

УПРАВЛІННЯ В ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

УДК 681.5

Гурко А. Г., канд. техн. наук; Янчевский И. В., д-р физ.-мат. наук

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПЛОСКОГО ШАРНИРНОГО ИЗБЫТОЧНОГО МАНИПУЛЯТОРА

Введение. Рычажные механизмы с разомкнутыми кинематическими цепями (манипуляторы) положены в основу структурных схем многих машин, совершающих закономерные механические движения. И из всего их разнообразия весьма распространенными являются манипуляторы с приводными кинематическими парами 5-го класса, различные схемы которых реализованы в конструкциях ряда промышленных роботов, роботов для ликвидации чрезвычайных ситуаций, роботизированных экскаваторов, манипуляторов медицинской и космической техники, и проч. Этим определяется актуальность исследований, посвященных совершенствованию теории и практики расчета манипуляторов. Особый интерес при этом представляют вопросы, связанные с разработкой эффективных методов решения обратной задачи кинематики (ОЗК) избыточного манипулятора, которая заключается в отыскании обобщенных координат в его кинематических парах, обеспечивающих заданное движение и ориентацию рабочего оборудования относительно абсолютной системы координат.

Известно, что ОЗК имеет множество комбинаций возможных решений, и классические методы построения решения основаны на замене исходной задачи задачей с меньшим количеством неизвестных за счет наложения относительных связей на перемещения в кинематических парах. Однако данный прием не соответствует современной практике робототехнических систем, что и предопределяет необходимость поиска альтернативных методов.

Из публикаций, посвященных аналитическим методам решения ОЗК манипуляторов, следует отметить [1-5]. Вместе с тем, предложенные авторами [1, 4, 5] методы ориентированы на определенный класс манипуляторов с упрощенной структурой, что существенно сужает область применимости результатов. В [2, 3] рассмотрены более общие конструктивные исполнения манипуляторов, однако полученные расчетные выражения достаточно сложны и поэтому трудоемки для реализации в режиме реального времени. В [3], в частности, возникает необходимость вычисления характеристического полинома 16-го порядка.

Сложность построения строгих аналитических решений обратных задач стимулирует развитие численных. Большинство среди имеющихся в открытой печати решений построены на методе Ньютона-Рафсона [6-8], однако устойчивость результатов по этому методу существенно зависит от начальных приближений вектора присоединенных переменных. Широкое распространение для численного решения ОЗК получило также привлечение псевдообратных матриц Якобиана [9, 10] и градиентных алгоритмов нелинейного программирования для решения эквивалентной задачи минимизации целевой функции от обобщенных координат [11, 12]. К недостаткам данных методов следует отнести большое количество вычислительных операций [13] и сложность оценки точности полученных результатов.

Перспективными являются методы, основанные на использовании нечеткой логики [14] и обучаемых нейронных сетей [15, 16], а также их сочетания [17].

© А. Г. Гурко, 2014

Недостатками этих методов являются соответственно субъективные ошибки экспертов и сложность обучения в реальном масштабе времени.

Работа построена следующим образом. В п. 1 изложены постановка задачи и определен тип рассматриваемой траектории движения крайней точки манипулятора. В качестве объекта рассмотрен манипулятор, представляющий собой плоский рычажный шарнирный четырехзвенный механизм. В п. 2 даны основные математические соотношения, на которых основываются полученные в работе результаты. В п. 3 приведен первый метод численного решения ОЗК рассматриваемого манипулятора, основанный на минимизации квадратичного критерия, содержащий искомые присоединенные углы с весовыми коэффициентами, для выбора которых может быть использован подход, описанный в п. 5. В п. 4 изложен второй метод решения поставленной задачи, строящейся на методах теории некорректных задач математической физики. Для оценки эффективности изложенных методов в п. 6 приведено решение конкретной модельной задачи. В заключении подведены основные итоги работы, обсуждаются возможные направления дальнейших исследований и показана возможность обобщения второго метода на случай большего количества звеньев.

1. Постановка задачи. Рассматривается 4R манипулятор, который в начальный момент занимает положение $O_0O_1O_2^0O_3^0O_4^0$ (рис. 1). Длины звеньев l_j ($j=\overline{1,4}$) считаются известными, а угол θ_1 , определяющий поворот механизма, – фиксированным (плоская задача).

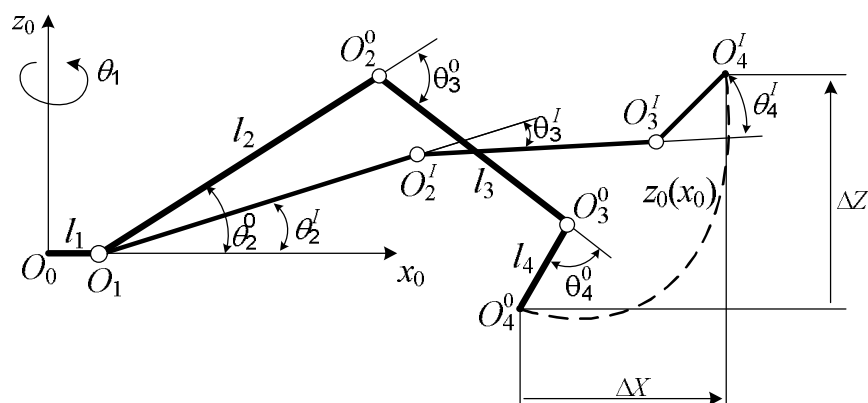


Рис. 1. Структурная схема манипулятора и траектория т. O_4

Постановка задачи заключается в определении как функции времени присоединенных углов θ_j ($j=\overline{2,4}$), обеспечивающих перевод точки O_4 из начального положения O_4^0 с координатами (x_4^0, z_4^0) в декартовой системе координат $z_0O_0x_0$ (рис. 1) в конечное O_4^I (x_4^I, z_4^I) по заданной траектории. Предполагается, что эта траектория может быть аппроксимирована квадратичной функцией:

$$z_0(x_0) = a_2 \cdot \left((x_0 - x_4^0)^2 - \Delta X \cdot (x_0 - x_4^0) \right) + \frac{\Delta Z}{\Delta X} (x_0 - x_4^0) + z_4^0, \quad (1)$$

где a_2 – коэффициент, задающий выпуклость траектории; $\Delta X = x_4^I - x_4^0$, $\Delta Z = z_4^I - z_4^0$; значения x_4^0 и z_4^0 определяются на основании равенств

$$\begin{aligned} x_4^i &= l_1 + l_2 \cos \theta_2^i + l_3 \cos(\theta_2^i + \theta_3^i) + l_4 \cos(\theta_2^i + \theta_3^i + \theta_4^i); \\ z_4^i &= l_2 \sin \theta_2^i + l_3 \sin(\theta_2^i + \theta_3^i) + l_4 \sin(\theta_2^i + \theta_3^i + \theta_4^i) \end{aligned} \quad (2)$$

при $i=0$.

В сформулированной постановке задачи рассматриваемый 4R манипулятор является избыточным, поскольку для её решения достаточно двух степеней свободы. Очевидно, что сформулированная задача имеет бесконечное множество решений θ_j^i ($j=\overline{2,4}$) (2), удовлетворяющих (1). Поэтому в настоящей работе в качестве оптимального принимается такое, которое минимизирует квадратичный параметр J_0

$$J_0 = \sum_{j=2}^4 \gamma_j \cdot (\theta_j^I - \theta_j^0)^2, \quad (3)$$

где θ_j^0, θ_j^I – начальное и конечное значения углов θ_j ($j=\overline{2,4}$), соответственно (рис. 1); γ_j – весовые коэффициенты, соотношение между которыми устанавливает приоритетность в изменении θ_j .

2. Расчетные выражения. Опыт решения аналогичных задач показывает, что математические выражения могут быть существенно упрощены, если в качестве расчетных принять углы α_j ($j=\overline{2,4}$), измеренные между j -м звеном манипулятора и неподвижной осью O_0x_0 . С учетом того, что

$$\alpha_j = \sum_{k=2}^j \theta_k \quad (j=\overline{2,4}), \quad (4)$$

формулы (2) примут вид

$$x_4^i = l_1 + \sum_{j=2}^4 l_j \cos \alpha_j^i; \quad z_4^i = \sum_{j=2}^4 l_j \sin \alpha_j^i. \quad (5)$$

Длина кривой $\widetilde{O_4^0 O_4^I}$ может быть аналитически вычислена на основании формулы $L = \int_{x_4^0}^{x_4^0 + \Delta X} \sqrt{1 + z_0'(x_0)^2} dx_0$, интеграл в которой является табличным [18]:

$$L = \left(\frac{(2b_2x + b_1)\sqrt{\phi(x)}}{4b_2} + \frac{1}{2K} \frac{1}{\sqrt{b_2}} \ln(2\sqrt{b_2\phi(x)} + 2b_2x + b_1) \right) \Bigg|_{x_4^0}^{x_4^I}.$$

Здесь используются обозначения

$$\phi(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0; \quad F(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1),$$

а постоянные коэффициенты таковы

$$K = 4b_2/\Delta; \quad \Delta = 4b_2b_0 - b_1^2; \quad b_0 = a_4^2 + 1; \quad b_1 = 2a_3a_4; \quad b_2 = a_3^2; \\ a_3 = 2a_2; \quad a_4 = -a_2(2x_4^0 + \Delta X) + \Delta Z / \Delta X.$$

Поскольку в настоящей работе рассматривается кинематическая задача и не учитываются действующие на звенья манипулятора нагрузки, то можно положить, что точка O_4 движется с постоянной скоростью, которую обозначим через v_4 ($v_4 = \mathbf{const}$). Разобьем временной интервал $[0; T]$, за который O_4 преодолевает расстояние L , на I равных промежутков с шагом $\Delta t = T/I$. Тогда с учетом постоянства скорости за малые промежутки времени Δt точка O_4 проходит одинаковые расстояния $\Delta L = L/I$. Очевидно, что между T и длиной кривой L выполняется равенство $L = v_4 \cdot T$, что тождественно записи $\Delta L = v_4 \cdot \Delta t$. Соответствующие значению ΔL приращения координат точки O_4 по осям абсцисс O_0x_0 и ординат O_0z_0 (рис. 1) на каждом временном интервале $[(i-1)\Delta t; i\Delta t]$ при $i = \overline{1, I}$ вычисляются из соотношений

$$\Delta L = \int_{x_4^{i-1}}^{x_4^{i-1} + \Delta x_4^i} \sqrt{1 + z_0'(x_0)^2} dx_0; \quad (6)$$

$$\Delta z_4^i = z_0(x_4^{i-1} + \Delta x_4^i) - z_0(x_4^{i-1}).$$

Диапазон интегрирования Δx_4^i , обеспечивающий выполнение равенства (6), можно найти методом интерполяции или методом последовательного приближения. Функция $z_0(x_0)$ описана в (1).

Очевидно, что в случае прямолинейной траектории, соответствующей равенству коэффициента a_2 нулю (1), изменения координат точки O_4 на каждом шаге Δt являются постоянными:

$$\Delta x_4^i = \frac{\Delta X}{I} = \mathbf{const}; \quad \Delta z_4^i = \frac{\Delta Z}{I} = \mathbf{const},$$

при этом

$$L = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Z^2}; \quad \Delta L = \sqrt{(\Delta x_4^i)^2 + (\Delta z_4^i)^2}.$$

Выразим значения $\Delta x_4^i = x_4^i - x_4^{i-1}$ и $\Delta z_4^i = z_4^i - z_4^{i-1}$ (см. (2)) через изменения уг-

лов α_j^i ($j=\overline{2,4}$). Для этого воспользуемся разложением тригонометрических функций в ряд Тейлора в окрестности значений α_j^i , ограничившись первыми двумя членами ввиду малости приращений углов $\Delta\alpha_j^i$:

$$\cos\alpha_j^i = \cos\alpha_j^{i-1} - \Delta\alpha_j^i \sin\alpha_j^{i-1}; \quad \sin\alpha_j^i = \sin\alpha_j^{i-1} + \Delta\alpha_j^i \cos\alpha_j^{i-1}.$$

В результате система уравнений (5) может быть сведена к алгебраической:

$$\sum_{j=2}^4 \Delta\alpha_j^i l_j \sin\alpha_j^{i-1} = -\Delta x_4^i; \quad \sum_{j=2}^4 \Delta\alpha_j^i l_j \cos\alpha_j^{i-1} = \Delta z_4^i. \quad (7)$$

Применительно к работе манипуляторов, более информативными являются изменения не абсолютных углов α_j , а относительных (присоединенных) θ_j . Тогда с использованием ранее записанных выражений (4) система (7) преобразуется к виду

$$\sum_{j=2}^4 \Delta\theta_j^i \sum_{k=j}^4 l_k \sin\alpha_k^{i-1} = -\Delta x_4^i; \quad \sum_{j=2}^4 \Delta\theta_j^i \sum_{k=j}^4 l_k \cos\alpha_k^{i-1} = \Delta z_4^i. \quad (8)$$

Система (8) должна быть решена на каждом шаге по i относительно приращений углов $\Delta\theta_j^i$ ($j=\overline{2,4}$), при этом справедливо рекуррентное выражение:

$$\alpha_j^i = \alpha_j^{i-1} + \sum_{k=2}^j \Delta\theta_k^i \quad (j=\overline{2,4}). \quad (9)$$

3. Первый вариант решения задачи. Как уже было оговорено, существует множество значений $\Delta\theta_j^i$, удовлетворяющих системе (8), поэтому для сужения области возможных решений вводится некоторый критерий оптимальности типа $J_0 \rightarrow \mathbf{min}$ (3). В настоящем параграфе вместо записи (3) используется следующее выражение

$$J_0 = \sum_{i=1}^I J_i = \sum_{i=1}^I \sum_{j=2}^4 \gamma_j \cdot (\Delta\theta_j^i)^2. \quad (10)$$

Поскольку слагаемые J_i этого ряда являются положительными, то задача минимизации параметра J_0 эквивалента задаче

$$J_i = \sum_{j=2}^4 \gamma_j \cdot (\Delta\theta_j^i)^2 \rightarrow \mathbf{min}. \quad (11)$$

на каждом временном шаге $i=\overline{1,I}$.

Представим систему уравнений (8) и выражение (11) в матричной форме

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{U}_i = \mathbf{F}_i. \quad (12)$$

$$J_i = \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{X}_i + \mathbf{U}_i^T \mathbf{R} \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{min}. \quad (13)$$

В (12) и (13) индекс T означает операцию транспонирования и приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \sum_{j=3}^4 l_j \sin \alpha_j^{i-1} & \sum_{j=4}^4 l_j \sin \alpha_j^{i-1} \\ \sum_{j=3}^4 l_j \cos \alpha_j^{i-1} & \sum_{j=4}^4 l_j \cos \alpha_j^{i-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^4 l_j \sin \alpha_j^{i-1} \\ \sum_{j=2}^4 l_j \cos \alpha_j^{i-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} -\Delta x_4^i \\ \Delta z_4^i \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \Delta \theta_3^i \\ \Delta \theta_4^i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_i = [\Delta \theta_2^i]; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \gamma_3 & 0 \\ 0 & \gamma_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = [\gamma_2].$$

Из (12) следует, что $\mathbf{X}_i = \mathbf{A}_i^{-1} (\mathbf{F}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{U}_i)$, тогда в (13) можно исключить вектор \mathbf{X} :

$$J_i = (\mathbf{F}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{U}_i)^T \mathbf{S}_i (\mathbf{F}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{U}_i) + \mathbf{U}_i^T \mathbf{R} \mathbf{U}_i, \quad (14)$$

где $\mathbf{S}_i = (\mathbf{A}_i^{-1})^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_i^{-1}$ – симметричная матрица.

Если временно ввести переменную $\mathbf{Z}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{U}_i$ и матрицу \mathbf{L}_i , удовлетворяющую равенству $\mathbf{R}_i = \mathbf{B}_i^T \mathbf{L}_i \mathbf{B}_i$, то уравнение (14) несложно преобразовать к виду

$$J_i = \mathbf{F}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{F}_i - 2 \mathbf{F}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_i^T (\mathbf{S}_i + \mathbf{L}_i) \mathbf{Z}_i, \quad (15)$$

в котором учтено, что $\mathbf{Z}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{Z}_i$.

Отметим, что матрица \mathbf{L}_i , как и \mathbf{S}_i , является симметричной.

Поскольку $\mathbf{Z}_i^T (\mathbf{S}_i + \mathbf{L}_i) \mathbf{Z}_i$ – положительно определенная матрица, то $J_i(\mathbf{Z}_i)$ – выпуклый функционал, для которого задача отыскания $\mathbf{min} J_i$ (13) эквивалентна отысканию стационарной точки, т.е. решению $J'_i(\mathbf{Z}_i) = 0$. Несложно показать, что

$$J'_i(\mathbf{Z}_i) = 2((\mathbf{S}_i + \mathbf{L}_i) \mathbf{Z}_i - \mathbf{S}_i \mathbf{F}_i). \quad (16)$$

Из равенства $J'_i(\mathbf{Z}_i) = 0$ и соотношения $\mathbf{Z}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{U}_i$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно \mathbf{U}_i :

$$(\mathbf{C}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_i + \mathbf{R}) \mathbf{U}_i = \mathbf{C}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{F}_i, \quad (17)$$

где $\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{B}_i$.

Следовательно, процедура решения задачи по изложенной выше методике заключается в последовательном ($i = \overline{1, I}$) решении системы (17) относительно $\mathbf{U}_i = [\Delta\theta_2^i]$, значения которого используются для решения СЛАУ (12) относительно вектора $\mathbf{X}_i = [\Delta\theta_3^i \quad \Delta\theta_4^i]^T$. Располагая значениями $\Delta\theta_j^i$ ($j = \overline{2, 4}$) осуществляется перевод в следующее положение $i = i + 1$ и уточняются текущие значения углов α_j^i (9).

4. Второй вариант решения задачи. Для реализации альтернативного к изложенному выше метода решения ОЗК перепишем исходную систему уравнений (8) в матричной форме:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{F}_i. \quad (18)$$

Здесь \mathbf{X}_i – вектор с содержащими искомыми приращениями углов $\Delta\theta_j^i$ ($j = \overline{2, 4}$) компонентами ($(\mathbf{X}_i)_{j-1} = \Delta\theta_j^i$); \mathbf{A}_i – прямоугольная (2×3)-матрица, элементы которой равны:

$$(\mathbf{A}_i)_{1,j-1} = \sum_{k=j}^4 l_k \sin \alpha_k^{i-1}; \quad (\mathbf{A}_i)_{2,j-1} = \sum_{k=j}^4 l_k \cos \alpha_k^{i-1} \quad (j = \overline{2, 4}).$$

Несложно заметить, что новая матрица \mathbf{A}_i фактически является объединением ранее используемых вектора \mathbf{B}_i и матрицы \mathbf{A}_i , а вектор \mathbf{X}_i – переменной \mathbf{U}_i и вектора \mathbf{X}_i . Вектор \mathbf{F}_i при этом остается без изменений (см. (12)).

Очевидно, что обратного оператора \mathbf{A}_i^{-1} в СЛАУ (18) не существует. Подобные некорректные задачи решаются либо методом псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза, либо его развитием – методом регуляризации Тихонова. Численная сторона последнего заключается в переходе от исходного уравнения I-го рода (18) к уравнению II-го рода

$$(\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i + \lambda \mathbf{C}) \mathbf{X}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{F}_i, \quad (19)$$

где λ – малый произвольный положительный параметр, обеспечивающий устойчивость вычисления матрицы $(\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i + \lambda \mathbf{C})^{-1}$; \mathbf{C} – квадратная (3×3)-матрица, которая в классических постановках имеет равные между собой диагональные элементы. В настоящей работе, с учетом специфики вектора \mathbf{X}_i , матрица \mathbf{C} считается диагональной, ненулевые элементы которой задаются по формуле:

$$(\mathbf{C})_{j-1,j-1} = \gamma_j \quad (j = \overline{2, 4}).$$

Последующее решение системы (19) не вызывает принципиальных затруднений,

и выполняется на каждом шаге по времени ($i=\overline{1,I}$).

5. Выбор весовых коэффициентов. При назначении значений весовых коэффициентов γ_j ($j=\overline{2,4}$) можно руководствоваться следующим приемом. На первом этапе значение γ_2 выбрать заведомо большим, что соответствует минимизации изменения угла θ_2 на каждом временном шаге по i . Соотношение между другими коэффициентами γ_j ($j=3,4$) можно выбрать таким, чтобы выровнять максимальные значения угловых ускорений ε_j соответствующих звеньев. Конечно-разностная формула для вычисления ε_j имеет классический вид

$$\varepsilon_j^i = \frac{\theta_j^{i-1} - 2\theta_j^i + \theta_j^{i+1}}{\Delta t^2}. \quad (20)$$

На практике, совместно со значениями весовых коэффициентов γ_j , функционал (11) должен учитывать ограничения на кинематические перемещения и энергетические затраты на формирование управляющего воздействия.

6. Численные результаты. В качестве модельного примера рассмотрим управление движением четырехзвенного манипулятора со следующими геометрическими параметрами: $l_1=0,05$ м, $l_2=5,16$ м, $l_3=2,59$ м, $l_4=1,33$ м. Начальные значения углов равны: $\theta_2^0=30^\circ$, $\theta_3^0=-60^\circ$, $\theta_4^0=-30^\circ$. Траектория движения точки O_4 определялась законом (1) при $\Delta X=-3$ м, $\Delta Z=1,5$ м и различных a_2 .

Количество интервалов I принято равным 100. Значение параметра λ в (19) выбиралось из диапазона $[10^{-15} \dots 10^{-10}]$, при этом расхождение полученных расчетных величин не превышает 0,1 %. Начальные значения весовых коэффициентов следующие: $\gamma_2=10$, $\gamma_3=\gamma_4=1$. Уточнение значений γ_j ($j=3,4$) производилось из условия $\max|\varepsilon_3^i| \approx \max|\varepsilon_4^i|$, в котором угловые ускорения определялись по формуле (20). В результате, при $a_2=1$ имеем $\gamma_3=1$ и $\gamma_4=1,6$, а при $a_2=0$ (прямолинейная траектория движения O_4) – $\gamma_3=1$ и $\gamma_4=2,8$.

Численные эксперименты показали, что результаты решения исследуемой задачи по предложенным в настоящей работе методикам (формулам (17) и (19)) практически совпадают (расхождение результатов не превышает 0,1 %). Идентичность результатов, полученных по двум, принципиально различным методикам, свидетельствует об их достоверности, а использование критерия управления (11) обеспечивает единственность решения. В связи с этим далее не указывается метод, в соответствии с которым получены числовые значения.

Рисунки 2 и 3 иллюстрируют графики угловых скоростей $\Delta\theta_j$ и угловых ускорений ε_j в j -ой кинематической паре при $a_2=1$ (рис. 2) и $a_2=0$ (рис. 3) при переводе точки O_4 из положения O_4^0 в O_4^I .

Для оценки эффективности разработанных методов была также рассмотрена задача об определении таких углов θ_j^I ($j=\overline{2,4}$), которые бы минимизировали значение

параметра J_0 (3). Решение задачи $J_0 \rightarrow \min$ отыскивалось методом последовательного приближения на основании уравнений типа (14) и (19).

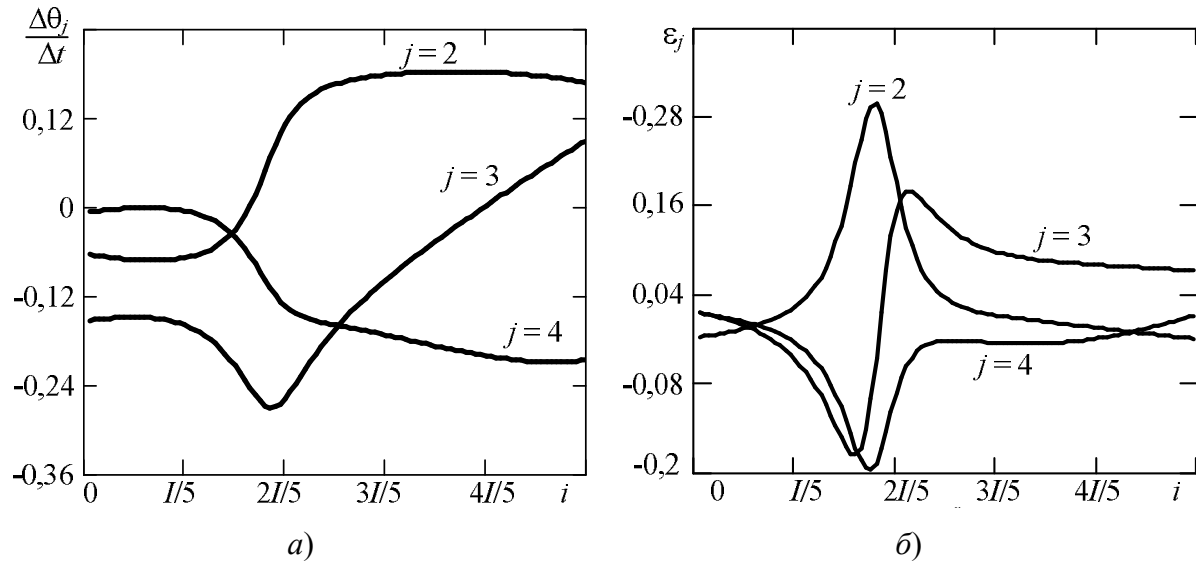


Рис. 2. Относительные угловые скорости (а) и ускорения (б) при $a_2=1$

При произвольной траектории движения точки O_4 такой подход позволяет получить искомые углы за 5–7 итераций при относительной погрешности в 0,01 % (в рассматриваемом примере – за 5 итераций). Малое отличие значений углов θ_j^I с вычисленными по изложенным выше методикам свидетельствует о правомерности принятого допущения, что минимизация слагаемых J_i в (11) тождественна минимизации J_0 (3).

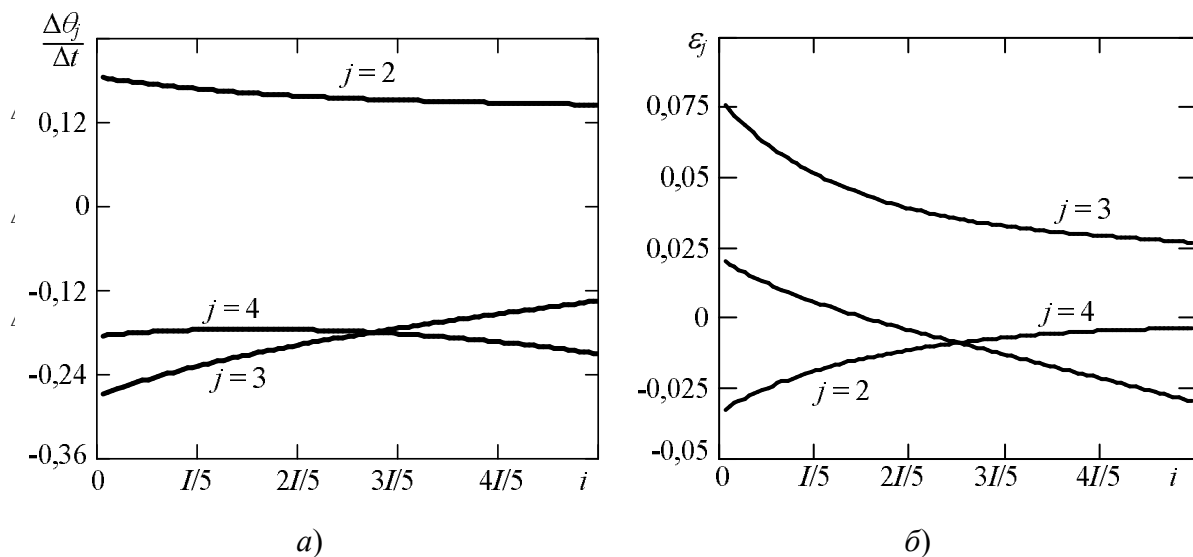


Рис. 3. Относительные угловые скорости (а) и ускорения (б) при $a_2=0$

Выводы. Результаты численного моделирования показали хорошее совпадение результатов, полученных по первому методу, который основан на последовательном решении СЛАУ (17) и (12), и по второму, который сведен к СЛАУ (19). Расхождение между соответствующими решениями не превышает 0,1 %. Это свидетельствует о том, что уравнение (19) представляет собой компактную форму записи уравнений первого

метода и при этом является более универсальным.

Изложенный в настоящей работе второй метод решения ОЗК был успешно апробирован на манипуляторе, с количеством звеньев $N \geq 6$. Процедура решения в этом случае также сводится к решению СЛАУ (19), в которой компоненты вектора \mathbf{X}_i , элементы матриц \mathbf{A}_i и \mathbf{C} равны:

$$(\mathbf{A}_i)_{1,j-1} = \sum_{k=j}^N l_k \sin \alpha_k^{i-1}; \quad (\mathbf{A}_i)_{2,j-1} = \sum_{k=j}^N l_k \cos \alpha_k^{i-1}; \quad (\mathbf{X}_i)_{j-1} = \Delta \theta_j^i; \quad (\mathbf{C})_{j-1,j-1} = \gamma_j,$$

где $j = \overline{2, N}$; N – количество звеньев.

Поскольку результаты моделирования при $N \geq 6$ аналогичны результатам, приведенным на рис. 2 и 3, то в данной работе их приводить не будем. Следует также отметить, что как траектория точки O_4 , так и скорость перемещения точки O_4 по ней, могут быть произвольными. Разработанный метод ориентирован на задание приращений координат точки O_4 (Δx_j^i и Δz_j^i), которые определяют вектор \mathbf{F}_i (19) на каждом временном интервале $[(i-1)\Delta t; i\Delta t]$. Выбор квадратичного закона (1) в настоящей работе обусловлен его широким распространением и наглядностью полученных выражений. Изложенные методы могут быть обобщены на управление движением манипулятора с учетом действующих на него механических нагрузок, а выбор весовых коэффициентов может проводиться с учетом массово-инерционных характеристик звеньев.

Литература: 1. Elgazzar S. Efficient cinematic transformation for the PUMA 560 robot / S. Elgazzar // *IEEE Journal Robotics Automat.* – 1985. - Vol. RA-1. - No.3. – P. 142-151. 2. Tsai L.W. Solving the kinematics of the most general six- and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods / L.W.Tsai, A.P. Morgan // *ASME J. Mechanisms, Transmissions, Automat. Design.* – 1985. -Vol. 107. - P. 198–200. 3. Lee H. A new vector theory for the analysis of spatial mechanism / H. Lee, C. Liang // *Journal of Mechanism and Machine Theory.* - 1988.- Vol. 23. - No.3. – P. 209-217. 4. Karilk B. An improved approach to the solution of inverse kinematics problems for robot manipulators / B. Karilk, S. Aydin // *Journal of Engineering applications of artificial intelligence.* – 2000. – Vol. 13. – P. 159–164. 5. Antonelli G. A new on-line algorithm for inverse kinematics of robot manipulators ensuring path-tracking capability under joint limits / G. Antonelli, S. Chiaverini, G. Fusco // *IEEE Transaction on Robotics and Automation.* – 2003. - Vol.19. - No.1. – P. 162–167. 6. Angeles J. On the Numerical Solution of the Inverse Kinematic Problem / J. Angeles // *The International Journal of Robotics Research.* – 1985. - Vol. 4. - No.2. – P. 21–37. 7. Goldenberg A. A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots / A. Goldenberg, B. Benhabib, R. Fenton // *IEEE Journal of Robotics and Automation.* – 1985. – Vol. 1. – No.1. – P. 14–20. 8. Singh V.K. A manipulator Jacobian based modified Newton-Raphson algorithm (JMNR) for robot inverse kinematics / V.K. Singh, K.C. Gupta // *Advances in Design Automation-1989: Mechanical Systems Analysis, Design and Simulation, ASME DE-19-3. New York, ASME.* – 1989. – P. 327–332. 9. Wampler C.W. Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods / C.W. Wampler // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics.* – 1986. – Vol. 16.–No.1.–P. 93–101. 10. Yahya S. Redundant manipulators kinematics inversion / S. Yahya, M. Moghavvemi, H.A.F. Mohamed // *Scientific Research and Essays.* – 2011. – Vol. 6. – P. 5462–5470. 11. Goldenberg A.A. A generalized solution to the inverse kinematics of robotic manipulators/ A.A. Goldenberg, D.L.

Lawrence // *Journal of dynamic systems, measurement, and control*. – 1985. – Vol. 107. – No.1. – P. 103–106. 12. Kumar S. *An Optimization Approach to solve the Inverse Kinematics of Redundant Manipulator* / S.Kumar, N.Sukavanam, R.Balasubramanian // *International Journal of Information and System Sciences*. – 2010. – Vol. 6. – No. 4. – P. 414–423. 13. Wang L.C.T. *A combined optimization method for solving the inverse kinematics problems of mechanical manipulators* / L.C.T. Wang, C.C. Chen // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. – 1991. – Vol. 7. – No.4. – P. 489-499. 14. Piltan F. *Artificial control of PUMA robot manipulator: A-review of fuzzy inference engine and application to classical controller* / F. Piltan, S.T. Haghghi [et al]. // *International Journal of Robotics and Automation*. – 2011. – Vol. 2. – No.5. – P. 401–425. 15. Nanda S.K. *A Novel Application of Artificial Neural Network for the Solution of Inverse Kinematics Controls of Robotic Manipulators* / S.K. Nanda, S. Panda [et al]. // *International Journal of Intelligent Systems and Applications*. – 2012. – Vol. 9. – P. 81–91. 16. Глазков В.П. Точностные оценки нейросетевого решения обратной задачи кинематики манипулятора / В.П. Глазков // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2003. – №.11. – С. 12–18. 17. Chaudhary H. *Intelligent Inverse Kinematic Control of SCORBOT-ER V Plus Robot Manipulator* / H. Chaudhary, R. Prasad // *International Journal of Advances in Engineering and Technology*. – 2011. – Vol. 1. – No.5. – P. 158–169. 18. Бронштейн И.Н. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Учебное пособие* / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 608 с.

Bibliography (transliterated): 1. Elgazzar S. *Efficient cinematic transformation for the PUMA 560 robot* / S. Elgazzar // *IEEE Journal Robotics Automat.* – 1985. – Vol. RA-1. – No.3. – P. 142-151. 2. Tsai L.W. *Solving the kinematics of the most general six- and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods* / L.W.Tsai, A.P. Morgan // *ASME J. Mechanisms, Transmissions, Automat. Design*. – 1985. – Vol. 107. – P. 198–200. 3. Lee H. *A new vector theory for the analysis of spatial mechanism* / H. Lee, C. Liang // *Journal of Mechanism and Machine Theory*. – 1988. – Vol. 23. – No.3. – P. 209–217. 4. Karilk B. *An improved approach to the solution of inverse kinematics problems for robot manipulators* / B. Karilk, S. Aydin // *Journal of Engineering applications of artificial intelligence*. – 2000. – Vol. 13. – P. 159–164. 5. Antonelli G. *A new on-line algorithm for inverse kinematics of robot manipulators ensuring path-tracking capability under joint limits* / G. Antonelli, S. Chiaverini, G. Fusco // *IEEE Transaction on Robotics and Automation*. –2003. –Vol.19. –No.1. –P. 162–167. 6. Angeles J. *On the Numerical Solution of the Inverse Kinematic Problem* / J. Angeles // *The International Journal of Robotics Research*. – 1985.–Vol. 4. – No.2. –P. 21–37. 7. Goldenberg A. *A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots* / A. Goldenberg, B. Benhabib, R. Fenton // *IEEE Journal of Robotics and Automation*. – 1985. – Vol. 1. – No.1. – P. 14–20. 8. Singh V.K. *A manipulator Jacobian based modified Newton-Raphson algorithm (JMNR) for robot inverse kinematics* / V.K. Singh, K.C. Gupta // *Advances in Design Automation-1989: Mechanical Systems Analysis, Design and Simulation*, ASME DE-19-3. New York, ASME. – 1989. – P. 327–332. 9. Wampler C.W. *Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods* / C.W. Wampler // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. – 1986. – Vol. 16. – No.1. – P. 93–101. 10. Yahya S. *Redundant manipulators kinematics inversion* / S. Yahya, M. Moghavvemi, H.A.F. Mohamed // *Scientific Research and Essays*. – 2011. – Vol. 6. – P. 5462–5470. 11. Goldenberg A. A. *A generalized solution to the inverse kinematics of robotic manipulators* / A.A. Goldenberg, D.L. Lawrence // *Journal of dynamic systems, measurement, and control*. – 1985. – Vol. 107. – No.1. – P. 103–106. 12. Kumar S. *An Optimization Approach to solve the Inverse Kinematics of Redundant Manipulator* / S. Kumar, N. Sukavanam, R. Balasubramanian // *International Journal of Information and System Sciences*. – 2010. – Vol. 6. – No. 4. – P. 414–423. 13. Wang L.C.T. *A combined optimization method for solving the inverse kinematics problems of mechanical manipulators*/L.C.T. Wang, C.C. Chen // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. – 1991.

– Vol. 7. – No.4. – P. 489–499. 14. Piltan F. Artificial control of PUMA robot manipulator: A-review of fuzzy inference engine and application to classical controller/F. Piltan, S.T. Haghghi [et al]. // *International Journal of Robotics and Automation*. – 2011. – Vol. 2. – No.5. – P. 401–425. 15. Nanda S.K. A Novel Application of Artificial Neural Network for the Solution of Inverse Kinematics Controls of Robotic Manipulators / S.K. Nanda, S. Panda [et al]. // *International Journal of Intelligent Systems and Applications*. – 2012. – Vol. 9. – P. 81–91. 16. Glazkov V.P. Tochnostnye ocenki nejrosetevogo reshenija obratnoj zadachi kinematiki manipulyatora / V.P. Glazkov // *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie*. – 2003. – №.11. – S. 12–18. 17. Chaudhary H. Intelligent Inverse Kinematic Control of SCORBOT-ER V Plus Robot Manipulator / H. Chaudhary, R. Prasad // *International Journal of Advances in Engineering and Technology*. – 2011. – Vol. 1. – No.5. – P. 158–169. 18. Bronshtejn I.N. Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja vtuzov: Uchebnoe posobie / I.N. Bronshtejn, K.A. Semendjaev. – SPb.: Izd-vo «Lan'», 2009. – 608 s.

Гурко А.Г., Янчевский И.В.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПЛОСКОГО ШАРНИРНОГО ИЗБЫТОЧНОГО МАНИПУЛЯТОРА

Получено оптимальное решение обратной задачи кинематики четырехзвенного шарнирного манипулятора, обеспечивающее перемещение крайней от опорной точки по заданной траектории. В качестве критерия оптимальности принята минимизация квадратичного параметра от присоединенных углов с соответствующими весовыми коэффициентами. Изложены два метода к решению задачи и вариант выбора весовых коэффициентов. Эффективность разработанных методов оценена на решении модельной задачи. Представленные в работе результаты обобщены на рычажные механические системы с большим количеством звеньев (избыточные манипуляторы) и могут быть распространены на случай пространственной траектории движения управляемой точки.

Гурко О.Г., Янчевський І.В.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧІ КІНЕМАТИКИ ПЛОСКОГО ШАРНІРНОГО НАДЛИШКОВОГО МАНІПУЛЯТОРА

Отримано оптимальне розв'язання зворотної задачі кінематики чотириланкового шарнірного маніпулятора, що забезпечує переміщення по заданій траєкторії крайньої точки від опорної. В якості критерію оптимальності прийнята мінімізація квадратичного функціоналу від приєднаних кутів з відповідними ваговими коефіцієнтами. Викладено два методи щодо розв'язання задачі і варіант вибору вагових коефіцієнтів. Ефективність розроблених методів оцінена шляхом розв'язання модельної задачі. Представлені в роботі результати узагальнені на важільні механічні системи з більшою кількістю ланок (надлишкові маніпулятори) і можуть бути поширені на випадок просторової траєкторії руху керованої точки.

Gurko A.G., Yanchevsky I.V.

SOLUTION OF INVERSE PROBLEMS KINEMATICS FOR PLANAR HINGED REDUNDANT MANIPULATOR

In this paper we are considering an optimal solution of inverse kinematics problem for the fourlink hinged manipulator that provides movement at the reference point on the desired path. As optimality criterion the minimizing of quadratic function of angles associated with the respective weights are accepted. Two methods to solve the problem and the choices of weights are presented. The effectiveness of the proposed procedure has been confirmed by a model example. The presented in the paper results are generalized for redundant manipulators and can be extended to the case of the spatial trajectory of the control points.