construction of the Green function. The boundary value problems are reduced to systems of integral equations that are solved using the collocation method.

Інформація

IV МІЖНАРОДНА НАУКОВО-ТЕХНІЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ ТА МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ»

Україна, м. Запоріжжя, 8 – 10 червня 2012 р.

Тематика конференції:

– Математичне моделювання та дослідження технічних систем.
– Контактні задачі деформівних тіл.
– Механіка руйнування та задачі термопружності.
– Статичні та динамічні задачі теорії пластин і оболонок.
– Механіка композиційних матеріалів.
– Комп'ютерна механіка та оптимізація конструкцій.
– Експериментальне дослідження динаміки та міцності конструкцій.
– Підвищення надійності та довговічності технічних систем.
– Прикладні задачі проектування складних інженерних конструкцій в суднобудуванні, приладо- і машинобудуванні.
– Перспективи застосування прогресивних та нетрадиційних технологій при виробництві складних технічних систем.
– Сучасні проблеми інженерної освіти.

Адреса оргкомітету

Запорізький національний університет,
Україна, 69000, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 66,
Тел.: 061-228-76-28, 067-9833040.
E-mail: kpmm.mf@znu.edu.ua