

**І. Шацький**

Ст. наук. співр., канд. фіз.-мат. наук

**Т. Даляк**

Канд. фіз.-мат. наук

Івано-Франківський відділ Інституту  
прикладних проблем механіки і  
математики ім. Я. С. Підстригача  
НАН України,  
м. Івано-Франківськ

УДК 539.375

## ЗГИН ПЛАСТИНИ ІЗ ЗІРЧАСТОЮ ТРІЩИНОЮ, БЕРЕГИ ЯКОЇ КОНТАКТУЮТЬ

*Явище закриття тріщин при згині пластин розглядається у двовимірній постановці на базі класичних теорій. Розв'язана циклічно-симетрична задача згину безмежної пластинки із зірчастим розрізом. Досліджено вплив контакту поверхонь тріщин на напружений стан та граничну рівновагу пластинки.*

пластина, зіркоподібна тріщина, згин, закриття

**Вступ.** Прогнозування ресурсу дефектних тонкостінних конструкцій належить до актуальних задач механіки та матеріалознавства. Якщо тріщиноподібні дефекти потрапляють у зону напружень стиску, можливим стає їхнє закриття, яке слід відобразити у розрахунковій схемі. Для дослідження цього явища в задачах згину пластин та оболонок доволі ефективною є модель контакту берегів вздовж лінії в лицьовій поверхні [1, 2]. В рамках такого підходу на сьогодні розв'язана велика кількість періодичних задач про взаємодію тріщин за згину пластин з урахуванням контакту берегів [3 – 9]. Зокрема, в працях [6, 8] розглянуто питання граничної рівноваги пластин з циклічно симетричною системою радіальних дефектів.

Мета цієї статті – дослідити закономірності контактної взаємодії берегів зіркоподібної тріщини під час згину пластини. Методом сингулярних інтегральних рівнянь досліджуються випадки дії рівномірного всебічного згину та зосередженої поперечної сили.

**Постановка та інтегральне рівняння задачі.** Розглянемо безмежну ізотропну пластину  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$ , послаблену циклічно симетричною системою  $N$  радіальних розрізів завдовжки  $l$ , внутрішні вершини яких сполучаються в одній точці (рис. 1). Сукупність дефектів назвемо зірчастим розрізом (тріщиною), яка складається

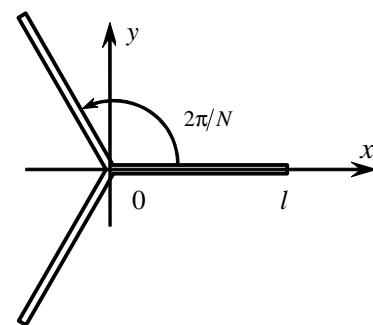


Рис. 1. Схема зірчастої тріщини

з  $N$  віток. Зовнішнє згинальне навантаження задається відомою функцією основного напруженого стану бездефектної пластини. Досліджуємо вплив контакту берегів розрізів на граничний стан пластини.

Пружна рівновага пластини з циклічно періодичною системою тріщин описується рівняннями узагальненого плоского напруженого стану та технічної теорії згину:

$$\Delta\Delta\phi = 0, \quad \Delta\Delta w = q(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L. \quad (1)$$

де  $\Phi$  – функція Ері,  $w$  – прогин пластини,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $q$  – поперечне навантаження,  $L = \bigcup_{k=0}^{N-1} L_k$  – сукупність віток тріщини.

Сформулюємо взаємозв'язані крайові умови симетричної задачі на розрізі з урахуванням взаємодії його країв [1, 2]. За циклічної симетрії такі умови достатньо записати тільки на одній ділянці дефекту, наприклад, на відрізьку  $L_0 = (0, l)$ , що належить осі абсцис:

$$[u_y] - hs[\vartheta_y] = 0, \quad M_y - shN_y = 0, \quad (x, y) \in L_0. \quad (2)$$

Тут  $[u_y], [\vartheta_y]$  – розриви переміщень у серединній площині пластини і кута повороту нормалі,  $N_y$  – мембранне зусилля,  $M_y$  – згинальний момент.

Для розв'язання крайової задачі (1), (2) із заданою поведінкою розв'язків на безмежності використано метод сингулярних інтегральних рівнянь [10, 11]. Інтегральні подання мембранних зусиль і згинальних моментів на лінії тріщини мають вигляд:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{L_0} K_{11}(\xi, x) [u_y]'(\xi) d\xi,$$

$$M_y(x, 0) = M_y^0(x, 0) - \frac{Da}{4\pi} \int_{L_0} K_{33}(\xi, x) [\vartheta_y]'(\xi) d\xi, \quad (3)$$

$$K_{11}(\xi, x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{z_x}{r^2} \left( 1 + \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \cos \frac{2\pi k}{N} - \frac{z_y}{r^2} \left( 1 - \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \sin \frac{2\pi k}{N} \right\},$$

$$K_{33}(\xi, x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{z_x}{r^2} \left( 1 - \kappa_0 \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \cos \frac{2\pi k}{N} + \kappa_0 \frac{z_y}{r^2} \left( 1 - \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \sin \frac{2\pi k}{N} \right\};$$

$$z_x = \xi \cos \frac{2\pi k}{N} - x, \quad z_y = \xi \sin \frac{2\pi k}{N}, \quad r^2 = z_x^2 + z_y^2.$$

Тут  $B = 2Eh$ ,  $D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2))$ ,  $a = (3+\nu)(1-\nu)$ ,  $\kappa_0 = (1-\nu)/(3+\nu)$ ,  $E$  і  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,  $M_y^0(x, 0)$  – відома функція основного напруженого стану.

Підставляючи вирази (3) в крайові умови (2) і виключаючи функцію  $[u_y]$ , приходимо до інтегрального рівняння для визначення стрибка кута повороту нормалі:

$$\frac{Da}{4\pi} \int_{L_0} \{ \kappa K_{11}(\xi, x) + K_{33}(\xi, x) \} [\vartheta_y]'(\xi) d\xi = M_y^0(x, 0), \quad (4)$$

$$x \in L_0, \quad \kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu).$$

Шуканий розв'язок підпорядковуємо додатковим умовам:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} [\vartheta_y]'(x) = 0, \quad [\vartheta_y](l) = 0. \quad (5)$$

Методом квадратур [10, 11] побудовано числовий розв'язок задачі (4), (5). За знайденим стрибком кута повороту визначено функцію  $[u_y]$ , а потім коефіцієнти інтенсивності мембранних зусиль та згинальних моментів в околі вершин тріщин:

$$K_N = -\frac{B}{4} \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{2(l-x)} [u_y]'(x),$$

$$K_M = \frac{Da}{4} \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{2(l-x)} [\vartheta_y]'(x).$$

Руйнівне навантаження знаходили з енергетичного критерію лінійної механіки руйнування при комбінованому розтягу-згині [12]:

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_N^2 + \kappa \left( \frac{K_M}{h} \right)^2 \right\} = 2\gamma_*,$$

де  $\gamma_*$  – густина ефективною поверхневою енергією матеріалу. **Всебічний рівномірний згин.** У цьому випадку

$$M_y^0(x, 0) = m = \text{const.}$$

За різної кількості променів тріщини при  $\nu = 0.3$  підраховували безрозмірні значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів, а також руйнівного навантаження (табл. 1). На рис. 2 наведено розподіл контактних зусиль вздовж розрізу. З урахуванням контакту берегів втрачаються немонотонні залежності коефіцієнтів інтенсивності та граничного навантаження від кількості променів, властиві згинів за відсутності контакту. При збільшенні кількості розрізів контактна реакція виходить на асимптоту, характерну для періодичної системи близько розташованих паралельних тріщин [3].

**Поперечний згин зосередженою силою.** У разі поперечного згину пластини несамозрівноваженим навантаженням її належить додатково закріпити вздовж якогось контура. Оберемо за такий контур коло  $x^2 + y^2 = R^2$ . Домовимося, що  $R \gg l$ , тоді взаємодією тріщини з краєм можна знехтувати, а вплив закріплення враховувати лише у функції основного напруженого стану.

Розглянуто випадок прикладання зосередженої сили у центрі зірчатої тріщини:

$$q(x, y) = P\delta(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

де  $\delta(\dots)$  – функція Дірака. Тоді [13] для затиснутого краю

$$M_y^0(x, 0) = \frac{P}{4\pi} \left( (1+\nu) \ln \frac{R}{x} - \nu \right),$$

а для шарнірно опертого краю

Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів та граничне навантаження за всебічного згину

N	Без врахування контакту			З врахуванням контакту		
	$\frac{hK_N}{m\sqrt{l}}$	$\frac{K_M}{m\sqrt{l}}$	$\frac{ m_* }{m^0}$	$\frac{hK_N}{m\sqrt{l}}$	$\frac{K_M}{m\sqrt{l}}$	$\frac{ m_* }{m^0}$
2	0	1,000	0,920	0,542	0,458	1,359
3	0	1,052	0,874	0,534	0,452	1,378
4	0	1,041	0,883	0,504	0,426	1,461
5	0	1,012	0,909	0,437	0,400	1,556
6	0	0,977	0,942	0,446	0,377	1,651
7	0	0,942	0,977	0,422	0,357	1,743
8	0	0,908	1,013	0,402	0,340	1,833
9	0	0,877	1,049	0,384	0,325	1,919
10	0	0,848	1,085	0,368	0,311	2,002

Таблиця 2

Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів та граничне навантаження під зосередженою силою (затиснутий край)

N	Без врахування контакту			З врахуванням контакту		
	$\frac{hK_N}{ P \sqrt{l}}$	$\frac{K_M}{P\sqrt{l}}$	$\frac{ P_* }{m^0}$	$\frac{hK_N}{ P \sqrt{l}}$	$\frac{K_M}{P\sqrt{l}}$	$\frac{ P_* }{m^0}$
2	0	0,214	4,292	0,116	0,098	6,340
3	0	0,229	4,024	0,114	0,097	6,451
4	0	0,225	4,083	0,106	0,090	6,926
5	0	0,217	4,236	0,099	0,084	7,454
6	0	0,208	4,422	0,092	0,078	7,977
7	0	0,199	4,621	0,087	0,073	8,483
8	0	0,191	4,823	0,082	0,069	8,968
9	0	0,183	5,024	0,078	0,066	9,433
10	0	0,176	5,222	0,075	0,063	9,879

Таблиця 3

Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів та граничне навантаження під зосередженою силою (шарнірно опертий край)

N	Без врахування контакту			З врахуванням контакту		
	$\frac{hK_N}{ P \sqrt{l}}$	$\frac{K_M}{P\sqrt{l}}$	$\frac{ P_* }{m^0}$	$\frac{hK_N}{ P \sqrt{l}}$	$\frac{K_M}{P\sqrt{l}}$	$\frac{ P_* }{m^0}$
2	0	0,294	3,193	0,159	0,135	4,623
3	0	0,312	2,946	0,157	0,133	4,451
4	0	0,308	2,985	0,146	0,124	5,029
5	0	0,297	3,090	0,136	0,115	5,396
6	0	0,286	3,219	0,128	0,108	5,761
7	0	0,274	3,357	0,120	0,102	6,115
8	0	0,263	3,498	0,114	0,096	6,455
9	0	0,253	3,638	0,109	0,092	6,780
10	0	0,244	3,776	0,104	0,087	7,093

$$M_y^0(x,0) = \frac{P}{4\pi} \left( (1+\nu) \ln \frac{R}{x} + 1 - \nu \right).$$

Табл. 2 і табл. 3 демонструють зміну безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів і

граничного навантаження для різної кількості віток тріщини при  $\nu = 0.3$  та  $R/l = 5$ . Розподіли контактних зусиль на лінії розрізу подано на рис. 3. Спостерігається посилення взаємодії країв при збільшенні кількості віток дефекта та поява логарифмічної особливості в контактних

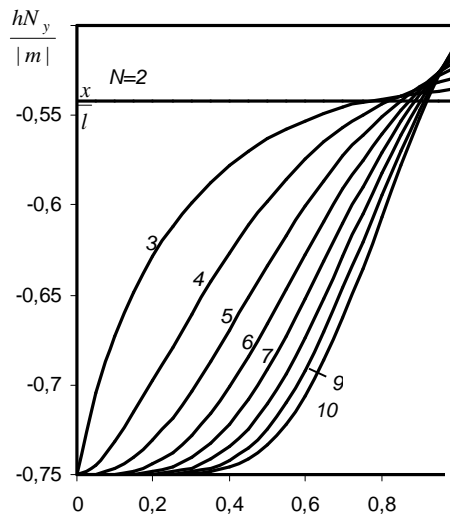


Рис. 2. Розподіл контактної реакції на зімкнутих берегах розрізу у разі всебічного згину

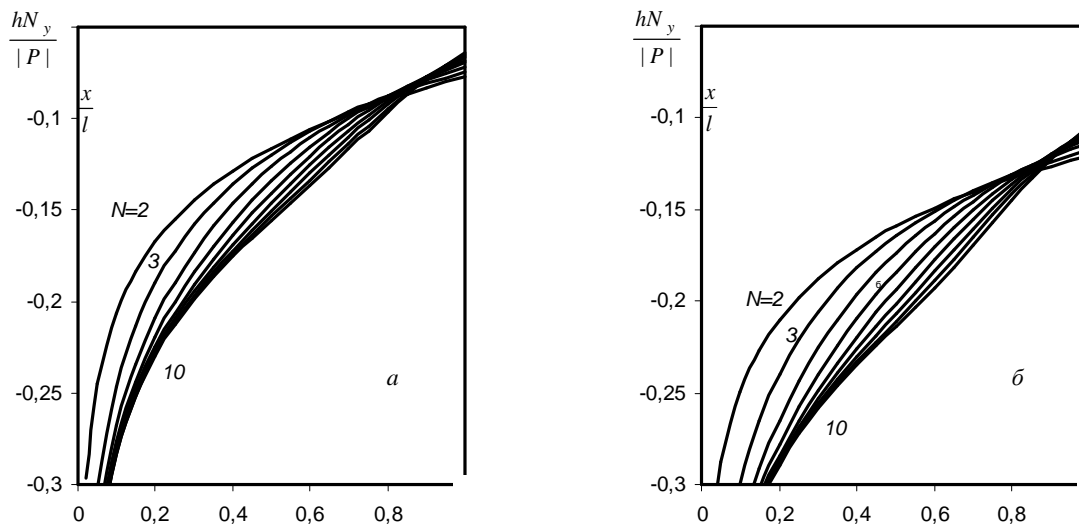


Рис. 3. Розподіл контактної реакції на зімкнутих берегах тріщини при згині зосередженою силою: а – затиснутий, б – шарнірно опертий край

силах в околі початку координат. Крім того, несуча здатність дефектної пластини з шарнірно опертим контуром є очікувано меншою, ніж у разі жорсткого затиснення.

Для всіх розглянутих випадків навантаження при  $N=2$  отримали числові результати, які узгоджуються з точними аналітичними розв'язками для прямолінійної тріщини завдовжки  $2l$  [1, 2].

**Висновки.** Врахування контакту поверхонь тріщин при згині пластини призводить до підвищення значень граничного навантаження і за рахунок появи мембранних напружень підсилює ефект взаємовпливу дефектів порівняно з випадком відсутності контакту.

### Література

1. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.

2. Шацький І. П. Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 91–97.

3. Шацький І. П. Изгиб пластины, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с контактирующими кромками // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 12. – С. 56–61.

4. Shatsky I. P. A cracks closure in combined tension and bending of plates // Fracture from defects. Proc. 12 th Bien. Conf. of Fract. – ICF-12. (Sheffield, 14-18 Sept. 1998). Ed. M. W. Brown e.a. – V. 2. – P. 733–738.

5. Перепічка В. В., Шацький І. П. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої періодичною системою розрізів з урахуванням контакту берегів // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 1999. – 42, № 1. – С. 114–117.

6. Дяляк Т., Перепічка В., Шацький І. Періодичні задачі контакту берегів тріщин при згині пластин // Машинознавство. – 2000. – № 4–5. – С. 20–24.

7. Опанасович В., Звізло І. Згин кусково-однорідної пластини з періодичною системою прямолінійних тріщин,

паралельних до лінії поділу матеріалів, з урахуванням контакту берегів // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 148–154.

8. *Шацький І., Даляк Т.* Циклічно-симетрична задача згину пластинки з системою тріщин, береги яких контактують // *Машинознавство.* – 2003. – № 3. – С. 7–12.

9. *Даляк Т.М.* Згин пластини з періодичною системою паралельних взаємозміщених тріщин, береги яких контактують // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – 40, №1. – С. 115 – 117.

10. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.

11. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.

12. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.

13. *Тимошенко С. П., С. Войновски-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1964. – 636 с.

Отримана 14.01.13

*I. Shatsky, T. Dalyak*

**Bending of plate with star crack which edges contact**

*Ivano-Frankivck Branch of Pidstryhach-Institute  
for Applied Problems of Mechanic and Mathematic,  
Ivano-Frankivck*

*The phenomenon of a cracks closure in the bending plates has been considered in the classical two-dimensional statement. The cyclic-symmetrical problem for an infinite plate with star shaped crack has been solved. The surface contact influence on the stress and limited balance state of plate has been investigated.*

---

## Інформація



# 11-й МІЖНАРОДНИЙ СИМПОЗИУМ УКРАЇНСЬКИХ ІНЖЕНЕРІВ-МЕХАНІКІВ У ЛЬВОВІ (МСУІМЛ — 11)

15 — 17 травня 2013 р., м. Львів, Україна

### Тематика симпозиуму

Прикладні проблеми динаміки та міцності машин і споруд  
Математичні та фізичні проблеми теорії тріщин у механіці  
Моделювання, синтез і оптимізація машинобудівних конструкцій  
Новітні технології у машинобудуванні та автоматизація виробництва  
Технологія зварювання і діагностика металевих конструкцій  
Сучасні матеріали, поверхневе оброблення та захист деталей машин і конструкцій  
Трибологія  
Проектування, виготовлення, експлуатація і сервіс транспортних засобів  
Підіймально-транспортне обладнання та елементи приводів машин  
Вібрації в техніці і технологіях

### Адреса оргкомітету

Національний університет «Львівська політехніка»,  
Інститут інженерної механіки та транспорту,  
79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12.  
Тел.: (032) 258-24-10;  
+38 067 9998734; +38 097 4409900  
E-mail: [me@in.lviv.ua](mailto:me@in.lviv.ua)