

УДК 534.1

Ольшанский В.П., д-р физ.-мат. наук; Ольшанский С.В., канд. физ.-мат. наук

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ДИНАМИЧНОСТИ ПРИ МГНОВЕННОМ НАГРУЖЕНИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Введение. Обычно в прочностных расчётах элементов машиностроительных конструкций на действие мгновенно приложенных постоянных сил в сопротивлении материалов [1-3] полагают коэффициент динамичности равным двум. Но это равенство может нарушаться при мгновенном нагружении упругой системы переменной массы, на что обратили внимание в [4]. В отличие от [4], где принимали линейный закон изменения массы во времени, здесь методом ВБК построено приближённое решение задачи динамики системы с одной степенью свободы при экспоненциальном изменении её массы, без учёта диссипативных сил.

Определение коэффициента динамичности системы при отсутствии реактивной силы. Перемещение осциллятора x , при экспоненциальном изменении его массы

$$m = m_0 \exp(\lambda t) \quad (1)$$

описывается дифференциальным уравнением.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 e^{-\lambda t} x = \frac{Q}{m_0} e^{-\lambda t} H(t). \quad (2)$$

В (1), (2): $\omega^2 = c / m_0$; c – коэффициент жёсткости системы; m_0 – начальное значение массы; λ – постоянная, определяющая изменение массы m во времени t ; Q – величина мгновенно приложенной силы; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Уравнение (2) решаем при нулевых начальных условиях:

$$x(0) = 0; \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Согласно методу вариации произвольных постоянных, задача Коши, представленная выражениями (2), (3), имеет решение:

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), \quad (4)$$

в котором

$$c_1(t) = -\frac{Q}{m_0} \int_0^t \frac{x_2(t) \exp(-\lambda t)}{\Delta(t)} dt; \quad c_2(t) = \frac{Q}{m_0} \int_0^t \frac{x_1(t) \exp(-\lambda t)}{\Delta(t)} dt; \quad (5)$$

$$\Delta(t) = x_1(t) \frac{dx_2}{dt} - x_2(t) \frac{dx_1}{dt},$$

$x_1(t), x_2(t)$ – фундаментальные решения однородного уравнения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 e^{-\lambda t} x = 0. \quad (6)$$

© В.П. Ольшанский, 2013

Точные фундаментальные решения уравнения (6) выражаются через функции Бесселя нулевого индекса [5], что затрудняет аналитическое интегрирование в (5). Поэтому, ориентируясь на получение замкнутой формулы, для вычисления коэффициента динамичности, далее используем приближённые $x_1(t)$, $x_2(t)$, к которым приводит ВБК – метод [6]. Применяв к (6) указанный метод, находим

$$x_1(t) = \eta^{-1/2} \cos \eta; \quad x_2(t) = \eta^{-1/2} \sin \eta. \quad (7)$$

Здесь $\eta = \eta_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t\right)$; $\eta_0 = 2\omega|\lambda|^{-1}$.

Для решений (7) $\Delta(t) = -\lambda / 2 = const$. Учитывая, что

$$dt = -\frac{2}{\lambda\eta} d\eta; \quad \frac{Q}{m_0\lambda^2\eta_0^2} = \frac{Q}{c},$$

после перехода к новой переменной η в (4), (5), вычисление коэффициента динамичности сводим к формуле

$$K_\delta = K_\delta(\eta) = \frac{c \cdot x(t)}{Q} = \eta^{-1/2} [a_1(\eta) \cos \eta + a_2(\eta) \sin \eta], \quad (8)$$

в которой

$$a_1(\eta) = -\int_{\eta_0}^{\eta} \eta^{1/2} \sin \eta d\eta; \quad a_2(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \eta^{1/2} \cos \eta d\eta.$$

Интегрированием по частям эти квадратуры преобразуем в интегралы Френеля. Указанное преобразование даёт:

$$a_1(\eta) = \eta^{1/2} \cos \eta - \eta_0^{1/2} \cos \eta_0 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} [C(\eta_0) - C(\eta)]; \quad (9)$$

$$a_2(\eta) = \eta^{1/2} \sin \eta - \eta_0^{1/2} \sin \eta_0 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} [S(\eta_0) - S(\eta)].$$

Здесь

$$C(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\eta} \frac{\cos \eta}{\sqrt{\eta}} d\eta; \quad S(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\eta} \frac{\sin \eta}{\sqrt{\eta}} d\eta - \quad (10)$$

интегралы Френеля [7].

Учитывая (8) и (9), коэффициент динамичности представим выражением:

$$K_\delta = 1 - \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta}} \cos(\eta_0 - \eta) + \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \{ [C(\eta_0) - C(\eta)] \cos \eta + [S(\eta_0) - S(\eta)] \sin \eta \}, \quad (11)$$

которое можно упростить при $\eta_0 \gg 1$ и $\eta \gg 1$. Поскольку для больших значений η_0 и η [7]:

$$C(\eta_0) - C(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \eta_0}{\sqrt{\eta_0}} - \frac{\sin \eta}{\sqrt{\eta}} \right); \quad (12)$$

$$S(\eta_0) - S(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\cos \eta}{\sqrt{\eta}} - \frac{\cos \eta_0}{\sqrt{\eta_0}} \right),$$

то

$$K_\delta = 1 - \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta}} \cos(\eta_0 - \eta) + \frac{1}{2\sqrt{\eta\eta_0}} \sin(\eta_0 - \eta). \quad (13)$$

В пределе, когда $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\eta_0}{\eta} = 1$; $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\eta_0 - \eta) = \omega \cdot t$; $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\eta\eta_0}} = 0$,

из (13) вытекает классическое выражение коэффициента динамичности для упругой системы постоянной массы

$$K_\delta = 1 - \cos(\omega t). \quad (14)$$

И так, непериодическое изменение K_δ в (13), после предельного перехода, становится периодическим в (14), где $\max K_\delta = 2$.

Исследуя (13) на экстремум, приходим к следующей формуле:

$$\max K_\delta = 1 + \frac{1}{\sqrt{\eta_*}} \sqrt{\eta_0 + \frac{1}{4\eta_0}}. \quad (15)$$

В (15):

$$\eta_* = \begin{cases} \eta_0 + \varphi - (2n-1)\pi & \text{при } \lambda > 0 \\ \eta_0 + \varphi + (2n-1)\pi & \text{при } \lambda < 0 \end{cases}; \quad (16)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2\eta_0}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Значение $\max K_\delta$ оказывается зависящим от номера n .

Поскольку в осцилляторе возрастающей массы $\eta_* < \eta_0$, то, согласно (15), (16), первый $\max K_\delta > 2$, а последующие больше первого. В осцилляторе убывающей массы $\eta_* > \eta_0$ и первый $\max K_\delta < 2$, а последующие становятся ещё меньше. Таким образом, без учёта реактивной силы, максимум коэффициента динамичности больше двух при возрастании массы системы и меньше двух – при убывании массы.

Определение коэффициента динамичности при действии реактивной силы.
В этом случае, вместо (2), надо решать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 e^{-\lambda t} = \frac{Q}{m_0} e^{-\lambda t} H(t). \quad (17)$$

Без правой части в (17) его фундаментальные решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выражается через функции Бесселя индекса единица [8]. Далее, используем их ВБК приближения:

$$x_1(t) = \eta^{1/2} \mathbf{cos} \eta; \quad x_2(t) = \eta^{1/2} \mathbf{sin} \eta. \quad (18)$$

Для них $\Delta(t) = -\frac{1}{2} \lambda \eta^2$. Подставив (18) в (4), (5), получаем формулу

$$K_\delta(\eta) = \eta^{1/2} [b_1(\eta) \mathbf{cos} \eta + b_2(\eta) \mathbf{sin} \eta], \quad (19)$$

в которой

$$b_1(\eta) = -\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\mathbf{sin} \eta}{\sqrt{\eta}} d\eta; \quad b_2(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\mathbf{cos} \eta}{\sqrt{\eta}} d\eta.$$

Выражая эти квадратуры через интегралы Френеля (10), равенство (19) сводим к формуле:

$$K_\delta = \sqrt{2\pi\eta} \{ [S(\eta_0) - S(\eta)] \mathbf{cos} \eta + [C(\eta) - C(\eta_0)] \mathbf{sin} \eta \}. \quad (20)$$

Используя асимптотику (12), вместо (20), при $\eta_0 \gg 1$ и $\eta \gg 1$, получаем компактную формулу

$$K_\delta = 1 - \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \mathbf{cos}(\eta_0 - \eta). \quad (21)$$

Это выражение переходит в (14) при $\lambda \rightarrow 0$.

Из (21) следует, что

$$\mathbf{max} K_\delta = 1 + \sqrt{\frac{\eta^*}{\eta_0}}. \quad (22)$$

Здесь

$$\eta^* = \begin{cases} \eta_0 - (2n-1)\pi & \lambda > 0 \\ \eta_0 + (2n-1)\pi & \lambda < 0 \end{cases};$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Поскольку в осцилляторе возрастающей массы $\eta^* < \eta_0$, то согласно (22), первый $\mathbf{max} K_\delta < 2$, а последующие максимумы меньше первого. В осцилляторе убывающей массы $\eta^* > \eta_0$, а поэтому первый $\mathbf{max} K_\delta > 2$. Последующие максимумы больше первого.

Таким образом, при действии реактивной силы получили закономерность противоположную той, что нашли выше в условиях отсутствия реактивной силы.

Численные результаты и их анализ. Определим коэффициент динамичности при отсутствии реактивной силы. Для проведения расчётов принимаем $m_0 = 10$ кг; $c = 160$ Н/м; $\lambda = \pm 0,2$ с⁻¹.

В таблице 1 представлены значения K_{δ} , полученные с помощью численного интегрирования уравнения (2) (первая строка), приближённой формулы (11) (вторая строка), а также приближённой формулы (13) (третья строка), при убывании массы.

Таблица 1

Значения K_{δ} в разные моменты времени, полученные двумя способами

t, c	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
K_{δ}	<u>1,4397</u>	<u>1,4708</u>	<u>1,7566</u>	<u>0,8675</u>	<u>0,4366</u>	<u>0,4600</u>	<u>0,9164</u>	<u>1,6730</u>	<u>0,7915</u>
	<u>1,4398</u>	<u>1,4713</u>	<u>1,7566</u>	<u>0,8669</u>	<u>0,4360</u>	<u>0,4594</u>	<u>0,9154</u>	<u>1,6728</u>	<u>0,7927</u>
	<u>1,4396</u>	<u>1,4711</u>	<u>1,7563</u>	<u>0,8668</u>	<u>0,4360</u>	<u>0,4594</u>	<u>0,9154</u>	<u>1,6726</u>	<u>0,7927</u>

Результаты из таблицы 1 свидетельствуют о высокой точности асимптотических формул, из которых проще использовать в инженерных расчётах формулу (13).

На рис. 1 представлена зависимость коэффициента динамичности K_{δ} от времени t при убывании массы, рассчитанная по (13).

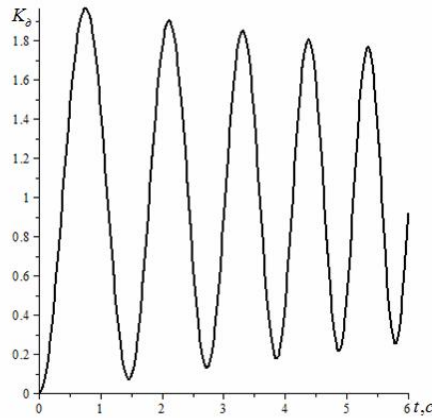


Рис. 1. Зависимость коэффициента динамичности K_{δ} от времени t при убывании массы.

Как видно из рис. 1 первый $\max K_{\delta} < 2$, а остальные меньше первого.

На рис. 2 представлена зависимость коэффициента динамичности K_{δ} от времени t при возрастании массы, полученная по формуле (13).

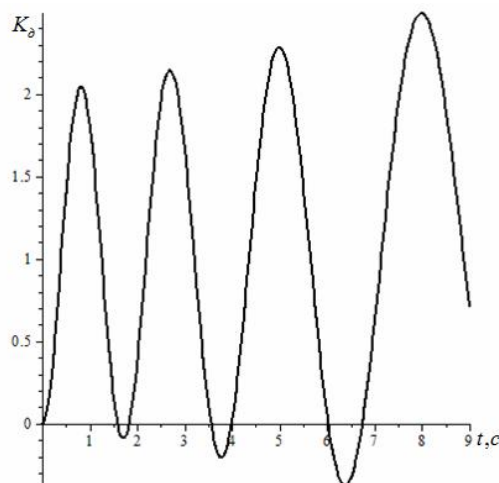


Рис. 2. Зависимость коэффициента динамичности K_{δ} от времени t при возрастании массы.

График на рис. 2 подтверждает ранее сделанный вывод о том, что для осциллятора с возрастающей массой первый максимум $K_{\delta} > 2$, а последующие, больше первого.

Исследуем влияние реактивной силы на поведение коэффициента динамичности K_{δ} . Для этого примем прежние исходные данные. В таблице 2 представлены значения K_{δ} , полученные с помощью численного интегрирования уравнения (17) (первая строка), приближённой формулы (20) (числителя) и приближённой формулы (21) (знаменателя) при возрастании массы.

Таблица 2

Значения K_{δ} в разные моменты времени, полученные двумя способами

t, c	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
K_{δ}	<u>1,3500</u>	<u>1,7562</u>	<u>0,4758</u>	<u>1,5169</u>	<u>0,3258</u>	<u>1,7790</u>	<u>0,4956</u>	<u>0,7878</u>	<u>1,6707</u>
	<u>1,3498</u>	<u>1,7550</u>	<u>0,4769</u>	<u>1,5135</u>	<u>0,3274</u>	<u>1,7771</u>	<u>0,4903</u>	<u>0,7925</u>	<u>1,6676</u>
	<u>1,3618</u>	<u>1,7486</u>	<u>0,4867</u>	<u>1,5059</u>	<u>0,3340</u>	<u>1,7784</u>	<u>0,4849</u>	<u>0,8027</u>	<u>1,6699</u>

Результаты из таблицы 2 свидетельствуют о высокой точности асимптотических формул, из которых проще использовать в инженерных расчётах формулу (21).

На рис. 3 представлена зависимость коэффициента динамичности K_{δ} от времени t при убывании массы, к которой приводит формула (20).

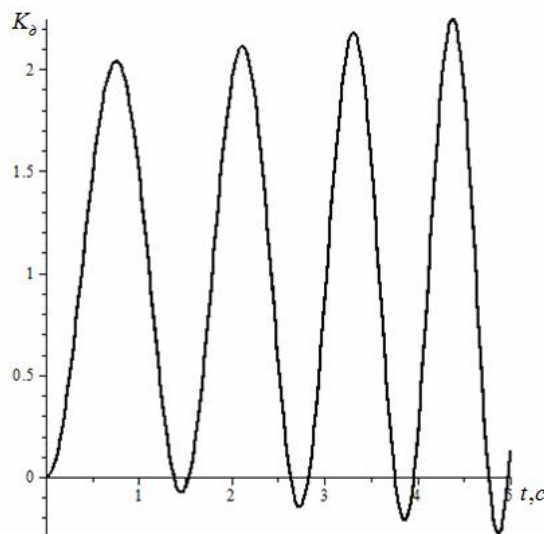


Рис. 3. Зависимость коэффициента динамичности K_{δ} от времени t при убывании массы с учётом реактивной силы.

Рис. 3 подтверждает вывод о том, что первый максимум $K_{\delta} > 2$, а последующие больше первого.

На рис. 4 представлена зависимость коэффициента динамичности K_{δ} от времени t при возрастании массы, рассчитанная по (20).

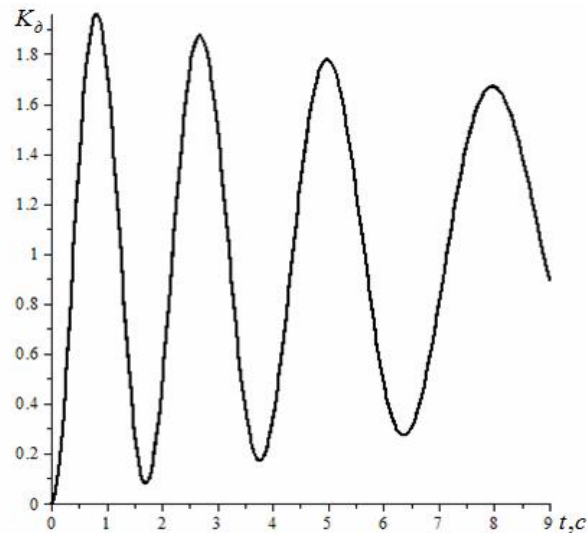


Рис. 4. Зависимость коэффициента динамичности K_d от времени t при возрастании массы с учётом реактивной силы.

Рис. 4 свидетельствует о том, что для осциллятора возрастающей массы первый максимум $K_d < 2$, а последующие максимумы меньше первого.

Выводы. При мгновенном нагружении постоянной силой механической системы переменной массы максимум коэффициента динамичности не равен двум. Его значение меняется в ходе колебаний. При наличии реактивной силы она существенно влияет на динамическое поведение системы.

Литература: 1 Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с. 2. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с. 3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1974. – 552 с. 4. Ольшанский В.П. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ “ХПІ”: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. - № 37(1010). – С. 125-130. 5. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с. 6. Образцов И.Ф. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций / И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Андрианов. – М.: Машиностроение, 1992. – 416 с. 7. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш – М.: Наука, 1977. – 344с. 8. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. – Вип.2(70). – 2013. – С. 57-59.

Bibliography (transliterated): 1 Pisarenko G.S. Opir materialiv / G.S. Pisarenko, O.L Kvitka, E.S. Umans'kij. – K.: Vishha shkola, 2004. – 655 s. 2. Pisarenko G.S. Spravochnik po soprotivleniju materialov / G.S. Pisarenko, A.P. Yakovlev, V.V. Matveev. – K.: Naukova dumka, 1988. – 736 s. 3. Feodos'ev V.I. Soprotivlenie materialov / V.I. Feodos'ev. – M.:

Nauka, 1974. – 552 s. 4. Ol'shanskij V.P. Modelirovanie kolebanij osciljatora linejno-peremennoj massy pri impul'snom nagruzhennii / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij // Visnik NTU "HPI": Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah, 2013, № 37(1010). – S. 125-130. 5. Abramovic A. Spravochnik po special'nyh funkcijam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami) / A. Abramovic, I. Stigan. – M.: Nauka, 1979. – 832 s. 6. Obrazcov I.F. Asimptoticheskie metody v mehanike tonkostennyh konstrukcij / I.F. Obrazcov, B.V. Nerubajlo, I.V. Andrianov. – M.: Mashinostroenie, 1992. – 416 s. 7. Janke E. Special'nye funkcii / E. Janke, F. Jemde, F. Ljosh – M.: Nauka, 1977. – 344s. 8. Ol'shans'kij V.P. Vil'ni kolivannja osciljatora zminnoj masi / V.P. Ol'shans'kij, S.V. Ol'shans'kij // Vibracii v tehnici ta tehnologijah: Vseukr. nauk.-tehn. zhurnal. – Vinnicja. – Vip.2(70). – 2013. – S. 57-59.

Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.

ПРО КОЕФІЦІЄНТ ДИНАМІЧНОСТІ ЗА МИТТЄВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ ЗМІННОЇ МАСИ

Методом ВБК наближено визначено переміщення миттєво навантаженої системи із одним ступенем свободи за експонентної зміни маси. Показано, що за відсутності реактивної та дисипативної сил перший максимум коефіцієнта динамічності більший двох за збільшення маси системи та його значення збільшуються під час коливань, а за зменшення маси – менший двох та його значення убують по ходу коливань. В умовах дії реактивної сили динамічна поведінка системи підпорядковується іншим закономірностям і вказані нерівності змінюються на протилежні.

Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ДИНАМИЧНОСТИ ПРИ МГНОВЕННОМ НАГРУЖЕНИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Методом ВБК приближённо определены перемещения мгновенно нагруженной системы с одной степенью свободы при экспоненциальном изменении её массы. Показано, что при отсутствии реактивной и диссипативных сил первый максимум коэффициента динамичности больше двух при увеличении массы системы и его значения возрастают в ходе колебаний, а при уменьшении массы – меньше двух и его значения убывают по ходу колебаний. В условиях действия реактивной силы динамическое поведение системы подчиняется другим закономерностям и указанные неравенства меняются на противоположные.

Olshanskii V.P., Olshanskii S.V.

ABOUT A DYNAMIC FACTOR DURING INSTANTANEOUS LOADING OF AN ELASTIC SYSTEM OF VARIABLE MASS

WBK is approximately determined by the method move instantly loaded system with one degree of freedom for the exponential change in its mass. It is shown that in the absence of reactive and dissipative forces of the first maximum dynamic coefficient more than two of the mass increases and increasing its value during the vibration, while decreasing the mass - less than two values and decrease in the course of oscillation. Under the action of reactive power dynamic behavior of the system is subject to other laws and these inequalities are reversed.