

РАВНОВЕСИЕ МАШИНЫ-АМФИБИИ НА МЕЛКОВОДЬЕ.  
(Реализация принципа инвариантности)

**История вопроса.** В 80-е годы прошлого столетия в СССР интенсивно велись работы по созданию паромно-мостовых машин (ПММ) большой единичной грузоподъёмности (рис. 1,2) [1]. Для оценки безопасности движения на мелководье потребовалась математическая модель (ММ) статического равновесия амфибийного транспортного средства (ТС) на мелководье, основным аспектам разработки, которой посвящена данная статья.



Рис. 1. Гусеничная паромно-мостовая машина ПММ-2М в транспортном положении. Выход на берег.

**1. Анализ ранее выполненных работ. Постановка задачи исследования.** Известны аналоги ММ равновесия плавающего тела с дополнительными упругими опорами: равновесия корабля на камне [2], равновесия транспортной машины на суше [3,4]. Они не содержат предпосылок для построения обобщенного описания равновесия механической системы при действии гидростатических сил и реакции подвески. Известна ММ колебаний твердого тела с пространственной системой упругих связей, в которой проекции упругих связей представлены скользящими векторами [5,6,7]. Известна ММ равновесия ПМ на мелководье, в которой равнодействующая упругих связей впервые представлена физическим вектором, приложенным в центре жесткости (ЦЖ) [8]. В отличие от предшествующих работ [2,3,5,6,7,9] угловые перемещения описываются в абсолютной системе координат. При построении ММ выполнен переход к центральной системе координат жесткостей упругих связей. Как и переход к системе центра масс (ЦМ) твердого тела в задачах динамики [9], он преследует цель поиска удачной системы координат и является проявлением свободной воли исследователя [10]. Данная задача может возникнуть при неполном знании свойств системы.



Рис. 2. Колёсная паромно-мостовая машина «Волна». Подход к берегу под погрузку.

**Постановка задачи исследования.** Галилеев принцип относительности выполним, если механическая система в произвольный момент времени замкнута (равновесна) [9]. Следовательно, выражаясь современной терминологией, описание равновесной системы должно включать описание сил полярными векторами и описание моментов аксиальными векторами [9]. Первые, из которых включают внешние силы, реакции связей, пропорциональные линейным перемещениям, вторые – моменты (пары сил), образованных действующими внешними силами и реакциями

© Е.П. Задеев, 2013

связей, а также реактивный момент упругих связей, пропорциональный наклонению. Реактивный момент обеспечивает совмещение линий действия равнодействующих внешних сил и реакций связей.

*Задачей исследования* является описание ММ равновесия системы из твердого тела и вертикальных связей физическими и аксиальными векторами.

*Предметом исследования* является процесс перехода в новое положение равновесия под действием вертикальной силы механической системы, включающей твёрдое тело и вертикальные упругие опоры.

*Объектом исследования* являются физическая модель ПМ в процессе изменения положения равновесия при снятии (приёме) груза на мелководье.

## 2. Разработка ММ перехода ПМ в новое положение равновесия.

**2.1 Установление однородности описания реакции на перемещение упругой связи и гидростатической силы.** *Физическая модель ПМ на мелководье* представляет полупогруженное в воду твёрдое тело, поддерживаемое в равновесии гидростатическими силами воды и реакциями вертикальных упругих опор, имитирующих систему подпрессоривания (подвеску). Изменение реакции единичной упругой опоры и гидростатической силы, действующей на вертикальный элементарный цилиндр, в зависимости от вертикального перемещения представляют приращение реакции потенциального поля [9,11]:

$$R_i = -c_i \cdot f_i; \quad \delta D = -\gamma \cdot \delta F \cdot f, \quad (1)$$

где  $R_i, c_i, f_i$  – реакция, жёсткость, перемещение точки закрепления  $i$ -той упругой опоры;  $\delta D, \gamma, \delta F, f$  – гидростатическая сила, удельный вес воды, площадь основания элементарного вертикального цилиндра,  $f$  – высота элементарного цилиндра.

Жёсткость упругой опоры  $c = \frac{\Delta P}{\Delta f} \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$ . Произведение  $\gamma \cdot \delta F \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$  имеет размерность жесткости и может представлять жёсткость элементарной гидростатической опоры площадью  $\delta F$ . Жесткости упругой опоры и гидростатической опоры представляют градиенты [12] параллельного потенциального поля. Представленные описания позволяют использовать их совместно в математических выражениях.

**2.2. Выбор систем координат.** В исследовании применяется правая система координат (рис. 3) [5,6] с осью  $OZ$ , направленной вверх, и реакцией упругой связи, направленной противоположно градиенту параллельного потенциального поля, позволяет исследовать задачу в привычной формулировке, в отличие от работ [2] использующих не совсем привычное для технических приложений направление оси  $OZ$ .

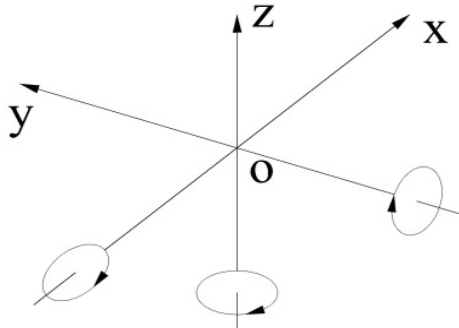


Рис. 3. Правая система координат.

Используется инерциальная система отсчета  $O_2X_2Y_2Z_2$  и вспомогательная система отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$ , связанная с ПМ, в которой заданы неизменяемые геометрические характеристики системы. В начальный момент системы отсчета совпадают. Ось  $OZ$  направлена вверх, ось  $OX$  – вперёд, ось  $OY$  – влево.

Положительные направления угловых перемещений, активных и реактивных моментов их сопровождающих определяются правилом буравчика (завинчивание буравчика в положительном направлении оси координат выполняется вращением по часовой стрелке). В дальнейшем, при необходимости, можем использовать другие, удобные для нас пары связанных систем отсчета.

### **2.3. Уравнения равновесия ПМ на мелководе до и после снятия груза Р.**

Пусть в начальный момент времени ПМ находится в равновесии без крена и дифферента при известных весовых характеристиках ПМ, осадке корпуса и реакциях упругих опор. Уравнения равновесия ПМ в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  до снятия груза (с учётом направления действия известных сил веса  $G_0$  и реакции основания  $D_0$ ) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_2 &= D_0 - G_0 = 0; \\ M_{x_2} &= D_0 \cdot y_{2d} - G_0 \cdot y_{2g} = 0; \\ M_{y_2} &= -D_0 \cdot x_{2d} + G_0 \cdot x_{2g} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $D_0(x_{2d} = x_{1d}, y_{2d} = y_{1d}, z_{2d} = z_{1d})$  – равнодействующая реакций всех типов упругих связей и её координаты в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  и  $O_1X_1Y_1Z_1$ ;  $G_0(x_{2g} = x_{1g}, y_{2g} = y_{1g}, z_{2d} = z_{1d})$  – вес ПМ, координаты ЦМ в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  и  $O_1X_1Y_1Z_1$ .

Упростим анализ, рассматривая плоскую форму перемещения ПМ в новое положение равновесия. Линейные перемещения рассматриваются в координатной плоскости  $Y_2O_2Z_2$ , а угловые – относительно оси  $O_2X_2$ , перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 4).

После снятия груза  $P$  изменение положения ПМ в пространстве представим линейным перемещением  $\Delta z$  точки  $O_1$  начала вспомогательной системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ , и угловым перемещением (наклонением)  $\varphi$  относительно оси  $O_2X_2$ . Неизвестными являются точка, однозначно определяющая линейное перемещение твердого тела, и направление горизонтальной оси поворота (наклонения [2]) ПМ. Косвенно существование такой точки обосновывается постоянством суммы линейных перемещений различных точек твердого тела [11].

Уравнения равновесия ПМ после снятия груза в абсолютной системе  $O_2X_2Y_2Z_2$  удобно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z_2 &= D_0 + \Delta D - G_0 + P = 0; \\ M_{x_2} &= D_0 \cdot y_{2d} + \Delta M_{x_2} - G_0 \cdot y_{2g} + P \cdot y_{2p} = 0; \\ M_{y_2} &= -D_0 \cdot x_{1d} - \Delta M_{y_2} + G_0 \cdot x_{1g} - P \cdot x_{1p} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

где  $D_0(x_{2d} = x_{1d}, y_{2d} = y_{1d} \cdot \cos\varphi - z_{1d} \cdot \sin\varphi)$  – равнодействующая реакций связей до снятия груза  $P$  и её координаты;  $G_0(x_{2g} = x_{1g}, y_{2g} = y_{1g} \cdot \cos\varphi - z_{1g} \cdot \sin\varphi)$  – вес ПМ до снятия груза и его координаты;  $P(x_{2p} = x_{1p}, y_{2p} = y_{1p} \cdot \cos(\varphi) - z_{1p} \cdot \sin(\varphi))$  – снятый груз  $P$  и его координаты в системах  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $\Delta D, \Delta M_{x_2}, \Delta M_{y_2}$  – приращение реакции связей и моментов реакции связей в абсолютной системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $\varphi$  – угол наклона относительно оси  $O_2X_2$ .

Исключим из (3) равновесные уравнения (2), заменим  $D_0$  на  $-G_0$  в уравнениях моментов. Уравнения равновесия ПМ после снятия груза  $P$  будут иметь следующий вид:



кость) гидростатических сил;  $F_{WL} = \int_F dF$  - площадь начальной ватерлинии WL;  $S_{x_1 o_1 y_1}^Y = -\gamma \cdot \int_F z_0 \cdot dF = -\gamma \cdot z_{1f}^Y \cdot F_{WL}$  - статический момент «жесткости» (момент жесткостей первого порядка) гидростатических сил относительно координатной плоскости  $X_1 O_1 Y_1$ ;  $S_{x_1 o_1 z_1}^Y = -\gamma \cdot \int_F y_1 \cdot dF = -\gamma \cdot y_{1f}^Y \cdot F_{WL}$  - статический момент «жесткости» (момент жесткостей первого порядка) гидростатических сил относительно вертикальной координатной плоскости  $X_1 O_1 Z_1$ ;  $y_{1f}^Y, z_{1f}^Y = z_0$  - ордината и аппликата центра жёсткости гидростатических сил (центра тяжести площади начальной ватерлинии [2]).

*Приращение реакции дискретных упругих опор* в абсолютной системе координат  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$  определяется величиной вертикального перемещения точек закрепления упругих опор:

$$\Delta D^r = \sum_{i=1}^n -c_i \cdot f_i = -S_{x_1 o_1 y_1}^r (1 - \cos \varphi) + \Delta z \cdot F_z^r \cdot \cos \varphi + S_{x_1 o_1 z_1}^r \cdot \sin \varphi, \quad (6)$$

где  $\Delta D^r$  - приращение реакций упругих опор;  $c_i$  - жесткость  $i$ -той упругой опоры;  $f_i = z_{2i} - z_{1i}$  - вертикальное перемещение  $i$ -той упругой опоры;  $z_{1i}$  - начальная высота точки присоединения опоры к твердому телу;  $z_{2i} = (z_{1i} + \Delta z) \cdot \cos \varphi + y_{1i} \cdot \sin \varphi$  - высота точки присоединения  $i$ -той опоры после приложения силы P;  $y_{1i}, z_{1i}$  - ордината и аппликата  $i$ -той точки присоединения упругой опоры к твердому телу;  $\Delta z$  - линейное перемещение начала координат  $O_1$ ;  $F_z^r = -\sum_{i=1}^n c_i$  - вертикальная жесткость упругих связей (момент жесткостей нулевого порядка);  $S_{x_1 o_1 y_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot z_{1i} = z_{1f}^r \cdot F_z^r$  - статический момент жесткости упругих связей (момент жесткостей первого порядка) относительно координатной плоскости  $X_1 O_1 Y_1$ ;  $S_{x_1 o_1 z_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot y_{1i} = y_{1f}^r \cdot F_z^r$  - статический момент жесткостей упругих связей (момент жесткостей первого порядка) относительно координатной плоскости  $X_1 O_1 Z_1$ ;  $y_{1f}^r, z_{1f}^r$  - ордината и аппликата центра жесткости упругих связей.

Совместная реакция гидростатических сил и дискретных упругих опор описывается выражением:

$$\Delta D = -S_{x_1 o_1 y_1} \cdot (1 - \cos \varphi) + \Delta z \cdot F_z \cdot \cos \varphi + S_{x_1 o_1 z_1} \cdot \sin \varphi, \quad (7)$$

где  $\Delta D, F_z, S_{x_1 o_1 z_1}, S_{x_1 o_1 y_1}$  - приращение реакции основания и обобщенные физические характеристики гидростатических сил и упругих связей.

## 2.5. Построение аналитического описания приращений моментов реакций вертикальных связей.

### 2.5.1. Построение математического описания приращений моментов реакций связей относительно оси $O_2 X_2$ .

*Приращение момента реакции гидростатических сил относительно оси  $O_2 X_2$ .* Приращение момента реакции гидростатических сил в абсолютной системе координат  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$  определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Delta M_{x_2}^Y &= -\gamma \cdot \int_F \int_{z_1}^{z_2} y_2 \cdot dz \cdot dF = -I_{y_1 z_1}^Y \cdot (1 - \cos \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \\ &I_{x_1 o_1 y_1}^Y \cdot \sin^3 \varphi + I_{x_1 o_1 z_1}^Y \cdot \left( \sin \varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin^3 \varphi \right) + \Delta z \cdot S_{x_1 o_1 z_1}^Y \cdot \cos \varphi - \frac{1}{2} \Delta z^2 \cdot \\ &F_z^Y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \Delta z \cdot S_{x_1 o_1 y_1}^Y \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\gamma$  – удельный вес воды;  $z_1 = z_0$  – нижний предел интегрирования (действующая ватерлиния  $W_0L_0$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ );  $z_2 = (z_0 + \Delta z) \cdot \cos \varphi + y_1 \cdot \sin \varphi$  – верхний предел интегрирования, исходная ватерлиния WL после наклона на угол  $+\varphi$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $\Delta z$  – вертикальное перемещение  $O_1$  (начала системы отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$ ) в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $y_2 = y_1 \cdot \cos \varphi - (z_0 + \Delta z) \sin \varphi$  – ордината центра элементарного объёма (плечо момента гидростатической силы, создаваемой погруженным элементарным объёмом);  $I_{y_1z_1}^Y = -\gamma \cdot \int_F y_1 \cdot z_0 \cdot dF$  – центробежный момент (момент второго порядка) жесткостей начальной ватерлинии WL;  $I_{x_1o_1y_1}^Y = -\gamma \cdot \int_F z_0^2 \cdot dF$  – момент второго порядка жесткостей начальной ватерлинии относительно координатной плоскости  $X_1O_1Y_1$ ;  $I_{x_1o_1z_1}^Y = -\gamma \cdot \int_F y_1^2 \cdot dF$  – момент второго порядка жесткостей площади ватерлинии относительно координатной плоскости  $X_1O_1Z_1$ .

**Приращение момента реакции упругих опор относительно оси  $O_2X_2$ .** Приращение момента реакции упругих опор в абсолютной системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  (рис. 4) определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Delta M_{x_2}^r = & -\sum_{i=1}^n c_i \cdot f_i \cdot y_{i2} = -I_{y_1z_1}^r \cdot [\cos \varphi \cdot (1 - \cos \varphi) + (\sin \varphi)^2] + \\ & I_{x_1o_1y_1}^r \cdot \sin \varphi \cdot (1 - \cos \varphi) + \Delta z \cdot S_{x_1o_1y_1}^r \cdot [\sin \varphi \cdot (1 - \cos \varphi) - \sin \varphi \cdot \\ & \cos \varphi] + \Delta z \cdot S_{x_1o_1z_1}^r \cdot [(\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2] - \Delta z^2 \cdot F_z^r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \\ & I_{x_1o_1z_1}^r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c_i$  – жесткость  $i$ -той упругой опоры;  $f_i = z_{2i} - z_{1i}$  – перемещение точки закрепления (деформация)  $i$ -той упругой опоры;  $z_{1i}$  – начальная высота точки присоединения опоры к твердому телу;  $z_{2i} = (z_{1i} + \Delta z) \cdot \cos \varphi + y_{1i} \cdot \sin \varphi$  – высота точки присоединения  $i$ -той опоры после приложения силы  $P$ ;  $y_{2i} = y_{1i} \cdot \cos \varphi - (z_{1i} + \Delta z) \sin \varphi$  – ордината  $i$ -той точки присоединения упругой опоры к твердому телу в абсолютной системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $y_{1i}, z_{1i}$  – ордината и аппликата  $i$ -той точки присоединения упругой опоры к твердому телу во вспомогательной системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ ;  $\Delta z$  – вертикальное перемещение начала координат  $O_1$ ;  $F_z^r = -\sum_{i=1}^n c_i$  – суммарная жесткость (момент жесткостей нулевого порядка) упругих опор;  $S_{x_1o_1y_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot z_{1i}$  – момент жесткостей первого порядка упругих опор относительно координатной плоскости  $X_1O_1Y_1$ ;  $S_{x_1o_1z_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot y_{1i}$  – момент жесткостей первого порядка упругих опор относительно координатной плоскости  $X_1O_1Z_1$ ;  $I_{y_1z_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot y_{1i} \cdot z_{1i}$  – момент жесткостей второго порядка относительно координатных плоскостей  $X_1O_1Z_1$  и  $X_1O_1Y_1$  (центробежный момент жесткостей);  $I_{x_1o_1y_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot z_{1i}^2$  – момент жесткостей второго порядка относительно координатной плоскости  $X_1O_1Y_1$ ;  $I_{x_1o_1z_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot y_{1i}^2$  – момент жесткостей второго порядка относительно координатной плоскости  $X_1O_1Z_1$ .

Объединим аналогии в описаниях приращения моментов гидростатических сил (8) и реакций упругих опор (9), исключив несущественные, с нашей точки зрения, отдельные элементы описаний:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -I_{y_1z_1}^r \cdot [(1 - \cos \varphi) + (\sin \varphi)^2 \cdot \cos \varphi] - I_{y_1z_1}^r \cdot [\cos \varphi \cdot (1 - \cos \varphi) + \\ & (\sin \varphi)^2] \cong -I_{y_1z_1}^r \cdot [(1 - \cos \varphi) + (\sin \varphi)^2] \cdot \cos \varphi; \\ 2) \quad & \Delta z \cdot S_{x_1o_1y_1}^r \cdot \cos \varphi + \Delta z \cdot S_{x_1o_1z_1}^r \cdot [(\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2] \cong \Delta z \cdot \\ & S_{x_1o_1z_1}^r \cdot \cos \varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & I_{x_1 o_1 z_1}^Y \cdot \left( \sin \varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin^3 \varphi \right) + I_{x_1 o_1 z_1}^r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cong I_{x_1 o_1 z_1} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi; \\
 4) \quad & \frac{1}{2} \cdot I_{x_1 o_1 y_1}^Y \cdot (\sin \varphi)^3 + I_{x_1 o_1 y_1}^r \cdot \sin \varphi \cdot (1 - \cos \varphi) \cong I_{x_1 o_1 y_1} \cdot \sin \varphi \cdot (1 - \cos \varphi); \\
 5) \quad & -\Delta z \cdot S_{x_1 o_1 y_1}^Y \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi + \Delta z \cdot S_{x_1 o_1 y_1}^r \cdot [\sin \varphi \cdot (1 - \cos \varphi) - \sin \varphi \cdot \cos \varphi] \cong -\Delta z \cdot S_{x_1 o_1 y_1} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi; \\
 6) \quad & -\frac{1}{2} \cdot \Delta z^2 \cdot F_Z^Y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \Delta z^2 \cdot F_Z^r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cong -\Delta z^2 \cdot F_Z \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Обобщённое описание приращения момента реакций гидростатических сил и упругих опор относительно оси  $O_2 X_2$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta M_{x_2} = \Delta M_{x_2}^Y + \Delta M_{x_2}^r = & -I_{y_1 z_1} \cdot [(1 - \cos \varphi) + (\sin \varphi)^2] \cdot \cos \varphi + \Delta z \cdot S_{x_1 o_1 z_1} \cdot \cos \varphi + I_{x_1 o_1 z_1} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + I_{x_1 o_1 y_1} \cdot \sin \varphi \cdot (1 - \cos \varphi) - \Delta z \cdot S_{x_1 o_1 y_1} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \Delta z^2 \cdot F_Z \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi,
 \end{aligned} \quad (10)$$

где  $F_Z = F_Z^Y + F_Z^r$ ,  $S_{x_1 o_1 y_1} = S_{x_1 o_1 y_1}^Y + S_{x_1 o_1 y_1}^r$ ,  $S_{x_1 o_1 z_1} = S_{x_1 o_1 z_1}^Y + S_{x_1 o_1 z_1}^r$ ,  $I_{y_1 z_1} = I_{y_1 z_1}^Y + I_{y_1 z_1}^r$ ,  $I_{x_1 o_1 z_1} = I_{x_1 o_1 z_1}^Y + I_{x_1 o_1 z_1}^r$ ,  $I_{x_1 o_1 y_1} = I_{x_1 o_1 y_1}^Y + I_{x_1 o_1 y_1}^r$  – системные моменты нулевого, первого, второго порядка;  $\Delta z$  – вертикальное перемещение начала системы координат  $O_1$ ,  $\varphi$  – угол наклона относительно оси  $O_2 X_2$ .

### 2.5.2. Построение аналитического описания приращений моментов реакций связей относительно оси $O_2 Y_2$ .

**Приращение момента гидростатических сил относительно оси  $O_2 Y_2$ .** Приращение момента гидростатических сил относительно оси  $O_2 Y_2$  определяется изменением момента гидростатических сил вследствие вертикального перемещения и наклона ПМ относительно оси  $O_2 X_2$ :

$$\Delta M_{y_2}^Y = -\gamma \int_F \int_{z_1}^{z_2} x_2 \cdot dz \cdot dF = -I_{x_1 z_1}^Y \cdot (1 - \cos \varphi) + \Delta z \cdot S_{y_1 o_1 z_1}^Y \cdot \cos \varphi + I_{x_1 y_1}^Y \cdot \sin \varphi, \quad (11)$$

где  $\gamma$  – удельный вес воды;  $x_2 = x_1$  – текущая абсцисса элементарного объёма в системе координат  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$  и  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ ;  $y_1$  – текущая ордината элементарного объёма в системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ ;  $z_1 = z_0$  – нижний предел интегрирования (действующая ватерлиния  $W_0 L_0$  в системе координат  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ );  $z_2 = (z_0 + \Delta z) \cdot \cos \varphi + y_1 \cdot \sin \varphi$  – верхний предел интегрирования, исходная ватерлиния  $WL$  после наклона на угол  $+\varphi$  в системе координат  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ ;  $\Delta z$  – вертикальное перемещение начала системы отсчета ПМ  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  после снятия груза в системе координат  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ ;  $I_{y_1 z_1}^Y = -\gamma \cdot \int_F y_1 \cdot z_0 \cdot dF$  – центробежный момент жесткостей начальной ватерлинии  $WL$  относительно координатных плоскостей  $X_1 O_1 Z_1$  и  $X_1 O_1 Y_1$ ;  $I_{x_1 o_1 y_1}^Y = -\gamma \cdot \int_F z_0^2 \cdot dF$  – момент второго порядка жёсткости начальной ватерлинии относительно координатной плоскости  $X_1 O_1 Y_1$ ;  $I_{x_1 o_1 z_1}^Y = -\gamma \cdot \int_F y^2 \cdot dF$  – момент второго порядка площади ватерлинии относительно координатной плоскости  $X_1 O_1 Z_1$ .

**Приращение момента дискретных опор относительно оси  $O_2Y_2$ .** Приращение момента дискретных опор относительно оси  $O_2Y_2$  при вертикальном перемещении и наклонении относительно ортогональной оси  $O_2X_2$  определяется выражением:

$$\Delta M_{y_2}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_{i1} \cdot f_i = -I_{x_1z_1}^r \cdot (1 - \cos\varphi) + \Delta z \cdot S_{y_1o_1z_1}^r \cdot \cos\varphi + I_{x_1y_1}^r \cdot \sin\varphi, \quad (12)$$

где  $c_i, x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}$  – жесткость, координаты точки присоединения  $i$ -той упругой опоры к твёрдому телу в системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ ;  $x_{2i} = x_{i1}, z_{2i} = (z_{i1} + \Delta z) \cdot \cos\varphi + y_{i1} \cdot \sin\varphi$  – координаты точки соединения  $i$ -той упругой опоры к твёрдому телу после снятия груза в абсолютной системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $f_i = z_{2i} - z_{i1} = -z_{i1} \cdot (1 - \cos\varphi) + \Delta z \cdot \cos\varphi + y_{i1} \cdot \sin\varphi$  – вертикальное перемещение (деформация)  $i$ -той упругой опоры после снятия груза в абсолютной системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $\Delta z$  – вертикальное перемещение начала системы координат  $O_1$  в абсолютной системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ;  $\varphi$  – угол наклона относительно оси  $O_2X_2$ ,  $S_{y_1o_1z_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_{i1}, I_{x_1z_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_{i1} \cdot z_{i1}, I_{x_1y_1}^r = -\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_{i1} \cdot y_{i1}$  – моменты жесткостей упругих связей первого и второго порядка.

**Обобщённое описание приращения моментов гидростатических сил и дискретных упругих опор относительно оси  $O_2Y_2$ .**

$$\Delta M_{y_2} = \Delta M_{y_2}^y + \Delta M_{y_2}^r = -I_{x_1z_1} \cdot (1 - \cos\varphi) + \Delta z \cdot S_{y_1o_1z_1} \cdot \cos\varphi + I_{x_1y_1} \cdot \sin\varphi, \quad (13)$$

где  $S_{y_1o_1z_1} = S_{y_1o_1z_1}^y + S_{y_1o_1z_1}^r, I_{x_1z_1} = I_{x_1z_1}^y + I_{x_1z_1}^r, I_{x_1y_1} = I_{x_1y_1}^y + I_{x_1y_1}^r$ , – системные моменты жесткостей первого и второго порядка.

### 2.5.3. Общий вид уравнений равновесия ПМ после снятия груза в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ .

Дополним уравнения равновесия (4), подставив приращения реакций, моментов реакций (7,10,13). Уравнения равновесия ПМ после снятия груза  $P$  будут иметь следующий вид:

$$-S_{x_1o_1y_1} \cdot (1 - \cos\varphi) + \Delta z \cdot F_z \cdot \cos\varphi + S_{x_1o_1z_1} \cdot \sin\varphi + P = 0; \quad (14)$$

$$-I_{y_1z_1} \cdot [(1 - \cos\varphi) + (\sin\varphi)^2] \cdot \cos\varphi + \Delta z \cdot S_{x_1o_1z_1} \cdot \cos\varphi + I_{x_1o_1z_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + I_{x_1o_1y_1} \cdot \sin\varphi \cdot (1 - \cos\varphi) - \Delta z \cdot S_{x_1o_1y_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \Delta z^2 \cdot F_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + G_0 \cdot (z_{1g} - z_{1d}) \cdot \sin\varphi + P \cdot (y_{1p} \cdot \cos\varphi - z_{1p} \cdot \sin\varphi) = 0; \quad (15)$$

$$I_{x_1z_1} \cdot (1 - \cos\varphi) - \Delta z \cdot S_{y_1o_1z_1} \cdot \cos\varphi - I_{x_1y_1} \cdot \sin\varphi - P \cdot x_{1p} = 0. \quad (16)$$

Равновесие системы при принятом условии совмещения оси координат и оси наклона описывается тремя уравнениями, включающих два неизвестных параметра: вертикальное перемещение начала системы отсчёта  $O_1$  и угла наклона  $\varphi$ . Третий неизвестный параметр – направление оси наклона находится за пределами поставленной задачи и не препятствует поиску аналитического решения задачи равновесия.



## **2.6. Анализ уравнений равновесия ПМ после снятия груза Р.**

**2.6.1. Анализ уравнения равновесия сил.** Уравнение сил содержит постоянную составляющую – внешнюю силу Р, которая в данном описании - инвариант (не зависит от выбора системы координат). Следовательно, и реакция физической системы на силу Р также должна быть инвариантом и не зависеть от выбора системы координат.

Суммарное перемещение начала координат  $O_1$  вспомогательной системы координат является величиной постоянной и, в конечном итоге, является описанием перемещения фиксированной точки – ЦЖ вертикальных упругих связей:

$$\Delta z \cdot \cos \varphi - \frac{S_{x_1 o_1 z_1}}{F_z} \cdot \sin \varphi - \frac{S_{x_1 o_1 y_1}}{F_z} \cdot (1 - \cos \varphi) = -\frac{P}{F_z} \cong \Delta z_f, \quad (17)$$

где  $F_z < 0$  – градиент [12] параллельного потенциального поля образованного гидростатическими силами и упругими опорами;  $\Delta z_f$  – перемещение ЦЖ.

ЦЖ и есть точка, перемещение которой равно алгебраической сумме линейных перемещений точек твердого тела при произвольном выборе полюса [11].

Координаты центра жесткости - точки, отвечающей условиям инвариантности свойств параллельных упругих связей, во вспомогательной системе координат  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  определяются выражениями:

$$x_{1f} = \frac{S_{y_1 o_1 z_1}}{F_z}; \quad y_{1f} = \frac{S_{x_1 o_1 z_1}}{F_z}; \quad z_{1f} = \frac{S_{x_1 o_1 y_1}}{F_z}. \quad (18)$$

Учитывая отрицательное значение  $F_z$ , определим перемещение центра жесткости системы при положительной силе Р, а также изменение осадки ПМ.

При снятии груза  $P > 0$  ПМ всплывает. ЦЖ в абсолютной системе координат  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$  переместится вверх на величину  $\Delta z_f = -\frac{P}{-|F_z|} > 0$ . При неизменном уровне воды  $z_0$  в абсолютной системе координат после перемещения ПМ вверх на величину  $\Delta z_f$  осадка ПМ в собственной (вспомогательной) системе уменьшится и будет равна  $z_0 - \Delta z_f$ .

**2.6.2. Анализ уравнений равновесия.** В уравнениях равновесия моментов (15,16) присутствует неизвестное  $\Delta z$  - вертикальное перемещение начала вспомогательной системы  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  и его квадрат  $\Delta z^2$ . Подставим их описания из уравнения сил (14) в уравнения моментов (15,16).

После системных преобразований, исключения членов с высокими степенями  $\sin \varphi$  уравнения равновесия в (14,15,16) в системе  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$  могут быть представлены в следующем виде:

$$\Delta z_{1f} \cdot F_z + P = 0; \quad (19)$$

$$I_{f x_1 o_1 z_1} \cdot \sin \varphi + P \cdot (y_{1p} - y_{1f}) + G \cdot (z_g - z_d) \cdot \sin \varphi = 0; \quad (20)$$

$$-I_{f x_1 y_1} \cdot \sin \varphi - P \cdot (x_{1p} - x_{1f}) = 0, \quad (21)$$

где  $\Delta z_{1f}$  – вертикальное перемещение ЦЖ;  $I_{f x_1 o_1 z_1}$ ,  $I_{f x_1 y_1}$  - центральные моменты второго порядка жесткостей связей;  $z_g, z_d$  – аппликаты ЦМ и ЦВ (центра величины - точки приложения равнодействующей реакции связей [2]) после снятия груза;

$G = G_0 - P$ ,  $D = D_0 - P$  – вес ПМ, равнодействующая реакции связей после снятия груза  $P$ ;  $x_{1f}$ ,  $y_{1f}$ ,  $z_{1f}$  – координаты ЦЖ упругих связей.

Апликаты ЦМ и ЦВ после снятия груза  $P$  определяются выражениями:

$$z_g = \frac{G_0 \cdot z_{1g} - P \cdot z_{1p}}{G}, \quad z_d = \frac{D_0 \cdot z_{1d} - P \cdot (z_{1f} - \Delta z_{1f})}{D}, \quad (22)$$

где  $G_0$ ,  $z_{1g}$ ,  $D_0$ ,  $z_{1d}$  – вес ПМ и апликата ЦМ, равнодействующая реакций связей и апликата ЦВ до снятия груза  $P$ .

Полученные уравнения равновесия (19,20,21) являются инвариантами и указывают на особенности процесса перехода механической системы в новое положение равновесия в зависимости от свойств системы упругих связей. Приращение равнодействующей реакции упругих связей приложено в ЦЖ и пропорционально вертикальному перемещению ЦЖ независимо от выбора системы отсчета. Угловые перемещения создают реактивный момент, переносящий силу  $P$  в ЦЖ связей. Реактивный момент связей пропорционален углу наклона  $\varphi$ . Коэффициентами пропорциональности являются центральные моменты второго порядка упругих связей относительно координатных плоскостей, проходящих через ЦЖ системы упругих связей).

Математическая модель описывает условия равновесия в системе координат, положение которой относительно механической системы определяется физическими свойствами упругих связей как самостоятельной системы. Изотропность инерциального пространства не позволяет выявить изменения свойств от изменения положения механической системы в нём. Можно изменить только положение наблюдателя для наиболее ясного и удобного наблюдения за механическими процессами. Обычно, в процессе проектирования будущее изделие уже имеет свою рабочую (проектную) систему координат, выбранную по каким-то правилам. Следовательно, о изделии необходимо знать следующее:

- 1) направление оси наклона в абсолютной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$  совмещенной с рабочей системой координат  $OXYZ$ .
- 2) величину наклонов в абсолютной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$  совмещенной с рабочей системой координат  $OXYZ$ .

**2.6.3 Определение положения равновесия ПМ в инерциальной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$ , совмещенной с рабочей системой координат  $OXYZ$ .** Для получения пригодного для практических целей описания равновесия ПМ необходимо установить связь описания наклона в особенной системе отсчета с заданным направлением оси  $O_2X_2$ , и в системе координат с произвольным направлением горизонтальных осей. Эту процедуру можно выполнить в паре сопряженных систем координат (рис. 5): абсолютной системе  $O_3X_3Y_3Z_3$  и рабочей системе  $OXYZ$  ПМ, смещенных относительно ранее использовавшихся систем координат на угол  $\delta$ .

Для представления описания наклона в абсолютной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$  выполним последовательно ряд угловых преобразований исходного описания ПМ:

а) - представим описания исходных уравнений моментов равновесия до приложения силы  $P$  (наклонение  $\varphi = 0$ ) в системе  $O_1X_1Y_1Z_1$  посредством их описаний в системе  $OXYZ$  (выполнив переход к системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  повернутой относительно системы  $OXYZ$  на угол « $-\delta$ »);

б) - представим описания моментов равновесия в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  после наклона ПМ (системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ ) на угол  $\varphi$  относительно

оси  $O_2X_2$  совокупностью исходных описаний свойств в рабочей системе координат  $OXYZ$ ;

с) - представим описания моментов равновесия в инерциальной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$ , совпадающей в начальный момент с рабочей системой координат  $OXYZ$ , поворотом системы координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  на угол « $+\delta$ » до совпадения с  $O_3X_3Y_3Z_3$ .

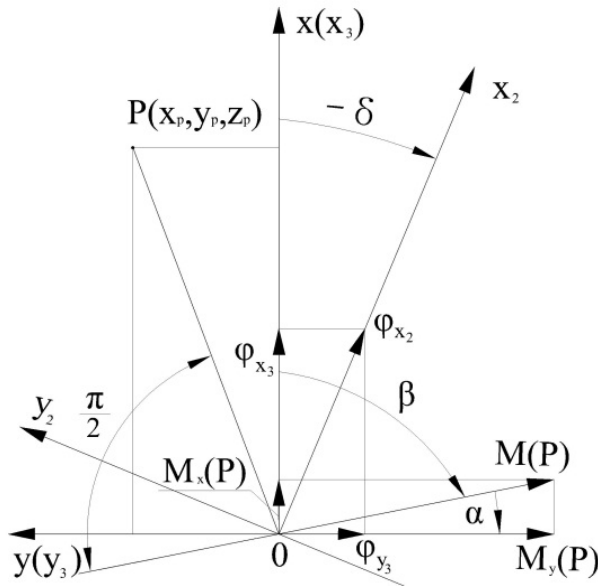


Рисунок 5. Схема взаимного расположения осей координат для определения направления оси наклона  $O_2X_2$  в абсолютной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$

В данной части исследования используются стандартные формулы преобразования проекций отрезков, моментов второго порядка на координатные оси [13].

После выполнения приведенного выше алгоритма преобразований описание наклона на угол  $\varphi$  относительно одной горизонтальной оси неизвестного направления можно представить описаниями проекций наклонов относительно двух ортогональных горизонтальных осей рабочей системы координат  $OXYZ$  ПМ:

$$M_{x_3} = [I_{fxoz} + G \cdot (z_g - z_d)] \cdot$$

$$\cos \delta \cdot \sin \varphi + I_{fxy} \cdot \sin \delta \cdot \sin \varphi + M_{x_3}(P) = 0, \quad (23)$$

$$M_{y_3} = -[I_{fyoz} + G \cdot (z_g - z_d)] \cdot \sin \delta \cdot \sin \varphi - I_{fxy} \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi + M_{y_3}(P) = 0. \quad (24)$$

При этом  $\sin \varphi$  рассматриваем как псевдовектор углового перемещения с проекциями :

$$\begin{aligned} \varphi_{x_2} &= \sin \varphi, \quad \varphi_{y_2} = 0, \\ \varphi_{x_3} &= \sin \theta = \varphi_{x_2} \cdot \cos \delta = \cos \delta \cdot \sin \varphi; \\ \varphi_{y_3} &= \sin \psi = -\varphi_{x_2} \cdot \sin \delta = -\sin \delta \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия будут иметь следующий вид:

$$\Delta z_f \cdot F_z + P = 0; \quad (25)$$

$$M_{x_3} = [I_{fxoz} + G \cdot (z_g - z_d)] \cdot \sin \theta - I_{fxy} \cdot \sin \psi + M_{x_3}(P) = 0; \quad (26)$$

$$M_{y_3} = [I_{fyoz} + G \cdot (z_g - z_d)] \cdot \sin \psi - I_{fxy} \cdot \sin \theta + M_{y_3}(P) = 0, \quad (27)$$

где  $\Delta z_f$  – линейное перемещение ЦЖ упругих связей;  $F_z, x_f, y_f$  – линейная жёсткость и координаты ЦЖ упругих связей;  $I_{fxoz}, I_{fyoz}, I_{fxy}$  – центральные моменты второго порядка упругих связей;  $M_{x_3}(P) = P \cdot (y_p - y_f)$ ,  $M_{y_3}(P) = -P \cdot (x_p - x_f)$  – проекции момента груза  $P$ ;  $P, x_p, y_p$  – снятый груз и его координаты;  $G, z_g, z_d$  – вес

ПМ, аппликаты ЦМ и ЦВ с учётом снятия груза P;  $\sin \psi = -\sin \delta \cdot \sin \varphi$ ,  $\sin \theta = \cos \delta \cdot \sin \varphi$  – описание улов крена и дифферента в абсолютной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$ ;  $\delta$  – угол поворота от системы координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  к системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$  (положительный);  $\varphi$  – угол наклона от момента силы P в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ .

Из (23,24) определим описания углов наклона в абсолютной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$  определяются выражениями:

$$\sin \psi = -\frac{1}{G \cdot H - \frac{I_{fxy}^2}{G \cdot h}} \cdot \left[ M_{y_3}(P) + \frac{I_{fxy}}{G \cdot h} \cdot M_{x_3}(P) \right]; \quad (28)$$

$$\sin \theta = -\frac{M_{x_3}(P)}{G \cdot h} \cdot \left( 1 + \frac{I_{fxy}^2}{G^2 \cdot H \cdot h - I_{fxy}^2} \right) - M_{y_3}(P) \cdot \frac{I_{fxy}}{G^2 \cdot H \cdot h - I_{fxy}^2}, \quad (29)$$

где G – вес ПМ с учетом груза P;  $h = \frac{I_{xoz}}{G} - a$ ,  $H = \frac{I_{yoz}}{G} - a$  – малая и большая метацентрические высоты [2];  $a = z_g - z_a$  – возвышение ЦМ над ЦЖ;  $I_{fxy}$  – момент жесткостей второго порядка (центробежный);  $M_{x_3}(P)$ ,  $M_{y_3}(P)$  – проекции возмущающего момента в системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$ ;  $\theta, \psi$  – угол крена и угол дифферента в системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$ .

В случае совпадения направления осей инерциальной системы координат  $O_3X_3Y_3Z_3$  и главной центральной системы координат упругих связей ПМ ( $I_{fxy} = 0$ ) уравнения не содержат связей между координатами и представляют, в соответствии с [14], собственное независимое описание наклона.

**2.6.4. Определение направления оси наклона.** Для анализа используем схему моментов сил действующих на ПМ (рис. 5) и выполним следующие действия над уравнениями (23,24):

- перенесём проекции аксиального момента пары силы P и реакции связей на него в правую часть уравнений;
- разделим почленно уравнение (23) на уравнение (24);
- разделим числитель и знаменатель на  $\cos \delta$ .

Полученное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{G \cdot h + I_{fxy} \cdot \operatorname{tg} \delta}{-G \cdot H \cdot \operatorname{tg} \delta - I_{fxy}} = \frac{M_{x_3}(P)}{M_{y_3}(P)} = \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \quad (30)$$

Направление оси наклона определяется из (49) выражением:

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{G \cdot h + I_{fxy} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{G \cdot H \cdot \operatorname{tg} \alpha + I_{fxy}} \quad (31)$$

Если абсолютная система координат  $O_3X_3Y_3Z_3$  совпадает с главной центральной системой координат  $OXYZ$  жесткостей упругих связей ПМ ( $I_{fxy} = 0$ ), то направление оси наклона определяется известным выражением [2]:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h}{H \cdot \operatorname{tg} \alpha}. \quad (32)$$

Где  $\alpha, \beta$  – углы, определяющие направление вектора момента  $M(P)$  в системе координат в системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$ ;  $\delta$  – угол, определяющий направление оси наклона  $O_2X_2$  в абсолютной системе координат  $O_3X_3Y_3Z_3$ .

**Анализ результатов исследований.** В исследовании рассмотрена задача равновесия механической системы, моделирующей в достаточной степени ПМ на мелково-

дье. Механической системой, обладающей интегративными свойствами, является твердое тело с пространственной системой упругих связей [5,6]. Для моделирования ТС использована частная модель механической системы, включающая твердое тело на вертикальных упругих опорах, частично погруженное в воду. Выбор абсолютной системы координат ограничен условием совпадения оси наклона с горизонтальной осью системы координат. Произвол в выборе положения оси  $O_2X_2$  как прогнозируемой оси наклона на уровне опорной поверхности (на рис. 4) исключен самими математическими преобразованиями без привлечения дополнительных условий или предположений. Полученное инвариантное описание сил полярными векторами, а моментов аксиальными векторами дает конкретное содержание прогнозу Л. Ландау о форме уравнений равновесия замкнутой системы [9]. Уравнения моментов равновесия, в общем случае, являются связанными, ранее не имевшими аналитического решения. В данной работе получено аналитическое решение уравнений равновесия моментов в системе координат с произвольным направлением осей, которые включают и решение распавшихся уравнений в системе главных центральных осей координат.

Достоверность результатов можно прогнозировать отсутствием сбоев при выполнении длинной цепи математических преобразований, заканчивающихся известными ранее математическими выражениями, имеющими теперь расширенный смысл.

Использование в практике проектирования результатов данной работы позволило определить ограничения по преодолению паромно-мостовыми машинами мелководья, оценить аналитически влияние продольного смещения ЦМ относительно ЦЖ на угловые колебания ТС при движении по суше Разработать ММ пространственных колебаний ТС [15,17,16].

**Выводы.** В данном исследовании новым является:

1. Установление однородности описания реакций гидростатических сил и сил упругости пружины.
2. Построение обобщенной ММ описания статического равновесия ПМ, моделью которой является твердое тело на вертикальных упругих опорах полупогруженное в воду.
3. Аналитическое определение координат точки приложения равнодействующей вертикальных реакций упругих связей и гидростатических сил воды..
4. Аналитическое определение инвариантности линейных и угловых перемещений.
5. Нахождение аналитических описаний перехода в новое положение равновесия под действием вертикальной силы в системе координат с произвольной ориентацией горизонтальных осей.
6. Разработанная ММ пригодна для определения статического равновесия сухопутных, плавучих транспортных средств и сооружений.
7. Определенные конкретные проявления принципов инвариантности содержат предпосылки для определения ограничений на использование ЦМ как преимущественной системы отсчета в задачах динамики твердого тела.

**Литература:** 1. Жабров В.И. Инженерные переправочно-десантные средства СССР и России / В.И. Жабров, А.П. Степанов - [http://vadimvsvar.narod.ru/ALL\\_OUT/TiVOut9801/AmfRS/AmfRS001.htm](http://vadimvsvar.narod.ru/ALL_OUT/TiVOut9801/AmfRS/AmfRS001.htm). 2. Семенов-Тян-Шанский В.В. Статика и динамика корабля. Теория плавучести, остойчивости и спуска / В.В. Семенов-Тян-Шанский. - Л.: Судпромгиз, 1960. - 576 с. 3. Аксенов П.В. Многоосные автомобили [2-е изд., перераб. и доп.] / П.В. Аксенов. - М.: Машиностроение, 1989. - 280 с.: ил. 4. Забавников Н.А. Основы теории транспортных гусеничных машин / Н.А. Забавников. - М.: «Машиностроение», 1975. - 448 с. 5. Найдено О.К. Амортизация судовых двигателей и механизмов / О.К. Найдено, П.П. Петров. - Л.: Судпромгиз, 1962. - 288

с. 6. Ганиев Р.Ф. Колебания твердых тел. / Р.Ф. Ганиев, В.О. Кононенко. - М.: Изд. «Наука», 1976. - 432 с. 7. Фролов К.В. Методы совершенствования машин и современные проблемы машиностроения / К.В. Фролов. - М.: Машиностроение, 1984. - 223 с. 8. Задеев Е.П. Определение равновесия плавающей машины на мелководье после приема груза / Е.П. Задеев. - М.: Издание МАДИ, 1982, - 115 с. [Сборник научных трудов МАДИ: "Исследование и расчет вездеходных транспортных средств и автопоездов"; с. 105-113]. 9. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10-ти т. [т. I "Механика", 4-е изд., испр.] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 216 с. 10. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. - 432 с.: ил. - (Учебн. для студентов вузов; 3-е изд.). 11. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. - М.: Физматгиз, 1982. - 352 с. - (В 2-х томах. Т. I, "Статика и кинематика"). 12. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.В. Лурье. - М.: Физматгиз, 1983. - 640 с. - (В 2-х томах. Т. II, "Динамика"). 13. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов [2-е изд.] / В.И. Феодосьев. - М.: Физматгиз, 1962. - 536 с. 14. Холево А.С. Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры / А.С. Холево. - М.: Знание, 1985. - 32 с. - (Новое в жизни, науке и технике. Сер. "Математика, кибернетика", №6). 15. Задеев Е.П. О структуре уравнений динамики на примере описания колебаний гусеничной машины / Е.П. Задеев // Сб. научных трудов МАДИ. - 1988. - С. 75-80. 16. Серикова Т.В. Исследование колебаний паромно-мостовой машины со смещенным центром масс в продольной плоскости / Т.В. Серикова // Сб. научных трудов МАДИ. - 1988. - С. 81-83. 17. Задеев Е.П. Пространственные колебания транспортного средства / Е.П. Задеев // - Механика та машинобудування. - 2000. - № 1 - С. 261-270.

**Bibliography (transliterated):** 1. Zhabrov V.I. Inzhenernye perepravochno-desantnye sredstva SSSR i Rossii / V.I. Zhabrov, A.P. Stepanov [http://vadimvswar.narod.ru/ALL\\_OUT/TiVOut9801/AmfRS/AmfRS001.htm](http://vadimvswar.narod.ru/ALL_OUT/TiVOut9801/AmfRS/AmfRS001.htm). 2. Semenov-Tjan-Shanskij V.V. Statika i dinamika korablja. Teorija plavuchesti, ostojchivosti i spuska / V.V. Semenov-Tjan-Shanskij. L.: Sudpromgiz, 1960. 576 s. 3. Aksenov P.V. Mnogoosnye avtomobili [2-e izd., pererab. i dop.] / P.V. Aksenov. - M.: Mashinostroenie, 1989. 280 s.: il. 4. Zabavnikov N.A. Osnovy teorii transportnyh gusenichnyh ma-shin / N.A. Zabavnikov. M.: «Mashinostroenie», 1975. 448 s. 5. Najdenko O.K. Amortizacija sudovyh dvigatelej i mehanizmov / O.K. Najdenko, P.P. Petrov. - L.: Sudpromgiz, 1962. 288 s. 6. Ganiev R.F. Kolebanija tverdyh tel. / R.F. Ganiev, V.O. Kononenko. M.: Izd. «Nauka», 1976. 432 s. 7. Frolov K.V. Metody sovershenstvovaniya mashin i sovremennye problemy ma-shinostroeniya / K.V. Frolov. M.: Mashinostroenie, 1984. 223 s. 8. Zadeev E.P. Opredelenie ravnovesiya plavajushhej mashiny na melkovod'e posle priema gruzha / E.P. Zadeev. M.: Izdanie MADI, 1982, 115 s. [Sbornik nauchnyh trudov MADI: "Issledovanie i raschet vezdehodnyh transportnyh sredstv i avtopoezdov"; s. 105-113]. 9. Landau L.D. Teoreticheskaja fizika: ucheb. posobie v 10-ti t. [t. I "Mehanika", 4-e izd., ispr.] / L.D. Landau, E.M. Lifshic. - M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. - 216 s. 10. Matveev A.N. Mehanika i teorija otnosi-tel'nosti / A.N. Matveev. M.: ООО «Izdatel'stvo «Mir i Obrazovanie», 2003. 432 s.: il. (Uchebn. dlja studentov vuzov; 3-e izd.). 11. Lojczjanskij L.G. Kurs teoreticheskoy mehaniki / L.G. Lojczjanskij, A.I. Lur'e. - M.: Fizmatgiz, 1982. - 352 s. (V 2-h tomah. T. I, "Statika i kinematika"). 12. Lojczjanskij L.G. Kurs teoreticheskoy mehaniki / L.G. Lojczjanskij, A.V. Lu-r'e. - M.: Fizmatgiz, 1983. - 640 s. (V 2-h tomah. T. II, "Dinamika"). 13. Feodos'ev V.I. So-protivlenie materialov [2-e izd.] / V.I. Feodos'ev. M.: Fizmatgiz, 1962. 536 s. 14. Holevo A.S. Statisticheskaja struktura kvantovoj mehaniki i skrytye parametry / A.S. Holevo. - M.: Znanie, 1985. - 32 s. - (Novoe v zhizni, nauke i tehnikе. Ser. "Matematika, kibernetika", №6). 15. Zadeev E.P. O strukture uravnenij dinamiki na primere opisaniya kolebanij guse-nichnoj mashiny / E.P. Zadeev // Sb. nauchnyh trudov MADI. 1988. - S. 75-80. 16. Serikova T.V. Issledovanie kolebanij paromno-mostovoj mashiny so smeshhennym centrom mass v prodol'-noj ploskosti / T.V. Serikova // Sb. nauchnyh trudov MADI. 1988. - S. 81-83. 17. Zadeev E.P. Prostranstvennye kolebanija transportnogo sredstva / E.P. Zadeev // - Mehanika ta mashino-buduvannja. 2000. № 1 S. 261-270.

Задєєв Є.П.

РІВНОВАГА МАШИНИ-АМФІБІЇ НА МІЛКОВОДДІ.  
(Реалізація принципу інваріантності)

Розроблена математична модель (ММ) переходу в нове положення рівноваги плаваючої машини, яка частково спирається на підвіску при прийомі (знятті) вантажу. ММ описує властивості системи, що включає тверде тіло, вертикальні пружні зв'язки, гідростатичні сили. ММ не містить обмежень жорсткості зв'язків ( $0 \leq c_i < \infty$ ). Для вертикальних реакцій пружних зв'язків уперше аналітично визначена в просторі точка прикладення рівнодійної, що дозволило усі сили в рівняннях представити фізичними (полярними) векторами, а моменти представити моментами пар сил (аксіальними векторами). Рівняння рівноваги є інваріантами. Незалежно від вибору системи відліку переміщення довільної точки під дією вертикальної сили визначається лінійним переміщенням центру жорсткості (ЦЖ) і кутовим переміщенням твердого тіла відносно горизонтальної осі, що проходить через ЦЖ. Уперше побудовані аналітичні залежності, що визначають нахили твердого тіла в системі координат з довільним напрямом горизонтальних осей.

Задєєв Е. П.

РАВНОВЕСИЕ МАШИНЫ-АМФИБИИ НА МЕЛКОВОДЬЕ.  
(Реализация принципа инвариантности)

Разработана математическая модель (ММ) перехода в новое положение равновесия плавающей машины, которая частично опирается на подвеску при приеме (снятии) груза. ММ описывает свойства системы, включающей твердое тело, вертикальные упругие связи, гидростатические силы. ММ не содержит ограничений жесткости связей ( $0 \leq c_i < \infty$ ). Для вертикальных реакций упругих связей впервые аналитически определена в пространстве точка приложения равнодействующей, что позволило все силы в уравнениях представить физическими (полярными) векторами, а моменты представить моментами пар сил (аксиальными векторами). Уравнения равновесия являются инвариантами. Независимо от выбора системы отсчета перемещения произвольной точки под действием вертикальной силы определяется линейным перемещением центра жесткости (ЦЖ) и угловым перемещением твердого тела относительно горизонтальной оси, проходящей через ЦЖ. Впервые построены аналитические зависимости, определяющие наклоны твердого тела в системе координат с произвольным направлением горизонтальных осей.

Zadeev E.P.

BALANCE OF THE AMPHIBIOUS CAR IN THE SHOALING WATER.  
(The realization of the invariance principle)

The mathematical model (MM) transition to a new equilibrium position of floating machine, which is in part based on a hanger at the intake (withdrawal) of cargo. MM describes the properties of a system which includes solid, vertical elastic links, hydrostatic forces. MM does not contain any restrictions rigidity links ( $0 < c_i < \infty$ ). For vertical reactions with elastic links analytically defined in the space of the point of application of the resultant, which allowed all the forces in the equations provide physical (polar) vectors, and moments to present moments couples forces (axial vectors). The equilibrium equation are invariants. Regardless of the choice of the reference system moving an arbitrary point under the vertical force is determined by the linear movement of the center of rigidity (CR) and angular displacement of a solid body about a horizontal axis passing through the CR. First built analytical dependences determining tendencies of a rigid body in a coordinate system with an arbitrary direction of the horizontal axes.